

Transition de phase dans la bootstrap percolation en dimension 2

Hugo Duminil-Copin

septembre 2008

1 Description des recherches

Cette partie se divise en quatre sous-sections. La première explique rapidement le sujet de mon travail avec M. Barlow sur les marches aléatoires sur la composante infinie de la percolation. La deuxième explique mon travail en collaboration avec T. Alberts sur les bridges points du SLE(8/3). La troisième partie est une introduction aux problèmes concernant la bootstrap percolation.

1.1 Marches aléatoires sur la composante infinie de la percolation

Le modèle de percolation a été introduit par J. Hammersley en 1957. Il modélise par exemple l'intérieur d'une pierre spongieuse et représente le modèle de physique statistique le plus simple à étudier. Formellement, considérons le graphe \mathbb{Z}^d et décrétons qu'une arête est ouverte avec probabilité p et fermée avec probabilité $1 - p$ et ce indépendamment de l'état des autres arêtes (on imagine une pièce biaisée associée à chaque site, on la jette afin de décider si un site est ouvert ou fermée). En ne conservant que les arêtes ouvertes, ce procédé définit un graphe aléatoire inclus dans $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{L}^d)$ (les sommets sont les sites de \mathbb{Z}^d). Nous nous intéressons aux propriétés de connectivité de ce graphe, par exemple, à l'éventuelle existence d'une composante connexe infinie. Les propriétés élémentaires de ce graphe sont regroupées dans le théorème suivant.

Theorem 1.1 *Il existe p_c strictement entre 0 et 1 tel qu'un phénomène critique apparaît à p_c :*

- si $p < p_c$, presque sûrement il n'y a pas de composante connexe infinie.
- si $p > p_c$, presque sûrement il y a une **unique** composante connexe infinie.

Lorsque p est inférieur à p_c (resp. égal à p_c , resp. supérieur à p_c), on dit que la phase est sous-critique (resp. critique, resp. surcritique).

L'essentiel des outils développés dans cette théorie sont destinés à étudier les différentes phases de la percolation, et en particulier de la composante connexe infinie en phase surcritique.

Un moyen efficace d'étudier les graphes est de considérer des marches aléatoires sur leurs sites. A chaque temps entier (on peut généraliser avec des temps continus), la marche aléatoire saute sur l'un de ses voisins (dans le graphe) avec une probabilité égale pour chaque voisin. Sur \mathbb{Z}^d , on retrouve la marche aléatoire simple. Les propriétés de cette marche aléatoire nous renseignent sur les propriétés du graphe sous-jacent. Par exemple, la croissance du cardinal des boules, ou les inégalités isopérimétriques peuvent se lire dans les propriétés de la marche aléatoire.

Sur \mathbb{Z}^d , on connaît parfaitement les propriétés de la marche aléatoire simple. On sait qu'elle est récurrente lorsque $d = 1, 2$ et transiente lorsque $d \geq 3$. D'autre part, si l'on renormalise avec les bonnes grandeurs (on multiplie le temps par n et on divise la taille de la maille par $n^{-1/2}$), on obtient que la marche aléatoire simple tend vers le Mouvement Brownien. On peut en déduire de nombreuses propriétés, telles que des bornes gaussiennes sur le noyau de la chaleur (ie $p_t(x, y) = \mathbb{P}_x(X_t = y)$), une loi du logarithme itéré, etc...

Dans l'objectif de comparer les propriétés de la composante connexe infinie en régime surcritique aux propriétés de \mathbb{Z}^d , il est intéressant de comparer les propriétés de la marche aléatoire sur ce graphe (qui est aléatoire, on a donc pour chaque environnement tel que la composante connexe infinie existe, un espace de probabilité associé à une marche aléatoire sur cette composante). Il apparaît que de nombreuses propriétés sont partagées. Par exemple, la marche aléatoire est récurrente pour $d = 1, 2$ et transiente pour $d \geq 3$ (H. Kesten, G. Grimmett, Y. Zhang, [11]). Récemment, M. Barlow [2] a prouvé que l'on retrouvait les bornes gaussiennes pour la marche. Ce théorème a ouvert les portes à de nouveaux résultats. Ainsi, un principe d'invariance (la convergence vers le Mouvement Brownien de la limite d'échelle) a été prouvé par P. Mathieu et A.L. Piatnitski [14] d'une part et N. Berger et M. Biskup [5] d'autre part.

Dans mon article, je me suis intéressé à l'existence ou non de la loi du logarithme itéré. Plus formellement, le résultat est le suivant (pour plus de détails, voir la prépublication [?]).

Theorem 1.2 *Considérons $d \geq 2$ et supposons que $p > p_c$, où $p_c = p_c(d)$ est le paramètre critique pour la percolation par arêtes sur \mathbb{Z}^d . Alors, il existe une constante $c(p, d)$ strictement entre 0 et ∞ telle que pour presque toutes les réalisations de la percolation de paramètre p , pour tout x dans la composante connexe infinie \mathcal{C} , la marche aléatoire à temps continu X^w partant de x satisfait presque sûrement :*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{|X_t^w|}{\sqrt{t \log \log t}} = c(p, d).$$

1.2 Modèle de Bootstrap Percolation

Introduction au modèle :

Ce modèle de physique mathématiques a été introduit pour la première fois par Chalupa en 1979 [7]. Il entre dans la classe plus générale des automates cellulaires. Ces modèles sont composés d'une configuration initiale aléatoire et d'une dynamique déterministe qui modifie au cours du temps cet ensemble aléatoire. L'exemple le plus connu est le jeu de la vie de J.H. Conway [8]. La bootstrap percolation modélise la magnétisation d'un corps (par exemple, il est possible de le coupler avec la dynamique de Glauber à faible température) ou la propagation d'une maladie.

Le modèle est défini ainsi :

- au temps 0, chaque site de \mathbb{Z}^2 est occupé (infecté) avec probabilité p indépendamment des autres sites du réseau, sinon il est vide (sain). On utilisera la dénomination 1 pour les sites occupés, 0 (pour les sites vides). On note \mathbb{P}_p la loi de l'ensemble des sites au temps 0 (cette loi est la loi de la percolation par sites de paramètre p).
- si un site est occupé au temps t , il reste occupé au temps $t + 1$, s'il était vide au temps t , il devient occupé si et seulement si au moins 2 de ses plus proches voisins (ceux à distance 1 pour la norme 1) sont occupés.

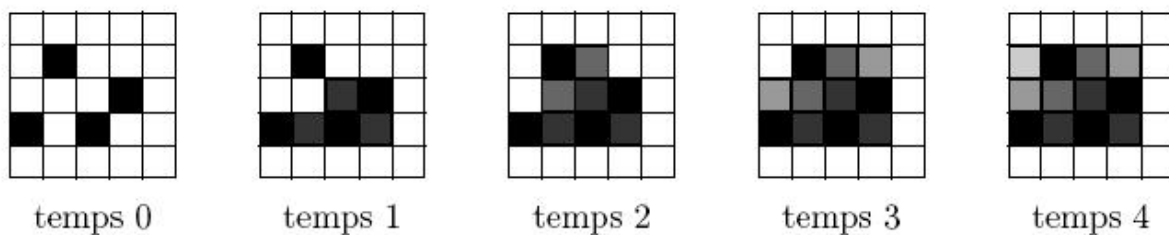


fig : un exemple de dynamique

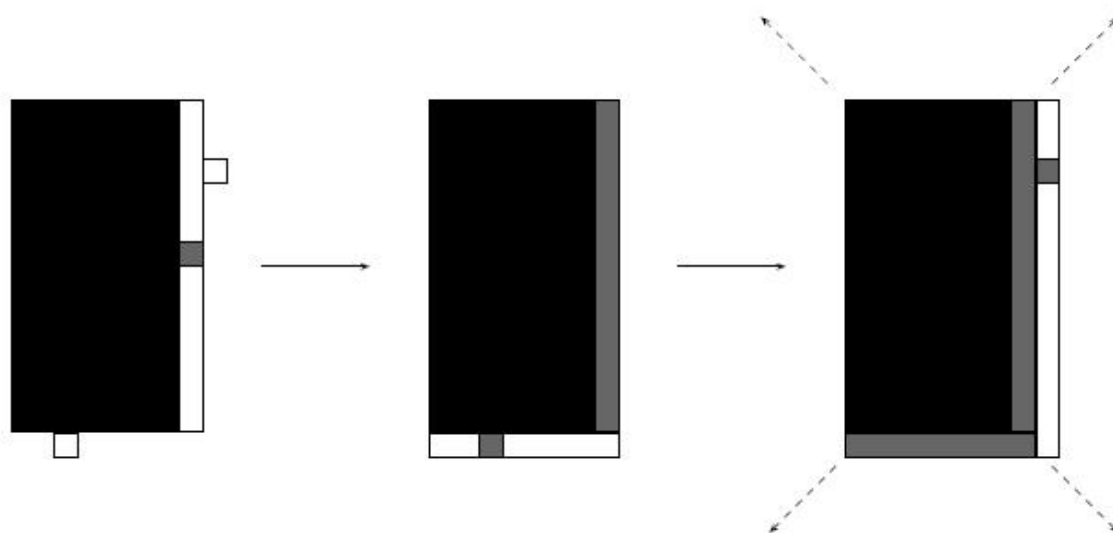


fig : expansion d'une goutte

Ainsi, on obtient à chaque temps entier t un certain ensemble \mathcal{S}_t de sites occupés. Cet ensemble croît avec t et il est possible de définir l'ensemble limite \mathcal{S}_∞ au temps ∞ en considérant l'union de tous les ensembles \mathcal{S}_t . Une question naturelle concernant ce modèle est d'étudier le comportement lorsque t temps vers l'infini de \mathcal{S}_t et donc en particulier de \mathcal{S}_∞ . La première question que l'on peut se poser est la suivante.

Question 1 : lorsque $p > 0$, a-t-on $\mathcal{S}_\infty = \mathbb{Z}^2$, \mathbb{P}_p -presque sûrement ?

La réponse à cette question a été le premier résultat rigoureux dans ce domaine et s'explique en quelques mots. Supposons qu'il existe un grand rectangle de sites occupés et qu'il y a sur un coté donné un site occupé. Dès lors, tout le coté devient occupé. Ainsi, le rectangle a grossi d'une colonne (ou une ligne). On peut réitérer la procédure et voir que le rectangle peut ainsi grossir jusqu'à l'infini (voir figure 2). Grace à l'inégalité FKG (voir plus loin), on peut calculer la probabilité qu'un rectangle grossisse jusqu'à l'infini et prouver qu'elle est strictement positive lorsque $p > 0$. La probabilité que la configuration finale soit égale à \mathbb{Z}^2 est donc strictement positive. Dans le même temps, il est possible

de montrer que cette propriété vérifie une loi du 0-1. On a donc montré que la probabilité valait 1.

Il est évident que lorsque l'on fixe une boîte de taille L et que l'on ne s'intéresse qu'à la configuration à l'intérieur (l'extérieur est considéré comme étant vide), la probabilité, notée $I(p, L)$, que la configuration finale soit égale à la boîte (on dit **engendrée intérieurement**) tout entière est entre 0 et 1 strictement (par exemple, il faut au moins qu'il y est un site occupé, et si tous les sites sont occupés, la configuration finale est bien entendu la boîte tout entière). De plus, lorsque l'on fixe L et que p tend vers 0, cette probabilité tend clairement vers 0. D'autre part, l'argument précédent permet de déduire facilement que lorsque l'on fixe $p > 0$ et que L tend vers l'infini, la probabilité tend vers 1. La question suivante semble alors naturelle, elle est reliée au temps typique que met 0 à devenir occupé.

Question 2 : quel est le comportement de $I(p, L)$ lorsque (p, L) tend vers $(0, \infty)$?

Question 3 : comment se comporte le premier temps T tel que 0 est dans \mathcal{S}_t lorsque p tend vers 0 ?

Résultats :

Les physiciens avaient prédit que la limite dépendait de la vitesse à laquelle L tendait vers l'infini par rapport à p . Le premier résultat dans cette direction est dû à Aizenman et Lebowitz [1] et affirme qu'il existe deux constantes $0 < c_- \leq c_+ < \infty$ telles que si (p, L) tend vers $(0, \infty)$ de telle sorte que $p \log L < c_-$ (resp. $p \log L > c_+$), alors $I(p, L)$ tend vers 0 (resp. 1). Ce résultat a été étendu à la bootstrap percolation en dimension d (où l'on considère les $2d$ plus proches voisins avec un seuil critique égal à r compris entre 2 et d) par Cerf et Cirillo [6] avec une fonction de vitesse $p^{1/(d-r+1)} \log^{r-1} L$ où \log^{r-1} signifie la $r - 1$ itéré du logarithme.

Il était également conjecturé par les physiciens qu'il existait une pseudo-unicité de la constante c'est-à-dire qu'il existait $0 < c < \infty$ tel que l'on puisse prendre $c_- = c - \epsilon$ et $c_+ = c + \epsilon$ pour tout epsilon strictement positif. Très peu de résultats existent sur ce problème qui est considérablement plus difficile que l'existence de bornes a priori. En dimension 2, Holroyd a prouvé la pseudo-unicité pour le modèle de la bootstrap percolation avec $c = \pi^2/18$ et pour un modèle quelque peu modifié en toutes dimensions. Mais jusqu'à récemment, ces résultats étaient les seuls de la sorte. Notamment, la démonstration ne se généralisait ni aux modèles plus généraux en dimension 2 ni à la bootstrap percolation en dimension d .

Récemment, des progrès ont été faits dans ce domaine. A. Holroyd et moi-même avons prouvé l'unicité de la constante pour une famille beaucoup plus générale de modèles en dimension 2 (par exemple, cette famille contient tous les modèles où l'on fixe arbitrairement un voisinage convexe d'un point et que l'on considère un paramètre critique r au dessus duquel on devient contaminé). En dimension 3, Balogh, Bollobas et Morris ont prouvé l'unicité de la constante pour le modèle de la bootstrap percolation. Dans le même temps, j'ai trouvé une démonstration alternative de ce résultat. Ces trois auteurs et moi-même travaillons à la rédaction de la preuve de l'unicité en toutes dimensions. Ainsi, l'unicité de la constante semble être un comportement universel de modèle vérifiant très peu d'hy-

pothèses (comme la localité, l'invariance par translation et la monotonie). Le résultat est le suivant (pour les définitions précises, voir le preprint). Il est à noter que nous avons prouvé ce résultat dans une plus grande généralité, notamment avec des dynamique non balancées. La fonction de vitesse change en $p^\gamma \log 1/p \log L$.

Theorem 1.3 *En dimension 2, soit \mathcal{T} une dynamique critique vérifiant certaines propriétés raisonnables (comme la croissance, la localité, etc...), il existe γ entier et $0 < c < \infty$ tels que pour tout $\epsilon > 0$,*

(1) $I(L, p) \rightarrow 0$ si $(L, p) \rightarrow (\infty, 0)$ en satisfaisant $p^\gamma \log L < c - \epsilon$ pour tout p .

(2) $I(L, p) \rightarrow 1$ si $(L, p) \rightarrow (\infty, 0)$ en satisfaisant $p^\gamma \log L > c + \epsilon$ pour tout p .

En dimension d , soit \mathcal{T} la bootstrap percolation simple avec r voisins en dimension d , alors il existe $0 < c < \infty$ tel que

(1) $I(L, p) \rightarrow 0$ si $(L, p) \rightarrow (\infty, 0)$ satisfaisant $p^{1/(d-r+1)} \log^{r-1} L < c - \epsilon$ pour tout p .

(2) $I(L, p) \rightarrow 1$ si $(L, p) \rightarrow (\infty, 0)$ satisfaisant $p^{1/(d-r+1)} \log^{r-1} L > c + \epsilon$ pour tout p .

Il est possible de relier le comportement de la probabilité $I(L, p)$ avec le comportement de T . Pour la bootstrap percolation, cela permet de prouver que $p \log T$ tend en probabilité vers $\pi^2/18$. En dimension supérieure, on obtient que $p \log^{d-1} T$ tend en probabilité vers une constante déterministe.

Description sommaire de la preuve pour la bootstrap percolation simple en dimension 2 (borne inférieure) :

L'existence de c_+ est beaucoup plus facile que celle de c_- et donne la bonne constante après peu de travail. L'idée est de dire que lorsqu'une grande région de la boîte est dors et déjà occupée, alors la façon la plus simple d'engendrer la boîte est de toujours trouver un site occupé sur la frontière de la région occupée. Cela nous mène à l'approximation suivante de notre événement. La boîte est totalement engendrée s'il existe une goutte de taille critique occupée.

Typiquement, cette goutte sera un rectangle (seul ensemble connecté stable) de dimension B/p avec $B \gg 1$. Si l'on montre que la probabilité qu'un tel amas soit engendré intérieurement est plus grande que $\exp(-\pi^2/(9p))$, alors on aura le résultat. En effet, il est facile de montrer que conditionnellement à un événement de grande probabilité, l'existence de cet amas critique implique l'engendrement de toute la boîte. De plus, il y a de l'ordre de L^2 possibilités pour cet amas. Si l'on prend $L^2 \gg \exp(-\pi^2/(9p))$, on obtiendra une probabilité proche de 1.

Une bonne façon d'engendrer cette goutte est de supposer qu'un rectangle de taille $p^{-1/2}$ est plein et qu'il grossit symétriquement. Il est alors facile de vérifier que la probabilité que l'on obtient est exactement $\exp(-\pi^2/(9p))$.

Description sommaire de la preuve pour la bootstrap percolation simple en dimension 2 (borne supérieure) :

Toujours par le même argument que précédemment, une très bonne approximation de l'événement est l'existence d'une goutte critique. Par contre, la probabilité que cette goutte

soit engendrée intérieurement est beaucoup plus difficile à calculer. En effet, dans l'autre borne, nous avons uniquement besoin d'une condition suffisante (en d'autres termes, de trouver une façon d'engendrer la goutte).

Pour la borne supérieure, nous recherchons une condition nécessaire et nous devons donc étudier toutes les façons d'engendrer la goutte. A. Holroyd a mis au point une technique d'encodage des différentes façons d'engendrer la goutte grâce à des arbres étiquetés par des rectangles intérieurement engendrés. Grossièrement, deux choses peuvent apparaître. Soit un droplet R macroscopique grossit un petit peu (par exemple jusqu'à un droplet R' de taille similaire à R). Dans ce cas, le droplet grossit tout seul dans le sens qu'il n'utilise pas d'autre droplet de taille macroscopique. Soit deux droplets macroscopiques R_1 et R_2 se réunissent et forment un droplet géant R' . En enregistrant ces deux types d'évènements (dans le premier cas, R' a un seul enfant R , dans le deuxième, R' a deux enfants R_1 et R_2), on est capable d'encoder la séquence de grossissement par un arbre.

Il nous faut alors comparer les probabilités de ces séquences d'évènements et prouver que la meilleure possible est effectivement celle considérée dans la borne inférieure (correspondant à l'arbre à une seule branche labelisé par des carrés). De nombreuses difficultés apparaissent dans l'étude. Par exemple, il faut prouver que deux arbres proches ont quasiment la même probabilité afin de se restreindre à un nombre fini d'arbres, les évènements que l'on considère ne sont pas indépendants, etc... Cependant, les outils utilisés sont élémentaires et nous les présentons dans la prochaine section.

Outils probabilistes utilisés :

Il est intéressant de noter que la difficulté à étudier les automates cellulaires est l'aspect déterministe de la dynamique. Cette propriété introduit une rigidité dans le modèle qui n'autorise pas un grand nombre d'outils. On est alors obligé de s'intéresser de plus près aux propriétés intrinsèques à la dynamique tout en gardant à l'esprit qu'il faudra être capable de calculer les probabilités des évènements considérés et leur corrélation. Ce calcul requiert des propriétés particulière de la dynamique sans lesquelles l'étude devient extrêmement difficile. Dans notre cas, la bonne nouvelle vient de la monotonie de la dynamique. Nous présentons dans le prochain paragraphe les outils qui mettent en lumière l'utilité d'avoir une telle monotonie.

Afin d'utiliser au mieux cette croissance, on utilise les deux inégalités de corrélation qui sont à la base de la théorie de la percolation, l'inégalité FKG (C.M. Fortuin, P.W. Kasteleyn et J. Ginibre) et BK (Boel et Kasteleyn) [10]. Ces deux inégalités concernent des évènements dits croissants. Plus formellement, soit \leq la relation d'équivalence, $\omega \leq \omega'$ si $\omega(x) \leq \omega'(x)$ pour tout x (on se rappelle que $\omega(x)$ peut être égal à 0 ou 1).

Definition 1.4 *Un évènement A est croissant si ω appartient à A implique que toutes les configurations supérieures à ω sont dans A .*

On aura également besoin de la définition suivante.

Definition 1.5 *Soient A et B deux évènements croissants, l'évènement $A \circ B$ est l'évènement tel que $\omega \in A \circ B$ si et seulement s'il existe une partition de l'espace (F, E) tel*

que si l'on définit $\omega_x^E = \omega_x$ sur E et 0 sur F (l'inverse pour ω_F) satisfaisant $\omega^E \in A$ et $\omega^F \in B$.

En d'autres termes, on peut décider si on appartient à l'intersection en utilisant en plus des ensembles de sites disjoints. Dès lors, les deux inégalités s'écrivent :

Proposition 1.6 Inégalité FKG soient A et B deux évènements croissants, alors

$$\mathbb{P}_p(A \cap B) \geq \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B).$$

Inégalité BK soient A et B deux évènements croissants, alors

$$\mathbb{P}_p(A \circ B) \leq \mathbb{P}_p(A)\mathbb{P}_p(B).$$

Intuitivement, la première inégalité nous dit que la probabilité d'un évènement croissant sachant un autre évènement croissant est plus grande que la probabilité de l'évènement lui-même. Cette propriété est très naturelle car l'évènement croissant nécessite l'existence de sites ouverts pour être réalisé? Mais l'occurrence de A implique qu'il existe déjà des sites ouverts, dès lors, il est plus facile de trouver les sites ouverts nécessaires à la réalisation de B . Dans la deuxième inégalité, l'intuition est que la réalisation de A interdit l'utilisation de certains sites et limite ainsi le nombre de degrés de liberté. La probabilité conditionnelle est réduite. Cette deuxième inégalité ne semble pas dépendre fortement de la croissance. En fait, elle est vraie en toute généralité, c'est l'inégalité de Reimer.

Ainsi, les outils utilisés sont simples et la seule solution pour résoudre ce type de problèmes et de mettre la main dans le cambouis.

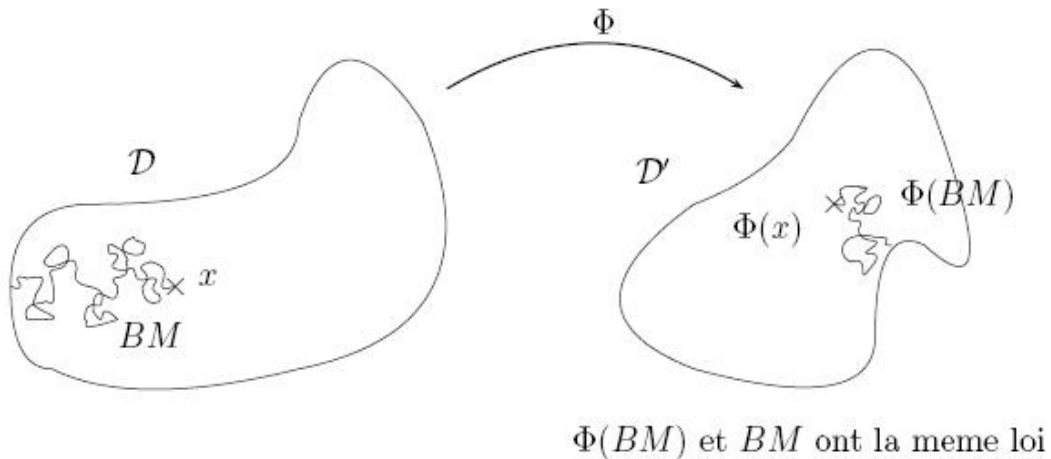


fig : définition de l'invariance conforme pour le mouvement brownien

1.3 Invariance conforme et modèles discrets en dimension 2

Un premier exemple et problématique :

Le mouvement brownien décrit la trajectoire d'une particule dans un gaz. Si on se concentre sur la dimension 2, ce processus est très bien compris. Parmi toutes ses propriétés, deux sont particulièrement intéressantes. D'une part, le mouvement Brownien est la limite de marches aléatoires quand on les renormalise à bon escient. D'autre part, si on considère deux domaines \mathcal{D} et \mathcal{D}' et une application conforme bijective Φ de \mathcal{D} dans \mathcal{D}' , le Mouvement Brownien partant de x dans \mathcal{D} a même loi (à reparamétrisation du temps près, on dit que la trace a même loi) qu'un Mouvement Brownien partant de $\Phi(x)$ dans \mathcal{D}' . Ainsi, les marches aléatoires (modèle discret) converge vers un objet qui est invariant conforme. Cet exemple n'est en fait pas un cas isolé.

Une problématique commune à la physique et aux mathématiques est l'étude de la limite d'échelle de modèle de la physique statistique. Si on s'intéresse par exemple à une interface entre deux gaz (interface du modèle d'Ising), ou à la forme de la trajectoire d'une marche aléatoire auto-évitante, des arguments provenant de la théorie conforme des champs nous apprennent qu'en dimension deux, ces objets sont supposés avoir une limite en les renormalisant et que cette limite est invariante conforme dans un certain sens. D'autre part, il est clair que l'objet limite n'est pas le mouvement brownien.

Invariance des modèles en dimension 2 :

En 1999, O. Schramm [15] a défini un ensemble de courbes appelées SLE (Stochastic Loewner Evolution ou Schramm Loewner Evolution). Ces courbes sont invariantes conformes et vérifient une propriété de martingale. Elles représentent les bons objets limites pour les modèles discrets présentés précédemment. Cependant, l'étude de la convergence des modèles discrets vers ces courbes continues est très difficile. On connaît cette convergence dans peu de cas. L'invariance conforme de la marche aléatoire est prouvée.

Nous présentons deux autres cas dans lesquels l'invariance conforme est connue et nous définissons de façon heuristique l'invariance conforme. Un modèle statistique se définit naturellement sur un domaine (je ne précise pas ce que j'entends par là).

Definition 1.7 *Soit un modèle de physique statistique \mathcal{M} , ce modèle est considéré comme **invariant conforme** si les 'observables macroscopiques' du modèle sont invariantes conformes.*

Un exemple concret est le suivant (S. Smirnov [17]). Considérons la donnée de $(\mathcal{D}, a, b, c, z)$ où \mathcal{D} est un domaine de Jordan du plan, z est dans \mathcal{D} et a, b, c sont des points du bord. Soit $\delta > 0$, on considère un réseau triangulaire de précision δ qui "approxime" (dans un sens que nous ne précisons pas ici) le domaine \mathcal{D} . On définit $a_\delta, b_\delta, c_\delta, z_\delta$ dans le réseau approximant a, b et c . Alors si on effectue une percolation par site (un site est noir ou blanc avec probabilité $1/2$, indépendamment de l'état des autres sites) sur ce réseau et si l'on note $f_\delta(z)$ la probabilité qu'il existe un chemin noir déconnectant z_δ de a_δ et b_δ mais pas de c_δ , on obtient que la limite quand δ tend vers 0 de $f_\delta(z)$ tend vers $Re(\Phi(z))$ où Φ est l'unique application conforme qui envoie (\mathcal{D}, a, b, c) sur le triangle équilatéral $(\mathcal{T}, 0, 1, \dots)$.

Ainsi, si l'on considère la percolation sur $(\mathcal{D}, \Psi(a), \Psi(b), \Psi(c))$, alors la probabilité d'avoir un chemin noir séparant $\Psi(z)$ de $\Psi(a)$ et $\Psi(b)$ mais pas de $\Psi(c)$ tend vers la même limite que $f_\delta(z)$. Grossièrement, ces deux probabilités sont équivalentes à l'infini. L'observable macroscopique est invariante par Φ à la limite.

Utilisation de l'invariance conforme :

Ce résultat puissant permet à priori de comprendre le modèle et d'effectuer un grand nombre de calculs. Par exemple, considérons le modèle d'Ising en dimension 2 sur le réseau à mailles carrées de taille δ . Si on le restreint à un rectangle, on peut passer à la limite. La résolution totale par Onsager puis Yang [19] a permis une compréhension approfondie de ce modèle. Cependant, le résultat ne se généralise pas aux autres domaines du plan. Un moyen de contourner cette difficulté est d'utiliser un résultat d'invariance conforme. Les observables macroscopiques de deux modèles d'Ising (l'un dans \mathcal{D} et l'autre dans $\Phi(\mathcal{D})$) sont reliées par la fonction Φ (S. Smirnov [16]).

Pour la percolation sur le réseau triangulaire, cette invariance conforme a permis le calcul des exposants de bras dont la valeur était conjecturée par les physiciens mais qui résistaient aux assauts des mathématiciens (S. Smirnov et W. Werner [18]). Noter que lorsque l'on sort de la dimension 2, l'existence même de ces exposants n'est pas prouvée. L'analyse complexe est donc au centre de cette théorie et est spécifique à la dimension 2. Il est d'une importance cruciale de prouver l'existence de la limite d'échelle pour d'autres modèles comme la percolation sur d'autres réseaux (on ne connaît le résultat que pour le réseau triangulaire), pour les modèles de Potts, pour les cartes planaires ou pour les marches auto-évitantes.

1.4 Bridge Points pour le SLE(8/3)

Dans le dernier paragraphe, on rappelle que les marches aléatoires auto-évitantes convergent vers le SLE(8/3). Au niveau discret, on connaît peu de choses sur les marches aléatoires auto-évitantes. L'invariance conforme de ces marches aléatoires auto-évitantes permettraient de comprendre beaucoup plus en profondeur le modèle et faire des calculs sur ces marches. Dans l'objectif de prouver ce résultat, ou du moins d'apporter des évidences supplémentaires dans la direction de ce résultat.

On sait par exemple que si l'on considère ces marches sur le demi-espace supérieur, il existe des lignes horizontales qui n'ont qu'un seul point d'intersection avec la trajectoire de la marche [13]. D'autre part, la loi de la trajectoire après ce point d'intersection est la même que la loi de la marche aléatoire dans sa globalité. Un tel point et une telle ligne sont appelées *bridge point* et *bridge line*. On peut s'intéresser au problème continu associé. Existe-t-il l'équivalent des bridge points pour le SLE(8/3) ?

Il est facile de voir que l'existence de tels objets n'est pas évidente. Par exemple, presque sûrement, un point fixé n'est pas un bridge point. Par contre, puisque la trajectoire a la puissance du continu, il n'est pas évident que presque sûrement, il n'existe pas de bridge points. En fait, une méthode efficace pour prouver l'existence de tels points est de calculer la dimension de Hausdorff de l'ensemble des bridge points. Il apparaît que des méthodes ont été développées pour calculer cette dimension (par exemple par V. Beffara

[3], [4]).

Dans l'article coécrit avec T. Alberts, on s'intéresse à cette dimension pour le $SLE(8/3)$ mais également pour une famille plus générale de courbes appelées *mesure de restriction* à laquelle le Mouvement Brownien appartient.

Un ensemble aléatoire R est une mesure de restriction si elle vérifie l'invariance conforme (comme décrite précédemment) et si de plus, étant donné deux domaines tels que $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ différents de \mathbb{C} , la loi de R dans le domaine \mathcal{D} conditionné à être inclus dans \mathcal{D}' est exactement la loi de R dans \mathcal{D}' . Pour plus de détails, voir le preprint dans la section. Les travaux de G.F. Lawler, O. Schramm et W. Werner ([12] et articles reliés) ont montré que ces conditions imposent aux mesures d'appartenir à une famille à un paramètre. Il est à noter que le $SLE(8/3)$ est la seule mesure de restriction qui soit une courbe simple (elle est de paramètre $5/8$), et le mouvement Brownien est la mesure de restriction de paramètre 1.

Un autre point important est la propriété de renouvellement. Au niveau discret, il est évident que la loi de ce qui est au dessus d'une bridge line est exactement la loi d'une marche aléatoire auto-évitante sur le demi-plan supérieur. Cette propriété persiste au niveau continu. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au pre-print joint au mémoire. Le principal résultat du papier est le suivant :

Theorem 1.8 *Le $SLE(8/3)$ contient des bridge points et l'ensemble de ces bridge points est de dimension de Hausdorff égale à $5/8$. La propriété de renouvellement aux bridge points est vérifiée. Enfin, il est possible de décomposer le $SLE(8/3)$ en irréductible bridge et ainsi développer une théorie des excursions sur les irréductible bridges (on obtient un processus de Poisson sur les irréductible bridges).*

Références

- [1] M. Aizenman and J. L. Lebowitz. Metastability effects in bootstrap percolation. *J. Phys.*, pages 21(19) :3801–3813, 1988.
- [2] M.T. Barlow. Random walks on supercritical percolation clusters. *Ann. Probab*, 4(32), 2004.
- [3] V. Beffara. Hausdorff dimensions for SLE(6). *Ann. Proba.*, 3(32), 2004.
- [4] V. Beffara. The dimension of the SLE curves. *Ann. Proba.*, 4(36), 2008.
- [5] N. Berger and M. Biskup. Quenched invariant principles for simple random walk on percolation clusters. *Probab. Theory Rel. Fields*, (137), 2007.
- [6] R. Cerf and E. N. M. Cirillo. Finite size scaling for in three-dimensional bootstrap percolation. *Ann. Prob.*, pages 27(4) :1837–1850, 1999.
- [7] J. Chalupa, P. L. Leath and G.R. Reich. Bootstrap percolation on a bethe lattice. *J. Phys. C.*, pages 12 :L31–L35, 1979.
- [8] E.F. Codd. *Cellular Automata*. New-York Academic Press, 1968.
- [9] H. Duminil-Copin. Law of the Iterated Logarithm for the random walk on the infinite percolation cluster arXiv :0809.4380 , 2008
- [10] G.R. Grimmett. *Percolation (Second edition)*. Springer-Verlag, 1999.
- [11] G. Grimmett, H. Kesten and Y. Zhang. Random walk on the infinite cluster of the percolation model. *Probab. Theory Rel. Fields*, 1(96), 1993.
- [12] G.F. Lawler, O. Schramm and W. Werner. Conformal restriction properties. The chordal case. *preprint*, 2002.
- [13] N. Madras and G. Slades. The self-avoiding walk *Birkhäuser*, 1993.
- [14] P. Mathieu and A.L. Piatnitski. Quenched invariant principles for random walks on percolation clusters. *Proc. R. Soc. A*, (463), 2007.
- [15] S. Rhode and O. Schramm. Basic properties of SLE *preprint*, 2001.
- [16] S. Smirnov. Conformal Invariance In Random Cluster Models. Holomorphic Fermions In The Ising Model. *arXiv :0708.0039v1*, 2007.
- [17] S. Smirnov. Critical percolation in the plane : Conformal invariance, Cardy’s formula, scaling limits. *R. Math. Acad. Sci. Paris*, 3(333), 2001.
- [18] S. Smirnov, W. Werner. Critical exponents for two-dimensional percolation. *Math. Res. Lett*, 8, 729-744, 2001.
- [19] C. N. Yang. The spontaneous magnetization of a two-dimensional Ising model *Physical Rev (2)*, 85 :808.816, 1952.