Théorèmes de préservation en théorie des modèles finis

David Duris

Présentation du thème de recherche
proposé et encadré par Arnaud Durand

Octobre 2006

Introduction

En théorie des modèles, on s'intéresse souvent aux liens entre syntaxe et sémantique. Les théorèmes de préservation en sont de très bonnes illustrations, puisqu'ils donnent des équivalences, concernant une requête, entre définissabilité dans une certaine logique (propriété syntaxique) et préservation par certaines opérations (propriété sémantique). Les méthodes utilisées pour établir de tels théorèmes en théorie des modèles classique ne sont pas applicables en théorie des modèles finis, l'exemple le plus criant étant peut-être que le théorème de compacité est faux si on se restreint aux structures finies. Il faut donc mettre en œuvre d'autres techniques. On fait intervenir la plupart du temps des arguments combinatoires.

Les théorèmes que l'on va exposer sont issus de [ADK04] et [ADG05]. On va montrer des théorèmes de préservation pour certaines classes de structures finies. Pour la préservation par homomorphisme, on va considérer les classes :

- de degré borné,
- de largeur d'arbre bornée.

Concernant les théorèmes de préservation par extension, on regardera les classes acycliques. Remarque : en fait, j'ai également présenter dans mon mémoire les classes excluant un mineur, les classes espacées et la classe des structures finies de largeur d'arbre bornée par n (pour tout $n \geq 2$), mais il y a trop de définition à introduire pour le présenter de manière abrégée.

Remarquons au passage que chaque classe a son propre intérêt étant donné que la préservation par une opération donnée ou la définissabilité sur une certaine classe ne permettent pas forcément de dire quelque chose sur d'autres classes.

Les méthodes développées dans le mémoire pour établir les théorèmes de préservation sont diverses : lemme de densité de Ajtai-Gurevich, localité au sens de Hanf, ... Mais elles ont en commun le fait qu'on s'intéresse aux modèles minimaux des requêtes considérées et à des propriétés combinatoires des différentes classes.

Avant de poursuivre, je tiens à remercier Arnaud Durand pour sa disponibilité, son amabilité et la qualité de ses conseils.

Conventions et notations

Dans tout ce qui suit, σ désigne une signature relationnelle (i.e. constituée uniquement de symboles de relations) finie et les structures considérées sont des σ-structures.

Pour toute structure $\mathcal{A}$, une sous-structure $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est une structure telle que $B \subset A$ et, pour tout symbole de relation de $R \in \sigma$, $R^{\mathcal{B}} \subset R^{\mathcal{A}}$. Pour tout ensemble $D \subset A$, la sous-structure $\mathcal{D}$

de $\mathcal{A}$ engendrée par D est la structure d'ensemble de base D et telle que, pour tout symbole de relation $R \in \sigma$, $R^{\mathcal{D}} = R^{\mathcal{A}} \cap D^t$ (où t désigne l'arité de R). Remarquons au passage que toute sous-structure n'est pas une structure engendrée par un sous-ensemble.

Pour toutes structures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ est une extension de $\mathcal{B}$ si $\mathcal{B}$ est la sous-structure de $\mathcal{A}$ engendrée par B, i.e. $B \subset A$ et l'interprétation de chaque relation $R \in \sigma$ pour les tuples d'éléments de B est la même dans $\mathcal{A}$ que dans $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{A}_1$, ..., $\mathcal{A}_n$ sont des structures, leur union disjointe $\mathcal{A}$ est une structure d'ensemble de base l'union disjointe des A_i et telle que, pour tout symbole de relation $R \in \sigma$ et tout $i \in \{1, ..., n\}$, $R^{\mathcal{A}}$ est interprétée sur la copie de A_i dans A par $R^{\mathcal{A}_i}$.

Une formule du premier ordre est dite *existentielle positive* si elle est obtenue à partir de formules atomiques en n'utilisant que des disjonctions, conjonctions et quantifications existentielles.

Une formule du premier ordre est dite *existentielle* si elle est obtenue à partir de formules atomiques et négations de formules atomiques en n'utilisant que des disjonctions, conjonctions et quantifications existentielles. On remarque donc qu'une formule existentielle positive est aussi existentielle, mais la réciproque est fausse.

Quand on parlera de graphe, cela sous-entendra graphe non orienté et sans boucle.

1 Quelques notions de base de théorie des modèles finis

1.1 Graphe de Gaifman et voisinages

La notion de graphe de Gaifman permet d'associer un graphe à toute structure. Cela nous permettra par la suite de faire de la combinatoire uniquement sur les graphes, et ce quelle que soit la signature σ considérée.

Définition 1.1. Pour toute structure $\mathcal{A}$, le *graphe de Gaifman* de $\mathcal{A}$ (noté $\mathcal{G}(\mathcal{A})$) est le graphe dont l'ensemble des sommets est A et dont les arêtes sont définies par :

$$\{a, b\} \text{ est une arête de } \mathcal{G}(\mathcal{A})$$

$$\text{ssi}$$

$$a \neq b \text{ et } \exists R \in \sigma \ \exists a_1, ..., a_t \in A \text{ tels que } a, b \in \{a_1, ..., a_t\} \text{ et } \mathcal{A} \models Ra_1...a_t.$$

On remarque en particulier que le graphe de Gaifman d'un graphe est lui-même et que le graphe de Gaifman d'un graphe orienté est le graphe non orienté sous-jacent.

Définition 1.2. Soient σ une signature relationnelle, $\mathcal{A}$ une σ-structure, $a \in A$ et $r \geq 0$. Le *r-voisinage* de a (noté $N(a, r)$) est la sous-structure de $\mathcal{A}$ engendrée par l'ensemble des éléments de A à une distance inférieure ou égale à r de a dans $\mathcal{G}(\mathcal{A})$. Si $\overline{a} = (a_1, ..., a_n)$, on définit

$$N(\overline{a}, r) \quad := \quad \bigcup_{i=1}^{n} N(a_i, r).$$

Quand on parlera de la distance entre deux points x et y, cela sous-entendra la distance dans le graphe de Gaifman (notée $d(x, y)$).

1.2 Jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé

On commence par définir le rang de quantification d'une formule. Cela correspond grosso modo à la hauteur de l'arbre de décomposition de la formule mais où l'on ne compte que les noeuds indicés par un quantificateur. Plus précisément :

Définition 1.3. Pour toute formule du premier ordre, on définit par induction le *rang de quantification* (noté qr) par

$$\begin{array}{lcll}
qr(\phi) & := & 0 & \text{si } \phi \text{ est atomique,} \\
qr(\neg\phi) & := & qr(\phi), & \\
qr(\phi_1 \ \alpha \ \phi_2) & := & \max(qr(\phi_1, \phi_2)) & \text{si } \alpha \text{ est un connecteur logique binaire,} \\
qr(\exists x \phi) & := & 1 + qr(\phi) & \text{et} \\
qr(\forall x \phi) & := & 1 + qr(\phi) & \text{pour toute variable } x.
\end{array}$$

Pour toutes structures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{A} \equiv_k \mathcal{B}$ le fait que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfont les mêmes formules de rang de quantification $\leq k$.

On introduit maintenant un concept important qui permet de caractériser la relation $\equiv_k$. Ce sont les jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé.

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux structures, $\overline{a} = (a_1, ..., a_n) \in A^n$ et $\overline{b} = (b_1, ..., b_n) \in B^n$. Le jeu d'Ehrenfeucht-Fraïssé à m coups (noté $G_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$) fait intervenir deux joueurs (I et II). Au i-ème coup ($1 \leq i \leq m$), I choisit un élément $c_i \in A$ puis II choisit un élément $d_i \in B$, ou bien I choisit un élément $d_i \in B$ puis II choisit un élément $c_i \in A$.

Définition 1.4. On dit que II *gagne* $G_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$ si quels que soient les choix faits par I, il existe une suite de choix pour II telle que $\overline{ac} \longmapsto \overline{bd}$ soit un isomorphisme partiel, i.e. la fonction

$$\begin{array}{rcccl} f \ : \ \{a_1, ..., a_n, c_1, ..., c_m\} & \longrightarrow & \{b_1, ..., b_n, d_1, ..., d_m\} & & \\ a_i & \longmapsto & b_i & & \text{(pour tout } 1 \leq i \leq n) \\ c_j & \longmapsto & d_j & & \text{(pour tout } 1 \leq j \leq m) \end{array}$$

est une bijection vérifiant

$$\forall R \in \sigma \ \forall \overline{e} \in \{a_1, ..., a_n, c_1, ..., c_m\}^t \quad \mathcal{A} \models R\overline{e} \text{ ssi } \mathcal{B} \models Rf(\overline{e}).$$

On remarque que si $n = 0$, cela signifie qu'on n'ajoute pas de constante au langage σ avant de faire le jeu (et dans ce cas, on adopte la notation $G_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$).

Le cas où II gagne le jeu pour $m = 0$ signifie juste que $\overline{a} \longmapsto \overline{b}$ est un isomorphisme partiel.

Le théorème suivant a été montré dans [Ehr61].

Théorème 1.5 (Ehrenfeucht). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux structures, $\overline{a} \in A^n$, $\overline{b} \in B^n$ et $m \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) II gagne $G_m(\mathcal{A}, \overline{a}, \mathcal{B}, \overline{b})$.

(2) $\overline{a}$ et $\overline{b}$ satisfont les mêmes formules de rang de quantification $\leq m$, i.e. pour tout $\phi(\overline{x})$ tel que $qr(\phi) \leq m$, on a $\mathcal{A} \models \phi(\overline{a})$ ssi $\mathcal{B} \models \phi(\overline{b})$, i.e. $(\mathcal{A}, \overline{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \overline{b})$.

2 Modèles minimaux, densité et préservation par homomorphisme

On commence ici par définir les modèles minimaux et on remarque que l'existence d'un nombre fini de tels modèles dans une classe donnée (i.e. de l'existence d'un majorant pour leur taille) permet de caractériser le fait d'être définissable par une formule existentielle positive. Puis on montre qu'on peut en effet majorer ce nombre dans certains cas grâce à un argument combinatoire. Cela nous fournit alors un critère pour montrer qu'une classe vérifie le théorème de préservation par homomorphisme. En appliquant une instance simple de ce critère aux structures finies de degré borné, on obtient un premier théorème de préservation.

2.1 Quelques définitions et remarques importantes

Cette section est destinée à introduire plusieurs notions essentielles pour la suite. On montre notamment que les modèles minimaux nous apportent une caractérisation de la définissabilité par une formule existentielle positive.

Définition 2.1. Un *homomorphisme* d'une structure $(\mathcal{A}, \overline{a})$ vers une structure $(\mathcal{B}, \overline{b})$ est une fonction h de A dans B qui envoie $\overline{a}$ sur $\overline{b}$ et telle que pour tout $R \in \sigma$ et $(c_1, ..., c_t) \in A^t$

$$\mathcal{A} \models Rc_1...c_t \Longrightarrow \mathcal{B} \models Rh(c_1)...h(c_t).$$

Citons les faits suivants, qui montrent que la notion d'homomorphisme permet de traduire certaines propriétés :

- Un graphe G contient un chemin (resp. un cycle) de longueur n ssi il existe un homomorphisme du chemin (resp. du cycle) de longueur n vers G.
- Un graphe G est n-coloriable ssi il existe un homomorphisme de G vers K_n, le graphe complet à n sommets.

Définition 2.2. Un *isomorphisme* de $(\mathcal{A}, \overline{a})$ vers $(\mathcal{B}, \overline{b})$ est une bijection f de A sur B qui envoie $\overline{a}$ sur $\overline{b}$ et telle que pour tout $R \in \sigma$ et $(c_1, ..., c_t) \in A^t$

$$\mathcal{A} \models Rc_1...c_t \Longleftrightarrow \mathcal{B} \models Rf(c_1)...f(c_t).$$

D'une certaine manière, dire que deux structures sont isomorphes (i.e. qu'il existe un isomorphisme de l'une vers l'autre) signifie que ce sont les mêmes structures modulo un renommage de leurs éléments.

Définition 2.3. Soit $\mathcal{C}$ une classe de structures. Une *requête booléenne* sur $\mathcal{C}$ est une sous-classe de $\mathcal{C}$ close par isomorphisme. On notera pour toute $\mathcal{E}$ dans cette sous-classe $q(\mathcal{E}) = 1$ (et dans ce cas, on dira que $\mathcal{E}$ est un modèle de q) et pour les autres $q(\mathcal{E}) = 0$.

Définition 2.4. Une requête booléenne est préservée par homomorphisme sur $\mathcal{C}$ si, à chaque fois qu'il existe un homomorphisme de $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ vers $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$ et que $q(\mathcal{A}) = 1$, on a $q(\mathcal{B}) = 1$.

Donnons quelques exemples pour se familiariser avec la notion de préservation par homomorphisme. Sur la classe des graphes, les requêtes "contenir un cycle de taille n" et "contenir une clique de taille n" sont préservées par homomorphisme. Par contre, les requêtes "être connexe" et "être acyclique" ne le sont pas. Ces deux derniers exemples sont des requêtes non définissables au premier ordre, mais on peut aussi citer la requête "il existe un ensemble dominant de taille n", qui est exprimable au premier ordre par l'énoncé suivant :

$$\exists x_1 ... \exists x_n \forall y \left(\bigvee_{i=1}^{n} y = x_i \vee \bigvee_{i=1}^{n} Eyx_i \right),$$

et qui n'est pas non plus préservée par homomorphisme.

Avant de poursuivre, précisons ce qu'on entend par "théorème de préservation". C'est l'équivalence, pour des requêtes, entre le fait d'être préservée par une opération donnée (e.g. par extension ou par homomorphisme) et celui d'être définissable dans une certaine logique (e.g. la logique existentielle ou existentielle positive du premier ordre).

Rappelons la définition de la "définissabilité dans une certaine logique".

Définition 2.5. Soient L une logique, $\mathcal{C}$ une classe de structures et q une requête. On dit que q est *L-définissable* sur $\mathcal{C}$ (ou définissable sur $\mathcal{C}$ par une formule de L) s'il existe un énoncé ϕ (i.e. une formule close) tel que

$$\mathcal{A} \models \phi \text{ ssi } q(\mathcal{A}) = 1.$$

Faisons une remarque générale pour le cas des théorèmes de préservation par homomorphisme. On a toujours l'implication suivante (on la montre par induction sur les formules du premier ordre existentielles positives) :

Théorème 2.6. *Sur toute classe de structures, si une requête est définissable par une formule du premier ordre existentielle positive, alors elle est préservée par homomorphisme.*

Pour terminer, on donne la définition d'un modèle minimal et on fait une remarque importante pour la suite.

Définition 2.7. Soit $\mathcal{C}$ une classe de structures, $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ et q une requête booléenne sur $\mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{A}$ est un *modèle minimal* de q dans $\mathcal{C}$ si $q(\mathcal{A}) = 1$ et s'il n'existe pas de sous-structure stricte $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ telle que $q(\mathcal{B}) = 1$.

Remarque 2.8. En vertu d'un résultat classique de théorie des modèles finis, on montre la définissabilité au premier ordre existentiel positif en montrant qu'il existe une borne sur la taille de tout modèle minimal.

2.2 Lemme de densité de Ajtai et Gurevich

Nous allons nous intéresser aux modèles minimaux des requêtes booléennes préservées par homomorphisme et définissables au premier ordre. La première étape consiste à montrer qu'ils vérifient une propriété de densité. Et celle-ci nous permettra dans certains cas de majorer le nombre de modèles minimaux. Ce résultat a été présenté pour la première fois dans [AG94].

Définition 2.9. Soit G un graphe. Un sous-ensemble D de G est dit *l-dispersé* si tout couple $(a,b) \in D^2$ d'éléments distincts vérifie $N(a,l) \cap N(b,l) = \emptyset$.

On va s'intéresser au fait, pour une structure $\mathcal{A}$ et des entiers d et m, de contenir un ensemble d-dispersé de taille m. Intuitivement, une structure vérifiant cette propriété est *éparse* (surtout si d et m sont grands) et une structure ne la satisfaisant pas est au contraire *dense*. Le lemme de densité de Ajtai et Gurevich dit que les modèles minimaux d'une requête booléenne définissable au premier ordre et préservée par homomorphisme sont denses (pour des entiers d et m suffisamment grands). Il dit même qu'ils restent denses si on leur enlève des points au préalable.

Lemme 2.10 (Ajtai-Gurevich). *Soit $\mathcal{C}$ une classe de structures finies close par sous-structure et union disjointe. Soit q une requête booléenne définissable au premier ordre et préservée par homomorphisme sur $\mathcal{C}$. Alors pour tout $s \in \mathbb{N}$, il existe $d \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $\mathcal{A}$ modèle minimal de q dans $\mathcal{C}$ et tout ensemble $B \subset A$ de taille $\leq s$, $\mathcal{G}(\mathcal{A}) \setminus B$ ne contient pas d'ensemble d-dispersé de taille m (où $\mathcal{G}(\mathcal{A}) \setminus B$ désigne le sous-graphe de $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ engendré par $A \setminus B$).*

2.3 Théorème de préservation par homomorphisme pour les classes de degré borné

On a vu l'essentiel dans les sections précédentes pour démontrer un premier théorème de préservation par homomorphisme, celui pour les classes de structures finies de degré borné. Il nous reste juste à faire quelques remarques préliminaires.

Définition 2.11. On dit qu'une classe de structures est de *degré borné* s'il existe un entier k tel que pour tout $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ le graphe de Gaifman $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ est de degré borné par k, i.e. pour tout $a \in A$,

$$| \{ b \in A \mid \exists R \in \sigma \ \exists a_1 ... a_t \ \mathcal{A} \models R a_1 ... a_t \text{ et } a, b \in \{a_1, ..., a_t\} \ \} \mid \quad \leq \quad k.$$

La propriété suivante (qui est une conséquence du lemme de densité de Ajtai et Gurevich) nous éclaire sur ce qu'on va chercher à faire pour obtenir l'autre implication des théorèmes de préservation par homomorphisme (dans cette section mais également dans les deux prochaines parties). D'une façon intuitive, elle dit que, pour montrer qu'une requête booléenne q définissable au premier ordre et préservée par homomorphisme est définissable au premier ordre existentiel positif, il suffit de montrer qu'il existe un entier s tel qu'au-delà d'une certaine taille les modèles de q sont tous éparses (même en enlevant s points) et donc qu'ils ne peuvent pas être minimaux.

Proposition 2.12. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de structures finies ayant les propriétés suivantes :*

- *$\mathcal{C}$ est close par sous-structure et par union disjointe.*
- *Il existe un $s \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $d, m \in \mathbb{N}$ il existe un $N_{d,m} \in \mathbb{N}$ tel que tous les $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ contenant plus de $N_{d,m}$ éléments contiennent un sous-ensemble B d'au plus s éléments tel que $\mathcal{G}(\mathcal{A}) \setminus B$ contient un ensemble d-dispersé de taille m.*

Alors on a que, sur $\mathcal{C}$, toute requête booléenne définissable au premier ordre et préservée par homomorphisme est définissable par un énoncé du premier ordre existentiel positif.

Voici justement un cas où l'on remplit une instance des conditions précédentes (celle où $s = 0$) :

Lemme 2.13. *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{D}$ une classe de graphes tous de degré majoré par k. Alors pour tous $d, m \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que dans tout $G = (V, E) \in \mathcal{D}$ vérifiant $|V| > N$ il y ait un sous-ensemble d-dispersé de taille m.*

Démonstration. On pose $N := m(2d + 1)k^{2d}$. Trouvons pour tout $G = (V, E) \in \mathcal{D}$ vérifiant $|V| > N$ un sous-ensemble $\{x_1, ..., x_m\}$ d-dispersé de taille m. Soit donc $G = (V, E) \in \mathcal{D}$ tel que $|V| > N$. On choisit x_1 quelconque dans V. Son $2d$-voisinage est de taille au plus $(2d+1)k^{2d}$ car, puisque G est de degré borné par k, il y a au plus k^{2d} sommets à distance exactement égale à l de x_1 (pour tout $l \in \{0, ..., 2d\}$). Soit G_2 le sous-graphe de G engendré par V privé du $2d$-voisinage de x_1. On choisit x_2 quelconque dans G_2. Puis on considère G_3 le sous-graphe de G engendré par V privé de l'union des $2d$-voisinages de x_1 et de x_2, et on choisit x_3 quelconque dans G_3. Ainsi de suite on définit G_i comme le sous-graphe de G engendré par V privé de l'union des $2d$-voisinages des $x_1, ..., x_{i-1}$. On peut continuer jusqu'à choisir x_m car $|G_i| \geq (m - i + 1)(2d + 1)k^{2d}$ pour tout $i \in \{2, ..., m\}$. Et par définition des G_i, $\{x_1, ..., x_m\}$ est bien d-dispersé. □

Conséquence :

Théorème 2.14. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de structures finies de degré borné qui est close par sous-structure et union disjointe. Alors toute requête définissable sur $\mathcal{C}$ par une formule du premier ordre et préservée par homomorphisme est définissable par une formule du premier ordre existentielle positive.*

3 Théorème de préservation par homomorphisme pour les classes de largeur d'arbre bornée

3.1 Décomposition en arbre et largeur d'arbre

On commence par donner les définitions nécessaires à la compréhension de la suite de cette partie.

Définition 3.1. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une *décomposition en arbre* de G est la donnée d'un couple (X, T), où $X = \{X_i,\ i \in I\}$ est une famille de sous-ensembles non vides de V et T est un arbre indicé par I, tel que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :
- Pour toute arête $\{v, w\} \in E$, il existe un $i \in I$ tel que v et w sont dans X_i.
- Pour tout $u \in V$, l'ensemble des $i \in I$ tels que $u \in X_i$ forme un sous-graphe de T connexe non vide.

La *largeur* d'une décomposition en arbre $(\{X_i,\ i \in I\}, T)$ est égale à $\max_{i \in I} |X_i| - 1$.

La *largeur d'arbre* de G (notée $tw(G)$) est égale à la plus petite largeur parmi toutes celles des décompositions en arbre de G.

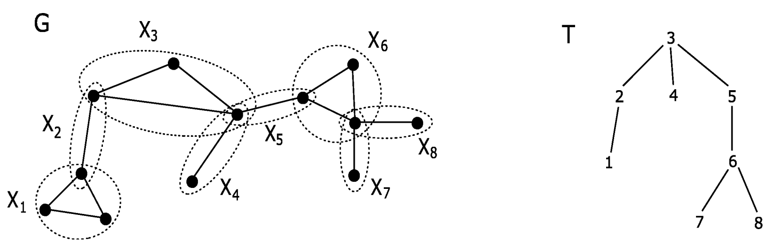

FIG. 1 – Un exemple de décomposition en arbre.

Par exemple, on voit facilement que la largeur d'arbre d'un arbre est 1, celle du graphe complet à n éléments est $n - 1$ et, plus généralement, la largeur d'arbre d'un graphe contenant une clique de taille n est supérieure ou égale à $n - 1$.

Définition 3.2. Une classe $\mathcal{C}$ de structures finies est une classe de structures de largeur d'arbre bornée s'il existe un entier qui majore toutes les largeurs d'arbres des graphes de Gaifman des éléments de $\mathcal{C}$. Et dans ce cas, on note

$$tw(\mathcal{C}) \quad := \quad \max\{tw(\mathcal{G}(\mathcal{A})),\ \mathcal{A} \in \mathcal{C}\}.$$

Faisons quelques remarques concernant les structures finies de largeur d'arbre bornée afin de motiver un peu leur étude. Citons déjà le fait qu'étant donnés un graphe G et un entier k, le problème de déterminer si $tw(G) \leq k$ est NP-complet. Et il est intéressant de noter qu'il devient linéaire en la taille de G lorsque k est fixé. Un autre fait remarquable est qu'un grand nombre de problèmes difficiles dans le cas général deviennent polynomiaux quand on se restreint à des structures finies dont on connaît une décomposition en arbre de largeur bornée. C'est le cas par exemple des problèmes NP-complets suivants : CHEMIN HAMILTONIEN (i.e. étant donné un graphe, trouver un chemin passant une et une seule fois par chacun des sommets) et ENSEMBLE INDEPENDANT MAXIMAL (i.e. étant donné un graphe $G = (V, E)$, trouver un $W \subset V$ de taille maximale tel que $\forall v, w \in W\ (v, w) \notin E$).

3.2 Combinatoire sur les graphes de largeur d'arbre bornée

Le lemme combinatoire suivant (issu de [ADK04]) permet aux classes de largeur d'arbre bornée de remplir les conditions de la proposition 2.12. Comme corollaire on obtiendra donc le théorème de préservation par homomorphisme pour les strucutres finies de largeur d'arbre bornée.

Lemme 3.3. *Soient $k \geq 1$ et $\mathcal{C}$ une classe de graphes telle que $tw(\mathcal{C}) < k$. Alors pour tous $d, m \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que tous les graphes $G = (V, E) \in \mathcal{D}$ vérifiant $|V| > N$ contiennent un sous-ensemble B de taille au plus k tel que $G \setminus B$ ait un sous-ensemble d-dispersé de taille m.*

Théorème 3.4. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de structures finies de largeur d'arbre bornée qui est close par sous-structure et union disjointe. Alors, sur la classe $\mathcal{C}$, toute requête définissable au premier ordre et préservée par homomorphismes est définissable par un énoncé du premier ordre existentiel positif.*

4 Théorème de préservation par extension pour les classes acycliques

Les théorèmes de préservation par extension présentés dans cette partie sont issus de [ADG05]. De la même manière que pour la préservation par homomorphisme, on va chercher à minorer la taille des modèles minimaux. Précisons qu'on va considérer une définition légèrement différente des modèles minimaux. Un modèle $\mathcal{A}$ d'une requête q sera minimal si aucune de ses sous-structures *engendrées* strictes n'est un modèle de q. La méthode utilisée pour minorer leur taille va être de montrer, qu'au-delà d'une certaine taille, tout modèle de la requête q considérée possède une sous-structure engendrée stricte et une extension qui concordent pour q. On y parvient en utilisant entre autres le théorème de Hanf.

4.1 Théorème de Hanf

Cette section a pour but de présenter le théorème de Hanf, qui dit à peu de choses près que, si deux structures finies ont les mêmes voisinages de taille 3^m, alors elles vérifient les mêmes formules de rang de quantification $\leq m$. C'est un théorème classique de théorie des modèles finis. Il est souvent utilisé pour montrer qu'une requête booléenne n'est pas définissable au premier ordre.

Afin de pouvoir énoncer le théorème de manière assez simple, on a besoin de donner des définitions.

Définition 4.1. On appelle *type d'isomorphisme* toute classe d'équivalence pour la relation entre structures "être isomorphes" (notée $\cong$).

Si $\mathcal{D}$ est une structure et ι un type d'isomorphisme tel que $\mathcal{D} \in \iota$, on dit que $\mathcal{D}$ *est de type* ι.

Pour toute structure $\mathcal{A}$, $a \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, le *type de n-voisinage* de a désigne le type d'isomorphisme de $(N(a,n), a)$.

Théorème 4.2 (Hanf). *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux structures finies, $m \in \mathbb{N}$ et e un majorant de l'ensemble des tailles des 3^m-voisinages de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Supposons que, pour tout type d'isomorphisme ι, on ait toujours au moins l'une des deux conditions suivantes :*

(1) $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont le même nombre d'éléments dont le type de 3^m-voisinage est ι.

(2) $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont toutes les deux plus de $m \cdot e$ éléments dont le type de 3^m-voisinage est ι.

Alors $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$.

4.2 Équivalence logique pour les structures finies acycliques

On commence par remarquer que l'implication suivante se montre facilement par induction. C'est donc l'implication réciproque qui nous intéressera par la suite pour montrer les théorèmes de préservation par extension.

Théorème 4.3. *Sur toute classe de structures, si une requête est définissable par une formule du premier ordre existentielle, alors elle est préservée par extension.*

Remarque 4.4. Comme dans le cas de la préservation par homomorphisme, on sait qu'il suffit de montrer qu'il existe une borne sur la taille des modèles minimaux pour avoir la définissabilité au premier ordre existentiel.

Voici une conséquence de cette remarque :

Proposition 4.5. *Soient $\mathcal{C}$ une classe de structures finies close par sous-structure et q une requête booléenne sur $\mathcal{C}$ définissable au premier ordre par un énoncé ψ et préservée par extension. Supposons qu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que, quelle que soit $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ de taille $\geq N$, il existe une sous-structure engendrée stricte $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$ et une extension $\mathcal{E}$ de $\mathcal{A}$ telles que $\mathcal{S} \in \mathcal{C}$, $\mathcal{E} \in \mathcal{C}$ et*

$$\mathcal{S} \models \psi \quad \text{ssi} \quad \mathcal{E} \models \psi.$$

Alors q est définissable sur $\mathcal{C}$ par un énoncé du premier ordre existentiel.

On va appliquer ce critère aux structures finies acycliques, c'est-à-dire aux structures finies dont le graphe de Gaifman est acyclique. Remarquons tout de suite que l'on peut supposer que σ ne contient que des relations unaires et binaires. En effet, si une structure $\mathcal{A}$ est telle que $R^{\mathcal{A}}$ est non vide et R une relation n-aire avec $n \geq 3$, alors elle n'est pas acyclique car son graphe de Gaifman contient entre autres le cycle formé par les sommets a_1, ..., a_n où $(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathcal{A}}$. Supposons donc dans cette section que $\sigma = \{U_1, ..., U_u, B_1, ..., B_b\}$, où les $(U_i)_{i=1}^{u}$ sont des relations unaires et les $(B_b)_{i=1}^{b}$ des relations binaires.

Pour montrer que les conditions du critère peuvent être remplies pour les structures finies acycliques, on procède en plusieurs étapes. On commence par le montrer pour les structures finies dont le graphe de Gaifman est un chemin, puis celles dont le graphe de Gaifman est de degré 2 (i.e. une union disjointe de chemins). En faisant un raisonnement similaire mais un peu plus complexe, on montre le résultat pour les structures finies acycliques de degré borné. Puis, par une méthode d'"élagage" (permettant de traiter le cas des structures contenant un point de grand degré), on montre le cas général, i.e. pour toute requête booléenne q définissable au premier ordre, on trouve un entier N tel que toute structure finie acyclique de taille $\geq N$ possède une sous-structure engendrée stricte et une extension qui concordent pour q. En fait, on montre même qu'elles sont équivalentes pour $\equiv_m$, où $m = qr(\psi)$ et ψ définit q.

Lemme 4.6. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que toute structure dont le graphe de Gaifman est un chemin de taille $\geq N$ possède une sous-structure engendrée stricte et une extension qui sont équivalentes pour $\equiv_m$.*

Démonstration. En prenant un N suffisamment grand, on montre que, pour toute structure $\mathcal{A}$ dont le graphe de Gaifman est un chemin de taille supérieure à N, on peut trouver un sous-chemin $[a,b]$ (avec $a,b \in A$ et $d(a,b) > 4^m$) tel que la sous-structure de $\mathcal{A}$ engendrée par $A\backslash]a,b[$

$$\mathcal{S} \quad := \quad \mathcal{A}\backslash]a,b[$$

et

$$\mathcal{E} \quad := \quad \mathcal{A} \oplus [a,b]$$

(où $\oplus$ désigne l'union disjointe) soient équivalentes pour $\equiv_m$. Il suffit de prendre N assez grand pour que

$$(N(a, 2\cdot 3^m), a) \quad \cong \quad (N(b, 2\cdot 3^m), b)$$

et que les éléments de $]a,b[$ ont tous un type de 3^m-voisinage très représenté dans $\mathcal{A}$ (plus de $m \cdot e$ fois, où $e := 2\cdot 3^m + 1$ majore la taille de tout 3^m-voisinage dans $\mathcal{A}$). Avec N, a et b ainsi, on a bien $\mathcal{S} \equiv_m \mathcal{E}$. Il suffit de vérifier que les conditions du théorème de Hanf sont bien remplies. (Cf. figure 2.) $\square$

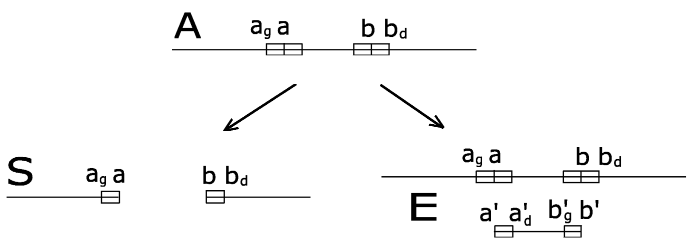

FIG. 2 – Les $(2\cdot 3^m)$-voisinages de a et b sont isomorphes, et les points du segment $[a,b]$ ont tous un type de 3^m-voisinage très représenté dans $\mathcal{A}$. On a donc $\mathcal{S} \equiv_m \mathcal{E}$.

Quitte à agrandir encore notre N, on peut obtenir le même résultat pour les unions disjointes de chemins (car alors on peut trouver, soit beaucoup de petits chemins isomorphes et en enlever un pour obtenir une sous-structure engendrée stricte qui est équivalente pour $\equiv_m$, soit un chemin très long et dans ce cas on lui applique le lemme précédent) :

Lemme 4.7. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que toute structure acyclique de degré borné par 2 et de taille $\geq N$ possède une sous-structure engendrée stricte et une extension qui sont équivalentes pour $\equiv_m$.*

On peut généraliser le raisonnement précédent à l'ensemble des structures finies acycliques de degré $\leq d$ (pour tout $d \geq 2$). Ce cas contient le cas précédent, mais le fait d'avoir fait le cas $d = 2$ en détails nous permet de comprendre plus facilement la généralisation. Il suffit de remplacer les sous-segments par des sous-arbres (cf. figure 3).

Lemme 4.8. *Pour tous $d \geq 2$ et $m \in \mathbb{N}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que toute structure acyclique de degré borné par d et de taille $\geq N$ possède une sous-structure engendrée stricte et une extension qui sont équivalentes pour $\equiv_m$.*

Remarque 4.9. Par le critère de la proposition 4.5, le théorème de préservation par extension est donc vérifié pour les classes de structures finies acycliques de degré borné qui sont closes par sous-structure et union disjointe.

On peut maintenant passer au théorème principal de cette partie. Tout ce qu'il nous reste à faire est de montrer que, dans toute classe acyclique, les structures dont le degré n'est pas inférieur à un certain entier possèdent elles aussi une sous-structure engendrée stricte et une extension qui sont équivalentes pour $\equiv_m$. Pour le montrer, on se donne un d suffisamment grand puis on distingue deux cas. Pour les éléments de cette classe qui sont de degré borné par d, on applique le lemme précédent. Pour les autres, on coupe une branche reliée à un point de grand degré (supérieur à d) et on utilise un argument de jeu d'Ehrenfeucht-Fraïssé.

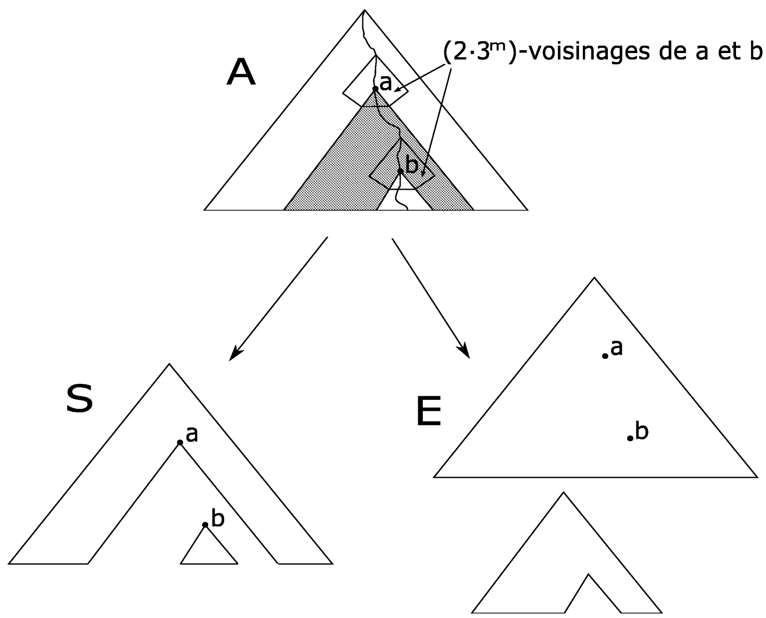

FIG. 3 – Les $(2 \cdot 3^m)$-voisinages de a et b sont isomorphes, et les points de la partie grisée ont tous un type de 3^m-voisinage très représenté dans $\mathcal{A}$. On a donc $\mathcal{S} \equiv_m \mathcal{E}$.

Théorème 4.10. *Soit $\mathcal{C}$ une classe de structures finies acycliques qui est close par sous-structure et union disjointe. Alors, sur $\mathcal{C}$, toute requête booléenne définissable au premier ordre et préservée par extension est définissable au premier ordre existentiel.*

5 Contre-exemples

Dans cette partie, on donne un exemple de classe de structures finies où le théorème de préservation par extension n'est pas vérifié. Puis on illustre le fait que la condition de définissabilité au premier ordre utilisée dans les théorèmes de préservation que l'on a vus est nécessaire.

5.1 Préservation par extension et graphes planaires

Le théorème de préservation par extension n'est pas vérifié sur la classe des graphes planaires. Le contre-exemple de cette section en est l'illustration. En effet, on montre que, sur la classe des graphes planaires, il existe une requête booléenne :
(1) définissable au premier ordre,
(2) préservée par extension
(3) et qui n'est pas définissable au premier ordre existentiel positif.

On pose comme requête booléenne sur la classe des graphes planaires

q := "il existe deux sommets différents a et b tels que
il y a un sommet qui est relié à a et b
et tout sommet qui est relié à a et b a deux autres voisins
et ceux-ci sont aussi reliés à a et b".

On vérifie (1) et (2) facilement. Pour (3), il suffit de montrer que q a une infinité de modèles minimaux. Les diamants de taille n (pour tout $n \geq 5$) conviennent (cf. figure 4 pour un exemple de diamant) car, sur la classe des graphes planaires, la requête q signifie en fait "contenir un diamant".

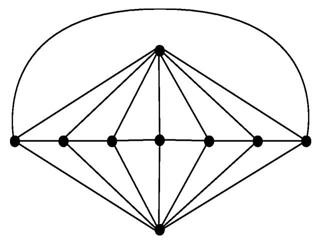

FIG. 4 – Un diamant de taille 9.

5.2 Requêtes non définissables au premier ordre

Cette section a pour objet de montrer que la condition "la requête est définissable au premier ordre" est nécessaire dans tous les théorèmes de préservation que l'on a exposé. Pour cela, on donne, pour chaque classe de structures que l'on a considérées, des exemples de requêtes ayant une infinité de modèles minimaux et préservées par homomorphisme ou extension (en fonction du théorème de préservation qui nous intéresse).

Dans les classes suivantes, la requête "contenir un cycle" est préservée par homomorphisme et les cycles de longueur n (pour tout $n \geq 1$) sont des modèles minimaux :

- les classes de degré borné,
- les classes de largeur d'arbre bornée.

Pour voir que les cycles de taille n sont de largeur d'arbre bornée (par 2 aussi), supposons sans perte de généralité que les sommets du cycle soient nommés $\{s_1, ..., s_n\}$. Puis on pose, pour tout $i \in \{1, ..., n-2\}$, $X_i := \{s_1, s_{i+1}, s_{i+2}\}$ et T le chemin reliant 1 à 2, 2 à 3, ..., et $n-3$ à $n-2$.

Pour le cas des classes de structures finies acycliques et la préservation par extension, on considère par exemple la requête q :="contenir une tige étoilée", où une tige étoilée désigne, pour tout $n \geq 1$, un chemin de taille n tel que chaque extrémité soit reliée à n autres sommets (cf. figure 5 pour le cas $n = 5$). Toutes les tiges étoilées (pour n parcourant $\mathbb{N}^*$) sont des modèles minimaux de q (car aucune tige étoilée n'a une autre tige étoilée qu'elle même comme sous-structure engendrée).

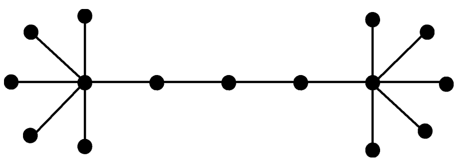

FIG. 5 – Un modèle minimal (pour $n = 5$) de la requête "contenir une tige étoilée".

Il est intéressant de remarquer qu'on est assurés du fait que les requêtes considérées ci-dessus ne sont pas définissables au premier ordre, car sinon cela contredirait les théorèmes de préservation. Cette observation nous fournit donc un critère pour établir la non définissabilité au premier ordre de certaines requêtes.

Références

[ADG05] A. Atserias, A. Dawar, and M. Grohe. Preservation under extensions on well-behaved finite structures. In *Proceedings of the 32nd international colloquium on automata, languages and programming (ICALP'05)*, number 3580 in Lecture notes in computer science, pages 1437–1450. Springer Verlag, 2005.

[ADK04] A. Atserias, A. Dawar, and P. G. Kolaitis. On preservation under homomorphisms and unions of conjunctive queries. In *Proceedings of the 23rd ACM symposium on principles of database systems*, 2004.

[AG94] M. Ajtai and Y. Gurevich. Datalog vs first-order logic. *Journal of computer and system sciences*, 49(3) :562–588, 1994.

[AG97] N. Alechina and Y. Gurevich. Syntax vs semantics on finite structures. In G. Rozenberg et A. Salomaa J. Mychielski, editor, *Structures in logic and computer science*, pages 14–33. Springer Verlag, 1997.

[Bod93] H. L. Bodlaender. A tourist guide through treewidth. *Acta cybernetica*, 11 :1–21, 1993.

[CL03a] R. Cori and D. Lascar. *Logique mathématique*, volume 1. Dunod, 2003.

[CL03b] R. Cori and D. Lascar. *Logique mathématique*, volume 2. Dunod, 2003.

[Ehr61] A. Ehrenfeucht. An application of games to the completeness problem for formalized theories. *Fundamenta mathematicae*, 49 :129–141, 1961.

[ER60] P. Erdos and R. Rado. Intersection theorems for systems of sets. *Journal of London mathematical society*, 35 :85–90, 1960.

[Gai82] H. Gaifman. On local and nonlocal properties. In J. Stern, editor, *Proceedings of the Herbrand symposium, Logic colloquium '81*, pages 105–135. North Holland, 1982.

[GRS90] R. Graham, B. Rothschild, and J. Spencer. *Ramsey theory*. Wiley, 1990.

[Gur84] Y. Gurevich. Toward logic tailored for computational complexity. In M. M. Richter et al., editor, *Computation and proof theory*, number 1104 in Springer lecture notes in mathematics, 1984.

[Juk01] S. Jukna. *Extremal combinatorics with applications in computer science*. Springer Verlag, 2001.

[Ros05] B. Rossman. Existential positive types and preservation under homomorphisms. In *Proceedings of the 20th IEEE Symposium on logic in computer science*, pages 467–476, 2005.

[Tai59] W. Tait. A counterexample to a conjecture of scott and suppes. *Journal of symbolic logic*, 24 :15–16, 1959.