Uniformisation de surfaces compactes

Mémoire de première année

Gustave Emprin et Kevin Löser
Sous la direction de Colin Guillarmou et Sergiu Moroianu

28 juin 2011

Table des matières

Résumé

Le but de ce mémoire est d'exposer et de fournir une preuve du théorème d'uniformisation des surfaces connexes, compactes et orientables, affirmant que sur une surface vérifiant ces trois propriétés, toute métrique riemannienne est conformément équivalente à une métrique de courbure constante égale à 0, 1, ou -1. Dans une première partie, nous exposerons les notions de géométrie riemannienne requises pour donner un sens à l'énoncé. Ensuite, nous donnerons une preuve du théorème de Gauss-Bonnet, qui relie une propriété géométrique d'une surface (sa courbure) à une de ses propriétés topologiques (sa caractéristique d'Euler), et auquel nous aurons plusieurs fois recours dans la preuve de l'uniformisation. Dans une troisième partie, nous démontrerons le théorème d'uniformisation, en se ramenant à la résolution d'une équation aux dérivées partielles non linéaire. La partie la plus ardue de la résolution concernera les surfaces de genre supérieur à 2, et nécessitera de raisonner sur les espaces de Sobolev d'une surface. Enfin, en dernière partie, nous donnerons un aperçu de l'uniformisation

dans le cas où les surfaces ne sont plus compactes. Ce sera l'occasion d'énoncer le théorème de Poincaré-Koebe.

Nous remercions Colin Guillarmou et Sergiu Moroianu pour nous avoir proposé l'idée de ce sujet, pour leur sympathie ainsi que pour leurs conseils précieux.

Première partie

Quelques éléments de géométrie riemannienne

1 Fibrés

DÉFINITION : Soit X une variété C^∞ de dimension n et munie d'un atlas $(\phi_i : U_i \subseteq X \to U_i' \subseteq \mathbb{R}^n)_{i\in I}$. Un *fibré vectoriel réel* de rang k et de base X est la donnée d'une variété C^∞ E, d'une surjection $\pi : E \to X$ et de difféomorphismes $(\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i' \times \mathbb{R}^k)_{i\in I}$ tels que les changements de cartes $\Phi_i\Phi_j^{-1}$ soient C_∞, $\mathbb{R}$-linéaires en la seconde variable et tels que $\forall i, pr_1 \circ \Phi_i = \phi_i \circ \pi$ Les difféomorphismes Φ_i sont appelés *trivialisations locales*. Les fibres $\pi^{-1}(p)$ pour $p \in X$ se retrouvent naturellement munies d'une structure de R-espace vectoriel.

DÉFINITION : Une *section* d'un fibré $E \overset{\pi}{\to} X$ est une application $\xi : X \overset{C^\infty}{\to} E$ telle que $\pi \circ \xi = id_X$ (autrement dit, la donnée en tout point $p \in X$ d'un vecteur de la fibre en p variant de manière lisse).

On note $\Gamma(E)$ l'espace vectoriel des sections de E.

REMARQUE :
- Si $E \overset{\pi_E}{\to} X$ est un fibré, il est possible de définir de manière naturelle une topologie sur la somme disjointe $\coprod_{p\in X}(E_p)^*$ où $E_p = \pi^{-1}(p)$. On définit ainsi un fibré E^* appelé *fibré cotangent* de E. Une section de ce fibré est donc la donnée d'une famille de formes linéaires $\phi_p \in E_p$ variant lissement.
- De même si $F \overset{\pi_F}{\to} X$ est un autre fibré on définit naturellement le produit tensoriel $E \otimes F$.
- Enfin on définit le fibré $End(E)$ comme le produit $E^* \otimes E$. Nous aurons besoin de cette définition afin de définir les structures presque complexes sur une surface.

2 Métriques riemanniennes

Définition : Une *surface* est une variété différentielle X de dimension 2.

Une *métrique* sur X est une section g du fibré $S^2(TX)^*$ telle que pour tout p, g_p soit définie positive, ce qui fait de chaque espace tangent de X un espace euclidien.

Si X est orientable (c'est-à-dire s'il existe une 2-forme à valeurs réelles jamais nulle sur X) et munie d'une métrique alors il existe une notion naturelle de volume sur X :

Définition : La *forme volume* associée à une métrique g sur une surface X munie d'une orientation ω est l'unique 2-forme différentielle μ telle que pour tout $p \in X$ et pour toute base orthonormée directe (X, Y) de T_pX on ait l'égalité $\mu(X, Y) = 1$.

Preuve : Si X est un ouvert de $\mathbb{R}^2$: Soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On peut supposer sans perte de généralité que $\forall p \in X, \omega_p(e_1, e_2) > 0$. En tout $p \in X$, soit $G(p)$l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de (e_1, e_2) relativement à g_p. Elle reste une base directe. $p \to G(p)$ est de classe C^∞ donc $x \to \mu_x = (det\ G(p))^{-1} \cdot dx \wedge dy \in \Lambda(\mathbb{R}^2)^*$ aussi. On vérifie facilement que cette forme convient.

Dans le cas général, un argument de partition de l'unité permet de conclure. •

3 Structures presque complexes

Définition : Soit S une surface. Une *structure presque complexe* sur S est une section J de $End(TS)$ telle que $J^2 = -id$.

Une structure presque complexe induit sur chaque plan tangent de S une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel dont la loi est définie par :

$$(x + i \cdot y, v) \in \mathbb{C} \times T_pS \to x \cdot v + y \cdot Jv$$

Proposition : Toute surface riemannienne orientée possède une structure presque complexe naturelle.

Preuve : Pour $p \in X$ on définit J sur T_pX par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans n'importe quelle base orthonormée directe. •

4 Connexions

Etant donné un champ de vecteurs ξ sur $\mathbb{R}^2$, on dispose d'une manière naturelle de dériver ξ, en le voyant simplement comme une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dans le cas d'une surface quelconque, une telle définition n'est plus possible car les espaces tangents ne sont pas les mêmes en chaque point de la surface. Le but des connexions est de combler ce manque.

4.1 Définitions et premières propriétés

Définition : Soit S une surface. Une *connexion* sur TS est un opérateur $\nabla : \left\{ \begin{array}{c} \Gamma(TS) \times \Gamma(TS) \to \Gamma(TS) \\ (X, \xi) \to \nabla_X \xi \end{array} \right.$ tel que :

- ∇ est $C^\infty(S)$-linéaire en X et $\mathbb{R}$-linéaire en ξ.
- $\nabla_X f\xi = (T_X f)\xi + f \cdot \nabla_X \xi$ *(règle de Leibniz)*

Exemples :

- $(X, \xi) \to d_X \xi$ est une connexion sur $T\mathbb{R}^n$.
- De manière générale, si S est plongée dans $\mathbb{R}^3$ alors on définit une connexion sur TS de la manière suivante : pour $p \in S$, si $\phi : \left\{ \begin{array}{c} U \subseteq \mathbb{R}^3 \to U' \subseteq \mathbb{R}^3 \\ U \cap S \to \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\ p \to 0 \end{array} \right.$ est une carte locale alors on pose $T\phi \cdot \nabla_X \xi(p) = \pi_{\mathbb{R}^2}\Big(d_0\phi\xi \cdot \big(\phi X(0)\big)\Big)$ où $\phi\xi$ et ϕX désignent les champs ξ et X lus dans la carte ϕ.

Proposition : Si deux champs de vecteurs X et Y coïncident en un point $p \in S$ alors pour tout champ ξ, $\nabla_X \xi(p) = \nabla_Y \xi(p)$. Autrement dit, si $X_p \in T_pS$ est un vecteur tangent et $\xi \in \Gamma(TS)$ alors $\nabla_{X_p}\xi$ est défini sans ambiguïté. (Il faut penser à $\nabla_{X_p}\xi$ comme la dérivée du champ ξ selon le vecteur X_p).

Preuve : Cette propriété découle de la C^∞-linéarité de ∇ en X. Il suffit de montrer que si $X(p) = 0$ alors $\nabla_X \xi(p) = 0$ pour tout ξ. Supposons donc $X(p) = 0$. Quitte à lire le tout sur une carte locale, on peut également supposer que S est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, que $p = 0$ et que $X : S\mathbb{R}^2$.

$$\forall h \in S, X(h) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\big(t \to X(t \cdot h)\big)\, dt$$

$$\forall h \in S, X(h) = \int_0^1 d_{th}X \cdot h\, dt = \int_0^1 \sum_{i=1,2} (d_{th}X \cdot e_i) \cdot h_i\, dt$$

Soit $g_i : h \overset{C^\infty}{\to} \int_0^1 d_{th}X \cdot e_i \, dt$. D'après ce qui précède,

$$X(h) = \sum_{i=1,2} g_i(h) \cdot h_i$$

Par C^∞-linéarité selon X de ∇,

$$\forall \xi, \nabla_X \xi(h) = \sum_{i=1,2} h_i \cdot \nabla_{g_i} \xi(h)$$

En particulier, on a $\nabla_X \xi(0) = 0$. $\bullet$

Si $X_p \in T_pS$ est un vecteur tangent, on notera par la suite $\nabla_{X_p}\xi$ le vecteur $\nabla_X \xi(p)$ où X est un prolongement arbitraire de X_p sur toute la surface.

Nous allons à présent élucider la structure algébrique de l'espace des connexions sur TS.

PROPOSITION : L'ensemble des connexions sur TS est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel des sections du fibré $(TS)^* \otimes (TS)^* \otimes (TS)$.

Preuve : Soient ∇^1 et ∇^2 deux connexions sur TS. Un calcul facile en utilisant la règle de Leibniz montre que leur différence est C^∞-linéaire en X *et* en ξ. Par un raisonnement identique à celui de la preuve ci-dessus, on montre que si $X_p, \xi_p \in T_pS$ alors $\left(\nabla^1 - \nabla^2\right)_{X_p} \xi_p$ est défini sans ambiguïté en prenant des prolongements arbitraires. En tout point p, l'application $(X_p, \xi_p) \to \left(\nabla^1 - \nabla^2\right)_{X_p} \xi_p$ est bilinéaire à valeurs dans T_pS. C'est donc un élément de $(T_pS)^* \otimes (T_pS)^* \otimes (T_pS)$. Donc $\left(\nabla^1 - \nabla^2\right)$ peut être vue comme une section de $(TS)^* \otimes (TS)^* \otimes (TS)$. $\bullet$

4.2 Connexion de Levi-Civita

Lorsque la surface est de plus munie d'une métrique, il existe un choix privilégié de connexion.

RAPPEL : On note $C^\infty(S) = C^\infty(S, \mathbb{R})$.
Soit $Der(S) = \left\{\delta \in End_{\mathbb{R}}(C^\infty(S)) \mid \forall f, g, \delta(fg) = f \cdot \delta(g) + g \cdot \delta(f)\right\}$.
On a un isomorphisme $\left\{ \begin{array}{c} \Gamma(TS) \to Der(S) \\ X \to \left(\delta_X : f \to T_X f\right) \end{array} \right.$

On définit alors le *crochet de Lie* $[X, Y]$ de X et de Y par la relation $\delta_{[X,Y]} = \delta_X \circ \delta_Y - \delta_Y \circ \delta_X$. Intuitivement $[X, Y]$ mesure la manière par laquelle Y « tourne »autour des lignes de flot de X.

DÉFINITION : Soit S une surface riemannienne. Alors il existe une unique connexion ∇ sur TS vérifiant :

- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ pour tous champs de vecteurs X et Y.
- ∇ est compatible avec la métrique, c'est-à-dire que pour X et Y champs de vecteurs et U_p vecteur tangent, $T\big(< X, Y > \big) \cdot U_p = < \nabla_{U_p} X, Y(p) > + < X(p), \nabla_{U_p} Y >$.

Une telle connexion est appelée *connexion de Levi-Civita*.

Remarque : La deuxième condition est simplement une généralisation de la formule de dérivation du produit scalaire de deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$, où ∇ remplace la dérivation usuelle des champs de vecteurs.

Preuve : (existence) La relation suivante définit une connexion ∇ :

$$2 \cdot g(\nabla_X Y, Z) = T_X g(Y, Z) + T_Y g(X, Z) - T_Z g(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X)$$

On vérifie qu'une telle connexion vérifie les conditions requises •

4.3 Parallélisme, géodésiques

Sur $\mathbb{R}^2$, lorsqu'un champ de vecteurs ξ vérifie $d\xi = 0$ alors ce champ de vecteurs est parallèle (tous les vecteurs pointent dans la même direction et ont même norme).

A l'aide des connexions, on peut généraliser cette notion à des surfaces quelconques.

Définition : Un champ de vecteurs ξ est *parallèle* si $\nabla \xi = 0$.

De même étant donné une courbe $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \overset{C^1}{\to} S$ et ξ un champ de vecteurs défini sur cette courbe, on dit que ξ est parallèle le long de γ si $\forall t, \nabla_{c'(t)} \tilde{\xi}$ où $\tilde{\xi}$ est un prolongement arbitraire de ξ à l'ensemble de la surface.

Exemple : Soit θ un angle. En tout point $p \in \mathbb{S}^2 - \{N, S\}$, on place une boussole et on définit $\xi_\theta(p)$ comme le vecteur unitaire faisant un angle θ avec l'aiguille de la boussole. ξ_θ est un champ de vecteurs défini sur $\mathbb{S}^2 - \{N, S\}$, et parallèle selon l'équateur et selon les méridiens.

Définition : Une courbe $\gamma : I \overset{C^\infty}{\to} S$ est une *géodésique* si $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$, autrement dit, si son champ des vitesses est parallèle selon cette courbe.

Exemple : On peut vérifier que les géodésiques de $\mathbb{R}^2$ sont les lignes droites et que les géodésiques de $\mathbb{S}^2$ sont les arcs de cercle centrés sur le centre de la sphère.

Proposition : Soit S une surface riemannienne.
- Pour tout vecteur tangent X, il existe une unique géodésique $\gamma_X : \mathbb{R} \to S$ parcourue à une vitesse de norme constante et telle que $\gamma'_X(0) = X$.

– Soit $p \in S$. L'application $exp_p : X \in T_pS \to \gamma_X(1) \in S$ est un difféomorphisme local en 0, appellé *exponentielle* en p.

Nous ne donnerons pas ici la preuve de cette proposition, qui se trouve dans la plupart des ouvrages d'introduction à la géométrie riemannienne.

5 Courbure gaussienne

Donner un sens à l'énoncé du théorème de Gauss-Bonnet requiert de définir une notion de courbure gaussienne sur une surface. Dans le cas de surfaces plongées dans $\mathbb{R}^3$, définir une telle notion est chose aisée : localement, une surface de $\mathbb{R}^3$ est isométrique au graphe d'une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, et la courbure gaussienne est définie comme le déterminant de la matrice hessienne d'une telle fonction au point considéré. Néanmoins, définir intrinsèquement la courbure gaussienne d'une surface requiert un effort supplémentaire, et nécessite de recourir à la connexion de Levi-Civita.

Soit S une surface riemannienne orientée, ∇ sa connexion de Levi-Civita, J sa structure presque complexe et μ sa forme volume.

Un calcul montre que l'application $R : (X, Y, Z) \in (\Gamma(TS))^3 \to R(X, Y)Z = \big(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z\big) - \nabla_{[X,Y]}Z$ est C^∞-linéaire selon ses trois variables et antisymétrique selon le couple (X, Y).

Ceci implique que en tout $p \in S$, $R_p : (X_p, Y_p, Z_p) \in (\Gamma(T_pS))^3 \to \big(R(X, Y)Z\big)(p)$ définit sans ambiguïté une application trilinéaire en prenant des prolongements arbitraires.

Par ailleurs, la connexion de Levi-Civita commute avec J (c'est-à-dire pour tout champ de vecteurs ξ et pour tout vecteur tangent X, $J \cdot \nabla_X\xi = \nabla_X(J\cdot\xi)$) et donc si X, Y, Z sont des vecteurs tangents en un point, $R(X, Y)(J\cdot Z) = J \cdot R(X, Y)\ Z$. On peut donc voir $R(X, Y)$ comme un endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de T_pS, c'est-à-dire simplement comme un élément de $\mathbb{C}$ puisque l'espace tangent est de dimension complexe 1. R est donc une 2-forme à valeurs complexes sur S.

Enfin, la relation $< R(X, Y)\ Z, W >= -< R(X, Y)\ W, Z >$ permet de déduire que $R(X, Y)$ est un multiple de i.

On peut par conséquent écrire $R = -i\kappa\mu$ où $\kappa : S \overset{C^\infty}{\to} \mathbb{R}$.

Définition : R est le *tenseur de courbure* de S, et κ sa *courbure gaussienne*.

Une manière d'interpréter la courbure est d'observer son effet sur les angles. Sur une surface de courbure nulle, la somme des angles d'un triangle vaut toujours π. Lorsque la courbure est positive, la somme des angles d'un triangle est variable mais toujours supérieure à π (ainsi, la somme des angles d'un triangle de $\mathbb{S}^2$ peut valoir jusqu'à $\frac{3\pi}{2}$). Lorsque la courbure est négative, la somme des angles d'un triangle est toujours inférieure à π, et, par exemple sur $\mathbb{H}^2$ (défini en fin de mémoire), elle peut être aussi proche de 0 que l'on veut.

Deuxième partie

Le théorème de Gauss-Bonnet

On a à présent tous les concepts nécessaires en main afin d'énoncer et de démontrer le théorème de Gauss-Bonnet :

Théorème : Soit S une surface riemannienne compacte et orientée, κ sa courbure gaussienne, μ sa forme volume et $\chi(S)$ sa caractéristique d'Euler. Alors l'égalité suivante est vraie :

$$\frac{1}{2\pi}\int_S \kappa \cdot \mu = \chi(S)$$

Dans un premier temps, nous allons démontrer que l'intégrale de Gauss-Bonnet est indépendante de la métrique choisie.

6 Invariance de l'intégrale par changement de métrique

Lemme : Soit S une surface munie d'une structure presque complexe J. Soient ∇^0 et ∇^1 deux connexions sur TS et R^0, R^1 les 2-formes de courbure respectives correspondantes. On suppose de plus que les ∇^i commutent avec J. Alors R^0 et R^1 ont même classe de cohomologie.

Preuve : Soit $\nabla^t = (1-t)\cdot\nabla^0 + t\cdot\nabla^1$. C'est encore une connexion, de courbure R^t. Montrons que $\partial_t R^t$ est exacte. Le lemme en découlera en intégrant selon t.

Soit $(\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C})_{i\in I}$ un ensemble fini de trivialisations tels que les U_i recouvrent S.

De telles trivialisations existent : il existe un recouvrement fini U_i de S tel que sur tout U_i, il existe un champ de vecteurs C^∞ ξ^i ne s'annulant jamais. En tout $p \in U_i$, $(\xi^i_p, J\xi^i_p)$ est une base de T_pS. On définit alors la trivialisation $\phi_i : (\alpha \cdot \xi^i_p + \beta \cdot J\xi^i_p) \to (p, \alpha + i\beta) \in U_i \times \mathbb{C}$.

Sur chaque U_i soit $\alpha^t_i = \nabla^t - \phi^*_i d$ (où d est la dérivation usuelle de fonctions $U \to \mathbb{C}$).

Pour X_p vecteur tangent, $\xi \to (\alpha^t_i)_X \xi$ peut être vu comme un $\mathbb{R}$-endomorphisme de T_pS (car différence de deux connexions). Il commute avec J donc c'est un $\mathbb{C}$-endomorphisme, donc une homothétie. Donc en fait, α^t_i est une 1-forme sur U_i à valeurs complexes.

Soit $j \neq i$. Sur $U_i \cap U_j$, $\alpha^t_i - \alpha^t_j = \phi^*_i d - \phi^*_j d$ est indépendant de t. Donc $\partial_t \alpha^t_i = \partial_t \alpha^t_j$.

Les 1-formes $\partial_t \alpha^t_i$ se recollent donc sur S toute entière en une 1-forme $\dot{\alpha}$.

Par ailleurs, sur chaque carte, un calcul montre que $R^t = d\alpha^t_i$ donc $\partial_t R^t = d\dot{\alpha}$. Ainsi, $\partial_t R^t$ est exacte. Une intégration selon t montre alors que R^0 et R^1 diffèrent d'une forme exacte. $\bullet$

A présent, soient g_0 et g_1 deux métriques sur S, de connexions respectives ∇^0 et ∇^1, de structures presque complexes J_0 et J_1, de courbures R^0 et R^1.

On aimerait appliquer le lemme précédent, mais le problème est ici que la structure presque complexe change. Pour y remédier, nous allons montrer l'existence d'un isomorphisme de fibrés complexes entre (TS, J_0) et (TS, J_1).

Lemme : Il existe un isomorphisme de fibrés complexes entre (TS, J_0) et (TS, J_1) (c'est-à-dire un endomorphisme inversible de TS tel que $\Phi J_0 = J_1 \Phi$).

Preuve : On note $g_t = (1-t) \cdot g_0 + t \cdot g_1$ et J_t la structure presque complexe associée.

Soit $t_0 \in I$. Soit (χ_i, U_i) une partition finie de l'unité sur S telle que sur chaque U_i, il existe un champ de vecteurs jamais nul ξ^i. Soit Ψ^i_t l'endomorphisme de TU_i qui à la base $(\xi^i, J_{t_0}\xi^i)$ associe la base $(\xi^i, J_t\xi^i)$ pour tout $t \in [0,1]$. Soit enfin $\Psi_t = \sum_i \chi_i \Psi^i_t$. $\Psi_{t_0} = id$ donc il existe un voisinage ouvert connexe V_{t_0} de t_0 sur lequel $det\ \Psi_t \geq \frac{1}{2}$.

$\bigcup_{t_0 \in [0,1]} V_{t_0} = [0,1]$ donc, il existe une suite finie $0 = s_0 < s_1 < ... < s_n = 1$ telle que $\bigcup_{1 \leq k \leq n} V_{s_k}$ recouvre $[0,1]$. On vérifie alors sans difficulté qu'il existe une suite d'isomorphismes $(TS, J_{s_k}) \to (TS, J_{s_{k+1}})$ donc un isomorphisme $(TS, J_0) \to (TS, J_1)$. $\bullet$

Notons $\tilde{\nabla}^1_X \xi = \Phi^{-1} \nabla^1_X \Phi \xi$. C'est encore une connexion sur TS, qui commute avec J_0.

On a par conséquent deux connexions $\tilde{\nabla}^1$ et ∇^0 qui commutent avec J_0. On est dans le cadre du lemme ci-dessus, ce qui permet de déduire que $\tilde{R}^1 - R^0$ est exacte, et donc $\int_S \tilde{R}^1 = \int_S R^0$.

Pour conclure, montrons que $\int_S \tilde{R}^1 = \int_S R^1$.

On a constaté plus haut que pour tous X, Y vecteurs tangents en p, R^1_{XY} est un endomorphisme de T_pS commutant avec J_1 donc est assimilable à une $\mathbb{C}$-homothétie de T_pS donc peut être écrit sous la forme $R^1_{XY} = \alpha_{XY} \cdot id + \beta_{XY} \cdot J_1$ où α, β sont des 2-formes bilinéaires.

De plus l'antisymétrie de R^1 en (X, Y) implique que α, β sont alternées. Par ailleurs,

$$\tilde{R}^1 = \Phi R^1 \Phi^{-1} = \alpha \cdot id + \beta \cdot J_0$$

$$\int_S R^0 = \int_S \tilde{R}^1 = \int_S (\alpha + i\beta) = \int_S R^1$$

D'où le résultat voulu. •

7 Les cas de la sphère et du tore

Pour la sphère, $\chi = 2$ et $\kappa = 1$, l'aire de la sphère est 4π.

Pour le tore, $\chi = 0$ et $\kappa = 0$.

Dans les deux cas, le théorème est vérifié.

8 Le cas du genre supérieur

Considérons tout d'abord la sphère $\mathbb{S}^2$, qu'on aplatit légèrement dans un voisinage circulaire de chacun des pôles (ce qui revient à changer sa métrique, on note g' la nouvelle métrique). On distingue trois régions : les deux régions plates au voisinage des pôles, et le reste de la sphère, qu'on notera E. Le théorème de Gauss-Bonnet appliqué à la sphère et l'invariance de l'intégrale de Gauss-Bonnet par changement de métrique donne alors :

$$2 \cdot 2\pi = \int_{\mathbb{S}^2} \kappa \mu_g = \int_{\mathbb{S}^2} \kappa \mu_{g'} = \int_E \kappa \mu_{g'}$$

A présent, on prend un tore $\mathbb{T}^2$, qu'on aplatit selon des plans orthogonaux à son axe. On distingue quatre régions : deux couronnes plates en haut et en bas du tore, une région extérieure qui, à un isomorphisme linéaire près, est isométrique à E, ainsi qu'une région intérieure qu'on note I. Notons g' la nouvelle métrique sur le tore après déformation. On applique encore le théorème de Gauss-Bonnet et l'invariance de l'intégrale par changement de métrique :

$$0 = \int_{\mathbb{T}^2} \kappa\mu_g = \int_{\mathbb{T}^2} \kappa\mu_{g'} = \int_E \kappa\mu_{g'} + \int_I \kappa\mu_{g'} = 4\pi + \int_I \kappa\mu_{g'}$$

$$\int_I \kappa\mu_{g'} = -4\pi$$

Finalement, soit S une surface de genre $n \geq 2$ quelconque. Le théorème de classification des surfaces compactes connexes permet d'affirmer que S est difféomorphe à la somme connexe de n tores, donc par invariance de l'intégrale par changement de métrique, on peut supposer que S est la somme connexe de n tores.

De même que précédemment, on aplatit S, qui se décompose alors en une région plate supérieure, une région plate inférieure, une région extérieure qui, à rétrécissement près, est isométrique à E et n régions intérieures isométriques à I. Par conséquent,

$$\int_S \kappa\mu_{g'} = \int_E \kappa\mu_{g'} + n \cdot \int_I \kappa\mu_{g'} = 2\pi \cdot (2 - 2n) = \chi(S)$$

Le théorème de Gauss-Bonnet est donc vérifié.

Remarque : Il existe une version locale du théorème, qui affirme que si $U \subseteq S$ est un ouvert simplement connexe dont le bord est un polygone géodésique alors $\int_U \kappa\mu_g = 2\pi + \theta$, où θ désigne la somme des angles extérieurs du polygone. Ceci rejoint la remarque faite précédemment concernant l'influence de la courbure sur la somme des angles des polygones.

Troisième partie

Le théorème d'uniformisation

Nous allons dans cette partie prouver le théorème d'uniformisation des surfaces compactes. Ce théorème affirme qu'à équivalence conforme près (c'est-à-dire quitte à multiplier la métrique d'une surface par une fonction strictement positive), toute surface riemannienne possède une courbure constante, égale à 1, 0 ou -1 selon que la surface soit respectivement de genre 0, 1 ou ≥ 2.

Etant donné deux métriques g et g' vérifiant $g' = f \cdot g$ où f est une fonction strictement positive, nous allons dans un premier temps établir une relation entre les courbures κ et κ' associées à ces métriques.

Ceci nécessite d'introduire l'opérateur laplacien sur une surface riemannienne, généralisant le laplacien usuel sur $\mathbb{R}^2$.

9 Laplacien sur une surface riemannienne

Par la suite, on se placera dans l'espace préhilbertien $C^\infty(S,\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $< f_1, f_2 >= \int_S f_1 f_2 \mu_g$ où μ_g est la forme volume associée à la métrique de S.

Il existe un isomorphisme canonique entre l'espace des champs de vecteurs sur S et l'espace des 1-formes donné par :

$$\xi \to \omega_\xi = g(\xi, .)$$

A travers cette isomorphisme, on munit $\Lambda^1(TS)^*$ du produit scalaire suivant :

$$< \omega_{\xi_1}, \omega_{\xi_2} >= \int_S g(\xi_1, \xi_2)\mu_g$$

Ainsi $\Lambda^1(TS)^*$ devient un espace préhilbertien.

Définition : Soit S une surface riemannienne, ∇ sa connexion de Levi-Civita, et ξ un champ de vecteurs. La *divergence* de ξ est la fonction :

$$div\ \xi(p) = -tr(X_p \to \nabla_{X_p}\xi)$$

.

De même que l'isomorphisme canonique entre champs de vecteurs et 1-formes assimile le gradient d'une fonction $C^\infty(S)$ et sa différentielle, la divergence se lit à travers l'isomorphisme comme un opérateur $\delta : \Lambda^1(TS)^* \to C^\infty(S)$ appelé *codifférentielle*.

Proposition : δ est l'adjoint de d.

Preuve : Soient ω une 1-forme et $f \in C^\infty(S)$. Le but est de montrer que $< \omega, df >=< \delta\omega, f >$.

Supposons dans un premier temps que ω est à support compact inclus dans un ouvert U paramétré géodésiquement par une application $\phi : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to U$. Une telle application vérifie $(\phi^{-1})^*\nabla = d$ et $(\phi^{-1})^*\mu_g = dx \wedge dy$. On se permettra donc par la suite l'abus d'écriture consistant à assimiler U à V.

$$< \omega, df >= \int_U df(\xi)\ \mu_g = \sum_{i=1,2} \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i}\xi_i\ dx_1 dx_2$$

$$< \delta\omega, f >= \int_U -tr(d\xi) \cdot f \ \mu_g = - \int_U \sum_{i=1,2} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} \cdot f \ dx_1 dx_2$$

Une intégration par parties permet de montrer l'égalité des deux expression ci-dessus.

A présent, si ω est quelconque, il existe une partition de l'unité finie $(U_\lambda, \chi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ où les U_λ sont des ouverts admettant un paramétrage géodésique. On a :

$$< \omega, df >= \sum_{\lambda\in\Lambda} < \omega\chi_\lambda, df >$$

Chaque $\omega\chi_\lambda$ est à support compact dans U_λ donc par ce qui précéde,

$$< \omega, df >= \sum_{\lambda\in\Lambda} < \delta\omega\chi_\lambda, f >=< \delta\big(\sum_{\lambda\in\Lambda} \omega\chi_\lambda\big), f >=< \delta\omega, f > .$$

•

Conséquence : L'opérateur δd est donc auto-adjoint. C'est le *laplacien* associé à la métrique g, noté Δ_g.

Proposition : Les affirmations suivantes sont vraies :
- $Ker\ \Delta = \mathbb{R}$
- $C^\infty(S)$ admet la décomposition orthogonale $Ker\ \Delta \oplus Im\ \Delta$
- L'équation $\Delta f = u$ admet une solution $\iff \int_S u\mu_g = 0$

Preuve : Il est clair que $\mathbb{R} \subseteq Ker\ d \subseteq Ker\ \Delta$.
Réciproquement, si $\Delta f = 0$ alors

$$< \Delta f, f >=< \delta df, f >=< df, df >= \|df\|^2 = 0$$

donc par connexité de S, f est constante. Il en résulte que $Ker\ \Delta = \mathbb{R}$.

Les deux propositions suivantes, qui sont essentiellement équivalentes, découlent de la théorie des opérateurs auto-adjoints. Ce n'est pas notre but de l'exposer ici. Montrons néanmoins que l'implication $u \in Im\ \Delta \Longrightarrow \int_S u\mu_g = 0$ est claire.

En effet si $u = \Delta f$ alors

$$\int_S u\mu_g =< \Delta f, 1 >=< df, d1 >= 0.$$

•

10 Conséquences d'un changement conforme de métrique sur la courbure

Soient g et g' deux métriques vérifiant $g' = e^{-2f} \cdot g$ où $f \in C^\infty(S)$. Dans ce paragraphe plutôt calculatoire, nous établissons des relations entre leurs laplaciens respectifs Δ, Δ' puis entre leurs courbures respectives κ, κ', afin de ramener le problème d'uniformisation à une équation aux dérivées partielles.

Proposition : Les laplaciens relatifs à chacune des métriques vérifient la relation suivante :

$$\Delta' = e^{2f}\Delta$$

Preuve : Notons δ et δ' les codifférentielles respectives de g et g', ainsi que $grad$ et $grad'$ les gradients respectifs.

Soient ω une 1-forme et ϕ une 0-forme. Soient ξ ξ' champs de vecteurs tels que $g(\xi, .) = \omega$ et $g'(\xi', .) = \omega$.

La relation d'adjonction entre δ' et d donne :

$$\int_S (\delta'\omega) \cdot \phi \; \mu_{g'} = \int_S g'(\xi', grad' \; \phi) \; \mu_{g'} = \int_S d\phi(\xi')\mu_{g'}$$

Or un calcul rapide montre que $\xi' = e^{2f}\xi$ et $\mu_{g'} = e^{-2f}\mu_g$.

En remplaçant dans ce qui précède, on a :

$$\int_S (\delta'\omega) \cdot \phi \; \mu_{g'} = \int_S d\phi(\xi) \; \mu_g = \int_S g(\xi, grad \; \phi) \; \mu_g$$

Par adjonction entre d et δ :

$$\int_S (\delta'\omega) \cdot \phi \; \mu_{g'} = \int_S (\delta\omega) \cdot \phi \; \mu_g = \int_S (e^{2f}\delta\omega) \cdot \phi\mu_{g'}$$

Ceci restant vrai pour un choix arbitraire de ω et ϕ, il en résulte que $\delta' = e^{2f}\delta$.

Enfin, comme $\Delta' = \delta' d$ et $\Delta = \delta d$ on a bien $\Delta' = e^{2f}\Delta$. •

Soit $p \in S$. On se place à présent dans un système de coordonnées géodésiques au voisinage de p, défini par la difféomorphisme local induit par exp_p. Soient X_1,X_2 deux champs de vecteurs constants, unitaires et orthogonaux sur T_pS. Soient ∂_{x_k}, $k = 1, 2$ leurs images par exp_p. Ce sont des champs de vecteurs définis au voisinage de p, qu'on identifiera aux dérivations qu'ils induisent. Nous allons prouver que en $\Delta f(p) = -(\partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2})f(p)$.

Lemme : Au point p, $\forall i, \nabla\partial_{x_i} = 0$ et $Tg = 0$.

Preuve : Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et $v = a_1\partial_{x_1}(p) + a_2\partial_{x_2}(p) \in T_pS$.

Soit $\gamma_v(t) = exp_p(t \cdot v)$ la géodésique prolongeant v. Soit $\dot{\gamma_v}$ un prolongement arbitraire du champ des vitesses de γ_v.

$$\forall p \in \gamma_v, \dot{\gamma_v}(p) = a_1\partial_{x_1}(p) + a_2\partial_{x_2}(p)$$

L'égalité $\nabla_{\dot{\gamma_v}}\dot{\gamma_v} = 0$ implique, en développant :

$$\sum_i a_i \nabla_{\partial_{x_i}} \dot{\gamma_v} = 0$$

$$\sum_{i,j} a_i a_j \nabla_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0$$

Ceci restant valable pour un choix arbitraire de a_1, a_2, et comme par définition de la connexion de Levi-Civita, $\nabla_{\partial_{x_i}}\partial_{x_j} - \nabla_{\partial_{x_j}}\partial_{x_i} = [\partial_{x_i}, \partial_{x_j}] = 0$ en p, il en résulte que $\forall i, j, \nabla_{\partial_{x_i}}\partial_{x_j} = 0$ donc $\nabla\partial_{x_j} = 0$ en p.

La deuxième partie du lemme découle de la relation suivante, figurant dans la définition de la connexion de Levi-Civita :

$$\forall i, j, k,\ \partial_{x_k}\big(g(\partial_{x_i}, \partial_{x_j})\big) = g(\nabla_{\partial_{x_k}}\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) + g(\partial_{x_i}, \nabla_{\partial_{x_k}}\partial_{x_j})$$

le terme de droite valant zéro en p d'après ce qui précède. •

Le lemme qui suit en résulte :

Lemme : Au point p, $\Delta f = -(\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2) f$

Preuve : On notera identiquement un champ de vecteurs et sa matrice dans la base mobile $(\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$.

Soit $G = (g_{ij})_{i,j\in\{1,2\}} = Mat_{(\partial_{x_1},\partial_{x_2})}\ g$ et g^{ij} les coefficients de G^{-1}.

Pour tout champ de vecteurs ξ, on a l'égalité suivante :

$$T_\xi f = g(grad\ f, \xi) = (grad\ f)^t \cdot G \cdot \xi$$

$$T_{\xi_1\partial_{x_1}+\xi_2\partial_{x_2}} f = (grad\ f)^t \cdot G \cdot \xi$$

$$(\partial_{x_1} f)\xi_1 + (\partial_{x_2} f)\xi_2 = (grad\ f)^t \cdot G \cdot \xi$$

$$\begin{pmatrix}\partial_{x_1} f & \partial_{x_2} f\end{pmatrix} \cdot \xi = (grad\ f)^t \cdot G \cdot \xi$$

Donc,

$$\begin{pmatrix}\partial_{x_1} f & \partial_{x_2} f\end{pmatrix} = (grad\ f)^t \cdot G$$

$$\begin{pmatrix}\partial_{x_1} f & \partial_{x_2} f\end{pmatrix} \cdot G^{-1} = (grad\ f)^t$$

d'où l'égalité $grad\ f = \sum_{i,j} g^{ij}(\partial_{x_i} f) \cdot \partial_{x_j}$.

En calculant la trace de l'endomorphisme $\left(\nabla grad\ f\right)_p$ de T_pS selon la base $(\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ à l'aide du lemme précédent, on trouve alors :

$$tr\ \left(\nabla grad\ f\right)_p = \sum_i g^{i,i}(\partial^2_{x_i} f)$$

or comme en p, $G = I_2$ (car $(\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ est orthonormée) on a bien

$$tr\ \left(\nabla grad\ f\right)_p = \sum_i (\partial^2_{x_i} f)$$

d'où le résultat escompté, mais ce uniquement au point p. $\bullet$

Nous aboutissons enfin au résultat principal de ce paragraphe :

Propriété : Les courbures κ et κ' relatives respectivement à g et g' vérifient la relation

$$\kappa' = e^{-2f}(\kappa - \Delta f)$$

Preuve : Dans la suite X, Y, Z sont des champs de vecteurs arbitraires.

Exprimons dans un premier temps la différence $\nabla'_X Y - \nabla_X Y$.

Lorsqu'on a défini précédemment la connexion de Levi-Civita, on a vu qu'elle vérifiait la relation

$$2{\cdot}g(\nabla_X Y, Z) = T_X g(Y, Z) + T_Y g(X, Z) - T_Z g(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g([Z, Y], X)$$

Cette relation permet de déduire que

$$2g'(\nabla'_X Y, Z) - 2e^{-2f} g(\nabla_X Y, Z) = (T_X e^{-2f}) g(Y, Z) + (T_Y e^{-2f}) g(X, Z) - (T_Z e^{-2f}) g(X, Y)$$

$$2g'(\nabla'_X Y, Z) - 2e^{-2f} g(\nabla_X Y, Z) = -2e^{-2f}\Big((T_X f) g(Y, Z) + (T_Y f) g(X, Z) - (T_Z f) g(X, Y)\Big)$$

Ceci étant valable $\forall Z$, on a

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y - (T_X f) Y - (T_Y f) X + g(X, Y)(grad\ f)$$

Soit $p \in S$ et $(\partial_{x_1}, \partial_{x_2})$ le repère mobile géodésique défini précédemment (par rapport à la métrique g).

$$\nabla'_{\partial_{x_2}} \partial_{x_2} = \nabla_{\partial_{x_2}} \partial_{x_2} - 2(\partial_{x_2} f)\partial_{x_2} + (grad\ f)$$

$$\nabla'_{\partial_{x_1}} \partial_{x_2} = \nabla'_{\partial_{x_1}} \partial_{x_2} - (\partial_{x_1} f)\partial_{x_2} - (\partial_{x_2} f)\partial_{x_1}$$

D'après un des lemmes précédents, $\nabla'_{\partial_{x_i}} \partial_{x_j} = 0\ \forall i, j$. Par conséquent,

$$\nabla'_{\partial_{x_2}} \partial_{x_2} = -2(\partial_{x_2} f)\partial_{x_2} + (grad\ f)$$

$$\nabla'_{\partial_{x_1}} \partial_{x_2} = -(\partial_{x_1} f)\partial_{x_2} - (\partial_{x_2} f)\partial_{x_1}$$

A l'aide des relations précédentes, un calcul donne :

$$g(R'_{\partial_{x_1},\partial_{x_2}} \partial_{x_2}, \partial_{x_1}) - g(R_{\partial_{x_1},\partial_{x_2}} \partial_{x_2}, \partial_{x_1}) = \partial^2_{x_1} f + \partial^2_{x_2} f$$

Au point p, on a donc, d'après le lemme précédent,

$$e^{2f}\kappa' - \kappa = -\Delta f$$

Ceci reste valable en tout point $p \in S$. Par conséquent, $\kappa' = e^{-2f}(\kappa - \Delta f)$.
•

11 Uniformisation sur le tore

C'est le cas le plus facile à démontrer du théorème d'uniformisation.

Il s'agit de montrer qu'à équivalence conforme près, toute métrique sur le tore est de courbure constante nulle. D'après ce qui précède, on cherche alors une fonction $f \in C^\infty(S)$ telle que $e^{2f}(\kappa - \Delta f) = 0$, ce qui est équivalent à $\kappa = \Delta f$.

Or, d'après le théorème de Gauss-Bonnet, comme la caractéristique d'Euler du tore est nulle, $\int_S \kappa\mu_g = 0$.

On a montré au paragraphe 3.1 que $u \in Im\ \Delta \iff \int_S u\mu_g = 0$.

Par conséquent, $\kappa \in Im\ \Delta$, d'où le résultat voulu.

12 Uniformisation sur la sphère

Tout d'abord, un lemme qui nous sera utile par la suite :

LEMME : Soit S une surface quelconque. Soit $U \in S$ un ouvert connexe de courbure nulle. Soit $p \in U$ tel que $U \subseteq exp_p(T_pS)$. On munit T_pS du produit scalaire g_p. Alors exp_p est une isométrie locale de $exp_p^{-1}(U)$ vers U (c'est-à-dire que le pullback de la métrique riemannienne par exp_p est le produit scalaire sur T_pS).

Preuve : Soient x, y deux champs de vecteurs constants et linéairement indépendants sur T_pS, et X, Y leurs images par exp_p.

Par définition de l'exponentielle, $\nabla_X X = 0$ et $\nabla_Y Y = 0$.

De plus, $[x, y] = 0$ donc $[X, Y] = 0$.

Par ailleurs, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] = 0$ (voir la définition de la connexion de Levi-Civita) donc $\nabla_X Y = \nabla_Y X$.

Enfin, le fait que la courbure soit nulle implique que $\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X = \nabla_{[X,Y]} = 0$ donc $\nabla_X \nabla_Y = \nabla_Y \nabla_X$

En utilisant ces relations, on obtient

$$\nabla_X \nabla_X Y = \nabla_X \nabla_Y X = \nabla_Y \nabla_X X = \nabla_Y (0) = 0$$

$$\nabla_Y \nabla_X Y = \nabla_X \nabla_Y Y = \nabla_X (0) = 0$$

En tout point q, la différentielle de exp_p est inversible donc (X_q, Y_q) est une base de $T_q S$.

Par conséquent, $\nabla \nabla_X Y = 0$.

Donc, $Tg(\nabla_X Y, \nabla_X Y) = 2g(\nabla \nabla_X Y, \nabla_X Y) = 0$.

Par connexité de U, $\nabla_X Y$ est donc nul sur U.

Donc, $T_X g(X,Y) = g(\nabla_X X, Y) + g(X, \nabla_X Y) = 0$.

De même, on montre que $T_Y g(X,Y) = 0$.

Donc $Tg(X,Y) = 0$ donc par connexité, $g(X,Y)$ est constante. Notons $< .,. >= g_p$, vu comme métrique sur $T_p S$.

$$\forall m \in exp_p^{-1}(U), < x_m, y_m >=< x_0, y_0 >= g(X_0, Y_0) = g(X_{exp_p(m)}, Y_{exp_p(m)})$$

ce qui prouve que exp_p est bien une isométrie locale. $\bullet$

Nous allons à présent prouver que toute métrique sur $S = \mathbb{S}^2$ est conformément équivalent à une métrique de courbure constante strictement positive.

Procédons en plusieurs étapes.

ÉTAPE 1 : Soit $p \in S$. Quitte à multiplier g par une fonction strictement positive, on peut supposer que p possède un voisinage isométrique à un ouvert de $\mathbb{C}$.

Preuve : Déjà, il est clair qu'il existe un voisinage U de p et un difféomorphisme $\phi : U \to U' \subseteq \mathbb{T}^2$, tel que la métrique ϕg puisse être prolongée au tore tout entier en une métrique $\tilde{\phi g}$.

D'après le premier cas du théorème d'uniformisation, il existe $f \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ telle que $e^{2f} \cdot \tilde{\phi g}$ soit de courbure nulle. Alors $e^{2f\circ\phi} \cdot g$ est aussi de courbure nulle sur U.

$f \circ \phi$ peut être prolongée en une fonction $F \in C^\infty(S)$, et la métrique $g' = e^{2F} g$, définie sur S toute entière, est de courbure nulle au voisinage de p.

Enfin, exp_p induit un difféomorphisme entre un ouvert $V' \in T_p S$ et un voisinage $V \ni p$ dont la g'-courbure est nulle. D'après le lemme démontré en début de paragraphe, exp_p est une isométrie entre V' et V, donc, comme $T_p S$ est isométrique à $\mathbb{C}$, il existe une isométrique entre V et un ouvert de $\mathbb{C}$. $\bullet$

On suppose donc désormais que g vérifie la propriété ci-dessus.

ÉTAPE 2 : On identifie V à un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ via l'isométrie évoquée ci-dessus. On note $U = S - \{p\}$.

Soit $\epsilon > 0$ tel que le disque centré sur 0 de rayon ϵ soit inclus dans V. Soit $\phi : U \overset{C^\infty}{\to}]0, +\infty[$ telle que $\phi(z) =: \begin{cases} |z| \; si \; |z| < \epsilon/2 \\ 1 \; si \; |z| > \epsilon \end{cases}$

Alors $\Delta(log\ \phi)$ s'annule au voisinage de p et $\int_U \Delta(log\ \phi)\mu_g = 2\pi$.

Preuve :

$$\int_U \Delta(log\ \phi)\mu_g = \int_{|z|<\epsilon} \Delta(log\ \phi)\ rdr \wedge d\theta$$

$$= -2\pi \int_0^\epsilon \partial_r\big(r\ \partial_r(log\ \phi(r))\big)\ dr = -2\pi\Big[r\partial_r(log\ \phi(r))\Big]_0^\epsilon$$

$$= 2\pi\Big(lim_{r\to 0}\ r\ \partial_r(log\ r)\Big) = 2\pi.$$

•

ÉTAPE 3 : U est biholomorphe à $\mathbb{C}$.

Preuve : D'après ce qui précède, $\Delta(log\ \phi)$ peut être prolongée à S.

De plus, $\int_S \Big(\kappa - 2\Delta(log\ \phi)\Big)\mu_g = 0$ d'après le théorème de Gauss-Bonnet.

On a montré précédemment que ceci démontre l'existence d'une fonction $f_0 \in C^\infty(S)$ telle que $\Delta f_0 = \kappa - 2\Delta(log\ \phi)$.

Soit $f = f_0 + 2log\ \phi$. Alors la métrique $g' = e^{-2f}g$ est de courbure nulle sur U. On montre alors que (U, g') est isométrique à $\mathbb{C}$.

ÉTAPE 4 : Conclusion.

Il existe d'après ce qui précède une isométrie $\Phi : (U, g') \to \mathbb{C}$.

Cette isométrie peut être étendue en un homéomorphisme $\hat{\Phi} : S \to P^1(\mathbb{C})$ envoyant p sur ∞ (par compactification). Vérifions qu'un tel homéomorphisme est un biholomorphisme (c'est-à-dire commute avec les structures presque complexes).

On a vu plus haut qu'il existe une isométrie $V \overset{i}{\to} V' \subseteq \mathbb{C}$ au voisinage de p. Quitte à les composer par un automorphisme renversant l'orientation, on peut supposer de plus que i et $\hat{\Phi}$ sont des isométries directes.

$\frac{1}{\hat{\Phi}\circ i^{-1}}$ est donc une isométrie directe sur $V' - \{0\}$ donc holomorphe, et bornée en 0 donc, par prolongement analytique, holomorphe sur V'. Donc, $\hat{\Phi}$ est holomorphe sur V. De plus, $\hat{\Phi}$ est clairement holomorphe sur U. Donc $\hat{\Phi}$ est holomorphe sur S. De même, on montre que sa réciproque est holomorphe, ce qui montre que $\hat{\Phi}$ est un biholomorphisme.

Soit h la métrique usuelle sur $P^1(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{S}^2$, de courbure 1. Sur les systèmes de coordonnées (U, Φ) et (V, i), on montre que

$$h(T\hat{\Phi} \cdot X, T\hat{\Phi} \cdot Y) = (det\ T\hat{\Phi}) \cdot g'(X, Y)$$

ce qui prouve que $\hat{\Phi}^* h$ est conformément équivalente à g', qui est elle-même conformément équivalente à g.

13 Uniformisation en genre $g \geq 2$

Ce cas est le plus difficile à traiter. Il nécessite de recourir à certaines notions d'analyse fonctionnelle.

13.1 Espaces de Sobolev sur une surface

Notons tout d'abord qu'on peut étendre la définition d'une connexion sur TS afin de définir des dérivées à tout ordre d'une fonction C^∞.

Si u est un champ de tenseurs d'ordre 0 (c'est-à-dire $u \in C^\infty(S)$), on définit simplement $\nabla u = du$, champ de formes linéaires.

Si u est un champ de formes linéaires, on peut écrire $u = g(\xi, .)$ où ξ est un champ de vecteurs. On définit alors $\nabla_v u = g(\nabla_v \xi, .)$. ∇u est un champ de formes bilinéaires.

De manière générale, si $u = u_1 \otimes ... \otimes u_{n-1}$, avec u_i champ de formes linéaires, on définit

$$\nabla u = \sum_{i=1}^{n-1} u_1 \otimes ... \otimes u_{i-1} \otimes \nabla u_i \otimes u_{i+1} \otimes ... \otimes u_n$$

C'est un champ de formes n-linéaires.

Localement, tout champ de formes $(n-1)$-linéaires s'écrit sous la forme d'une somme de champs du type $u_1 \otimes ... \otimes u_{n-1}$. Ainsi, en imposant que ∇ soit $\mathbb{R}$-linéaire, ∇ est bien défini.

Remarquons enfin que $\forall p \in S,\ \forall n \in \mathbb{N}$, l'espace $(T_p S^*)^{\otimes n}$ est équipé d'une norme naturelle induite par la métrique, ce qui permet de donner du sens à la définition suivante :

Définition : Soit S une surface riemannienne orientable de forme volume μ_g. Le k-ème espace de Sobolev de S, noté $H^k(S)$ (ou, par la suite, tout simplement H^k) est le complété de $C^k(S)$ pour la norme $\|u\|_{H^k} = \sum_{0 \leq i \leq k} \|\nabla^i u\|_{L^2}$.

Sur $C^k(S)$ muni de la norme précédente, si $0 \leq i \leq k$, l'application $\left\{ \begin{array}{c} C^k(S) \longrightarrow L^2(S) \\ u \longrightarrow \nabla^i u \end{array} \right.$ est uniformément continue, et a pour destination un espace complet, ce qui permet de la prolonger à H^k. Ainsi, si $u \in H^k$, les $\nabla^i u$ sont bien définis en tant que sections L^2 de $(TS^*)^{\otimes i}$.

Proposition : (Injections de Sobolev)

1. L'inclusion $H^1 \hookrightarrow L^p$ pour tout $p \in [1, \infty[$ est compacte (c'est-à-dire que l'image d'une partie bornée par cette inclusion est relativement compacte).
2. On a l'inclusion $H^k \hookrightarrow C^r$ si $k = 1 + r$

Remarque : La deuxième inclusion est une généralisation aux surfaces de l'injection $H^k(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow C^{r,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ lorsque $k = 1 + \alpha + r$ ($C^{r,\alpha}$ est l'espace de Hölder (r, α)). En effet, si χ est une fonction à support compact inclus dans un domaine de carte, et $f \in H^k(S)$ alors χf peut être vue comme une fonction à support compact dans $\mathbb{R}^2$. En prenant $\alpha = 0$, si $k = 1 + r$, alors par l'injection, χf est C^r. Donc f est localement C^r, donc C^r.

Corollaire : (Inégalité de Poincaré)

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $u \in H^1$ de moyenne nulle, $\|u\|^2 \leq C \cdot \|du\|^2$.

Preuve : Supposons le contraire. Il existerait alors une suite $u_n \in H^1$ avec $\int_S u_n = 0$ telle que $\|u_n\|_{L^2} = 1$ et $\|du_n\|_{L^2} \to 0$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans H^1 la compacité de l'inclusion $H^1 \hookrightarrow L^2$ entraîne que quitte à extraire, on peut supposer $u_n \stackrel{L^2}{\to} u_\infty \in L^2$.

$\forall p, q \in \mathbb{N}$, $\|u_p - u_q\|_{H^1} = \|u_p - u_q\|_{L^2} + \|du_p - du_q\|_{L^2} \leq \|u_p - u_q\|_{L^2} + \|du_p\|_{L^2} + \|du_q\|_{L^2}$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy de H^1, donc convergente dans H^1, vers u_∞. Ceci entraîne que $du_n \stackrel{L^2}{\to} du_\infty$. Donc $du_\infty = 0$ donc u_∞ est constante presque partout. $\int_S u_\infty = 0$ donc u_∞ est presque partout nulle. Mais $\|u_\infty\|_{L^2} = 1$. Contradiction ! •

Corollaire : Si $u \in \cap_{k\in\mathbb{N}} H^k$ alors u est C^∞.

Preuve : C'est évident, d'après l'inclusion $H^k \hookrightarrow C^{k-1}$. •

L'injection suivante va également nous servir lors de la preuve de l'existence d'une solution. Pour la preuve, voir la référence [1].

Proposition : (Inégalités de Trudinger)

L'application $\left\{ \begin{array}{c} H^1 \longrightarrow L^1 \\ u \longrightarrow e^{2u} \end{array} \right.$ est continue lorsque H^1 est munie de sa topologie faible et L^1 de sa topologie forte.

13.2 Existence d'une solution

Nous allons à présent montrer l'existence d'une solution pour l'équation $e^{2u}(\kappa - \Delta u)^{=} - 1$.

Par la suite, on notera X l'ensemble $\Big\{u \in H^1 \mid \int_S(-e^{-2u}) = 2\pi \cdot \chi(S)\Big\}$.

Soit $F : \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longrightarrow \int_S(\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 - \kappa u) \end{cases}$

Il s'agit de montrer que la fonctionnelle F admet un minimum sur X, qui correspond à une solution de l'équation.

Notons déjà que l'intêret de se restreindre à l'ensemble X est suggéré par le théorème de Gauss-Bonnet. En effet, si u est une solution de l'équation, $g' = e^{-2u}g$ est alors une métrique de courbure constante égale à -1, de forme volume $\mu_{g'} = e^{-2u}g$. Par conséquent,

$$2\pi \cdot \chi(S) = \int_S (-1)\mu_{g'} = \int_S (-e^{-2u})\mu_g$$

Proposition : X est une sous-variété C^1 de H^1.

Preuve : Soit $\Phi(u) = e^{-2u}$. Déjà, on a vu que $\Phi : H^1 \to L^1$ est continu pour la topologie faible sur H^1, donc également pour la topologie forte.

$$\Phi(u+h) - \Phi(u) = e^{-2u}(e^{-2h} - 1) = e^{-2u}(-2h + \alpha(2h))$$

avec $|\alpha(2h)| \leq 8|h|^2 e^{|h|}$ (appliquer la formule de Taylor-Lagrange).

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_S e^{2u}|h|^2 e^{|h|} \leq \|h\|_{L^4}^2 \cdot \sqrt{\int_S e^{4u} e^{2|h|}}$$

Comme l'inclusion $H^1 \hookrightarrow L^4$ est continue donc lipschitzienne (car linéaire), on peut écrire

$$\int_S e^{2u}|h|^2 e^{|h|} \leq C \cdot \|h\|_{H^1}^2 \cdot \Big(\int_S e^{8u}\Big)^{1/4} \cdot \Big(\int_S e^{4|h|}\Big)^{1/4}$$

or, l'inégalité $e^{|a|} \leq e^a + e^{-a}\ \forall a \in \mathbb{R}$ donne

$$\Big(\int_S e^{4|h|}\Big)^{1/4} \leq \|e^{4h} + e^{-4h}\|_{L^1}^{1/4} \leq (\|e^{4h}\|_{L^1} + \|e^{-4h}\|_{L^1})^{1/4}$$

donc,

$$\int_S e^{2u}|h|^2 e^{|h|} \leq C \cdot \|h\|_{H^1}^2 \cdot \Big(\int_S e^{8u}\Big)^{1/4} \cdot (\|e^{4h}\|_{L^1} + \|e^{-4h}\|_{L^1})^{1/4}$$

Comme $\Phi : H^1 \to L^1$ est continue, $\|e^{4h}\|_{L^1} \to \|1\|_{L^1}$ lorsque $h \to 0$ et de même pour $\|e^{-4h}\|_{L^1}$. Il en résulte que

$$(\|e^{4h}\|_{L^1} + \|e^{-4h}\|_{L^1})^{1/4} = O_{h\to 0}(1)$$

$$e^{-2u}\alpha(2h) = O_{h\to 0}(\|h\|_{H^1}^2)$$

donc, Φ est différentiable.

Montrons que Φ est de classe C^1.

$$\Big\|\Big(\Phi'(u) - \Phi'(v)\Big) \cdot h\Big\|_{L^1} = \int_S 2|h| \cdot |e^{2u} - e^{2v}|$$

Rappelons que l'inégalité des accroisements finis donne :

$$|e^a - e^b| \leq |b-a| \cdot e^{max\{|a|,|b|\}} \leq |b-a| \cdot e^{|a|+|b|}$$

On a donc

$$\Big\|\Big(\Phi'(u) - \Phi'(v)\Big) \cdot h\Big\|_{L^1} \leq 4 \int_S |h| \cdot |u-v| e^{2|u|+2|v}$$

Par Cauchy-Schwarz :

$$\Big\|\Big(\Phi'(u) - \Phi'(v)\Big) \cdot h\Big\|_{L^1} \leq 4 \sqrt{\int_S |h|^2 |u-v|^2} \sqrt{\int_S e^{4|u|+4|v|}}$$

$$\Big\|\Big(\Phi'(u) - \Phi'(v)\Big) \cdot h\Big\|_{L^1} \leq 4 \left(\int_S |h|^4\right)^{1/4} \left(\int_S |u-v|^4\right)^{1/4} \left(\int_S e^{4|u|+4|v|}\right)^{1/2}$$

Par continuité de l'inclusion $H^1 \hookrightarrow L^4$,

$$\Big\|\Big(\Phi'(u) - \Phi'(v)\Big) \cdot h\Big\|_{L^1} \leq C \cdot \|h\|_{H^1} \|u-v\|_{H^1} \cdot \sqrt{\|e^{4|u|+4|v|}\|_{L^1}}$$

En utilisant l'inégalité $\forall a, b \in \mathbb{R},\ e^{|a|+|b|} \leq \sum_{\epsilon_1,\epsilon_2=\pm 1} e^{\epsilon_1 a + \epsilon_2 b}$ on obtient :

$$\Big\|\Big(\Phi'(u) - \Phi'(v)\Big) \cdot h\Big\|_{L^1} \leq C \cdot \|h\|_{H^1} \|u-v\|_{H^1} \cdot \sqrt{\sum_{\epsilon_1,\epsilon_2=\pm 1} \|e^{4(\epsilon_1 u + \epsilon_2 v)}\|_{L^1}}$$

Lorsque u est fixé et $v \to u$, chaque $\|e^{4(\epsilon_1 u+\epsilon_2 v)}\|_{L^1}$ converge vers une limite finie.

Par conséquent, Φ' est continue, et Φ est C^1.

Donc $J(u) = \int_S(-e^{-2u})$ est C^1, de différentielle $J'(u) \cdot h = -2\int_S e^{-2u}h$. C'est une forme linéaire non nulle $\forall u$, donc J est submersive. Par conséquent, d'après le théorème des submersions $X = J^{-1}(2\pi \cdot \chi(S))$ est une sous-variété C^1 de H^1. •

Proposition : Soit u un minimum de F sur X. Alors $e^{2u}(\kappa - \Delta u)^{=} - 1$.

Preuve : Soit $v \in T_uX$. Il existe une courbe $\gamma :]-1,1[\xrightarrow{C^1} X$ telle que $\gamma(0) = u$ et $\dot\gamma(0) = v$.

La minimalité de u implique que

$$0 = \frac{d}{ds}\left[F \circ \gamma\right]_{s=0} = F'(u) \cdot v = \int_S (g(grad\ u, grad\ v) - \kappa v) = \int_S (\Delta u + \kappa)v$$

et ce $\forall v \in T_uX$ c'est-à-dire $\forall v \in H^1$ tel que $\int_S(-ve^{-2u}) = 0$.

Donc, $< v, e^{-2u} >_{L^2}= 0 \implies < v, \Delta u - \kappa >_{L^2}= 0$.

Les formes linéaires $< e^{-2u},\ .\ >_{L^2}$ et $< \Delta u - \kappa,\ .\ >_{L^2}$ ont donc même noyau, et sont donc proportionnelles.

Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta u - \kappa = \lambda e^{-2u}$.

En appliquant à cette égalité le théorème de Gauss-Bonnet, et en se rappelant que $\int_S \Delta u =< d^*du, 1 >_{TS}=< du, d1 >_{(TS)^*}= 0$, on obtient $\lambda = 1$.

u est donc une solution faible de l'équation.

$2u \in H^1$ donc l'injection $\left\{ \begin{array}{l} H^1 \longrightarrow L^1 \\ f \longrightarrow e^{2f} \end{array} \right.$ implique que $e^{4u} \in L^1$ donc $e^{2u} \in L^2$. Donc, d'après l'équation, $u \in H^2$ (en effet, $\Delta u \in H^s \Rightarrow u \in H^{s+2}$). En se rappelant que $H^k \subseteq C^{r-1}$, on montre alors que $e^{2u} \in H^2$. Par récurrence, on montre alors que $u \in \cap_{k\in\mathbb{N}}H^k$.

Avant de montrer que le minimum de F est atteint, montrons que F est minorée.

Proposition : $inf_X\ F > -\infty$

Preuve : Soit $u \in X$. On notera $\alpha = \frac{1}{Aire(S)}\int_S u$ et $u_0 = u - \alpha$.

$$\int_S (-e^{-2u})\mu_g = 2\pi \cdot \chi(S)$$

$$\int_S (-e^{-2\alpha}e^{-2u_0})\mu_g = 2\pi \cdot \chi(S)$$

de cela, on déduit

$$\alpha = -\frac{1}{2}log\ \left(\frac{2\pi \cdot \chi(S)}{\int_S e^{-2u_0}\mu_g}\right)$$

$$F(u) = \int_S \left(\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2 - \kappa(u_0+\alpha)\right)\mu_g = \int_S \left(\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2 - \kappa u_0\right)\mu_g - \alpha\int_S \kappa\mu_g$$

$$F(u) = \int_S \left(\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2 - \kappa u_0\right)\mu_g - 2\pi\alpha\chi(S)$$

$$F(u) = \int_S \left(\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2 - \kappa u_0\right)\mu_g + \pi\chi(S)\cdot log\ \left(\frac{2\pi \cdot \chi(S)}{\int_S e^{-2u_0}\mu_g}\right)$$

L'inégalité $e^a \geq 1+a$ donne :

$$\int_S e^{-2u_0}\mu_g \geq \int_S (1-2u_0)\mu_= Aire(S) = A$$

donc

$$log\ \left(\frac{2\pi \cdot \chi(S)}{\int_S e^{-2u_0}\mu_g}\right) \leq \log\ 2\pi\cdot\chi(S) - log\ A = C$$

où C est indépendante de u. Donc, en se rappelant que $\chi(S) < 0$,

$$F(u) \geq \int_S \left(\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2 - \kappa u_0\right)\mu_g + \pi\chi(S)\cdot C$$

Il reste donc à minorer $\int_S \left(\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2 - \kappa u_0\right)\mu_g$.

On a vu plus haut que pour une certaine constante C',

$$\forall u,\ \|u_0\|_{L^2} \leq C'\cdot\|\nabla u_0\|_{L^2}$$

Soit $\epsilon > 0$. On a :

$$\left|\int_S \kappa u_0\mu_g\right| \leq \int_S |\epsilon\kappa\cdot\frac{u_0}{\epsilon}|\mu_g$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\int_S \kappa u_0\mu_g\right| \leq \frac{1}{2}\left(\int_S \epsilon^2\kappa^2\mu_g + \int_S \frac{u_0^2}{\epsilon^2}\mu_g\right)$$

$$\left|\int_S \kappa u_0\mu_g\right| \leq \frac{1}{2}\left(\epsilon^2\int_S \kappa^2\mu_g + \frac{C'}{\epsilon^2}\|\nabla u_0\|^2\right)$$

donc

$$\int_S \left(\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2 - \kappa u_0\right)\mu_g \geq \int_S \left(\frac{1}{2} - \frac{C'}{\epsilon^2}\right)\|\nabla u_0\|^2\mu_g - \frac{\epsilon^2}{2}\int_S \kappa^2\mu_g$$

En choisissant ϵ de manière à ce que $\frac{1}{2} - \frac{C'}{\epsilon^2} = 0$, on obtient alors une minoration de $F(u)$ indépendante de u. La fonctionnelle F est donc minorée sur X. •

A présent, montrons que l'infimum de F est atteint. Notons a cet infimum.

Soit $u_n = u_{n,0} + \alpha_n \in X$ une suite telle que $a + 1 \geq F(u_n) \geq a$ et $F(u_n) \to a$ en décroissant.

$$\|u_n\|_{H^1} \leq \|u_{n,0}\|_{H^1} + \|\alpha_n\|_{H^1} = \|u_{n,0}\|_{L^2} + \|\nabla u_{n,0}\|_{L^2} + \alpha_n \cdot \sqrt{Aire(S)}$$

$$\|u_n\|_{H^1} \leq (1 + C') \cdot \|\nabla u_{n,0}\|_{L^2} + \alpha_n \cdot \sqrt{Aire(S)}$$

On a montré plus haut que

$$\forall \epsilon, F(u) \geq \int_S \left(\frac{1}{2} - \frac{C'}{\epsilon^2} \right) \|\nabla u_0\|^2 \mu_g - \frac{\epsilon^2}{2} \int_S \kappa^2 \mu_g - C''$$

donc, pour un ϵ tel que $\frac{1}{2} - \frac{C'}{\epsilon^2} = \frac{1}{4}$, on obtient :

$$(a + 1) + C_3 \geq \frac{1}{4} \int_S \|\nabla u_0\|^2 = \frac{1}{4} \|\nabla u_0\|_{L^2}^2$$

De plus, on a montré dans la preuve précédente que $\forall u \in X, log$
$\int_S e^{-2u_0} \leq K$ donc $\alpha_n \geq -\frac{1}{2}K$. Par ailleurs, pour tout $u \in X$,

$$F(u) = \int_S \left(\frac{1}{2} \|\nabla u_0\|^2 - \kappa(u_0 + \alpha) \right) \mu_g$$

$$F(u) \geq \frac{1}{2} \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 - \sqrt{\int_S \kappa^2} \cdot \|u_0\|_{L^2} - \alpha \cdot 2\pi\chi(S)$$

$$F(u) + \sqrt{\int_S \kappa^2} \cdot \|u_0\|_{L^2} \geq \alpha \cdot |2\pi\chi(S)|$$

$$\frac{1}{|2\pi\chi(S)|} \left(F(u) + \sqrt{\int_S \kappa^2} \cdot C' \cdot \|\nabla u_0\|_{L^2} \right) \geq \alpha$$

donc α_n est bornée puisque $F(u_n)$ l'est.

Donc, u_n est bornée dans H^1.

H^1 est un espace de Hilbert séparable, donc isométrique à l^2. En remarquant que la convergence faible sur l^2 correspond à la convergence coordonnée par coordonnée, et par un procédé d'extraction diagonale, on peut montrer que toute suite bornée de l^2 possède une suite extraite qui converge faiblement. Par isométrie, ceci est donc également valable dans H^1. Donc, à extraction près, u_n tend vers u dans H^1.

Au paragraphe précédent, on a vu que $\left\{ \begin{array}{l} H^1 \longrightarrow L^1 \\ u \longrightarrow e^{2u} \end{array} \right.$ est continue lorsque H^1 est munie de sa topologie faible et L^1 de sa topologie forte.

Donc $e^{-2u_n} \xrightarrow{L^1} e^{-2u}$, ce qui implique notamment que $u \in X$.

Par convergence faible sur H^1, $\int_S \kappa u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_S \kappa u$.

A p fixé, $\int_S g(\nabla u_p, \nabla u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_S g(\nabla u_p, \nabla u)$. Il existe donc une extractrice ϕ telle que

$$\left| \int_S g(\nabla u_p, \nabla u_{\phi(p)}) - \int_S g(\nabla u_p, \nabla u) \right| \leq 2^{-p}$$

De plus (convergence faible), $\int_S g(\nabla u_p, \nabla u) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \int_S \|\nabla u\|^2$

donc $\int_S g(\nabla u_p, \nabla u_{\phi(p)}) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} \int_S \|\nabla u\|^2$

Or, $g(\nabla u_p, \nabla u_{\phi(p)}) \leq \|\nabla u_p\| \cdot \|\nabla u_{\phi(p)}\| \leq \frac{1}{2}(\|\nabla u_p\|^2 + \|\nabla u_{\phi(p)}\|^2)$

donc $\int_S \|\nabla u\|^2 = liminf \ \int_S g(\nabla u_p, \nabla u_{\phi(p)}) \leq \frac{1}{2}(liminf \ \int_S \|\nabla u_p\|^2 + liminf \ \int_S \|\nabla u_{\phi(p)}\|^2)$

$$\int_S \left(\|\nabla u\|^2 - \kappa u\right) \leq \frac{1}{2}\left(liminf \ \int_S \left(\|\nabla u_p\|^2 - \kappa u_p\right) + liminf \ \int_S \left(\|\nabla u_{\phi(p)}\|^2 - \kappa u_{\phi(p)}\right)\right)$$

donc, $F(u) \leq a$.

donc comme $u \in X$, $F(u) = a$.

13.3 Unicité de la solution

L'unicité, bien plus facile à obtenir que l'existence, découle d'un raisonnement du type "principe du maximum".

Soit g une métrique sur S de courbure constante égale à -1. Supposons qu'il existe une autre métrique $g' = e^{-2u}g$ vérifiant cette propriété.

Leurs courbures respectives κ et κ' vérifient la relation :

$$\kappa' = e^{2u}(\kappa - \Delta u)$$

$$-1 = e^{2u}(-1 - \Delta u)$$

$$1 + \Delta u = e^{-2u}$$

Soit $p \in S$ un point ou u atteint son maximum (compacité). Alors en coordonnées normales géodésiques, on a vu précédemment que $\Delta u(p) = -\partial_x^2 u(p) - \partial_y^2 u(p)$. Donc, $\Delta u(p) \geq 0$ sinon on aurait $\partial_x^2 u(p) > 0$ ou $\partial_y^2 u(p) > 0$ ce qui est absurde (le voir par un développement de Taylor-Young, par exemple).

Donc, $e^{-2u(p)} \geq 1$ donc $max_S\ u \leq 0$

Un raisonnement similaire montre que $min_S\ u \geq 0$

Donc, $u = 0$, et donc $g' = g$.

Quatrième partie
Uniformisation des surfaces quelconques

Nous nous sommes pour l'instant concentrés sur l'uniformisation dans le cas où les surfaces sont compactes. Dans ce qui suit, nous donnons un aperçu de ce qui se passe dans le cas général. Ceci nécessite d'introduire au préalable quelques notions supplémentaires.

14 Le plan hyperbolique

Le théorème de Poincaré-Koebe affirme qu'il n'existe que trois surfaces holomorphes simplement connexes, la sphère $\mathbb{S}^2$, le plan complexe $\mathbb{C}$ et le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ que nous définissons ci-dessous :

Définition : Le *plan hyperbolique* $\mathbb{H}^2$ est l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ muni de sa structure différentielle et de son orientation naturelles, ainsi que de la métrique $g = \frac{(dx)^2+(dy)^2}{y^2}$.

Les géodésiques de $\mathbb{H}^2$ sont les arcs circulaires de centre appartenant à l'axe des abscisses, et les demi-droites perpendiculaires à l'axe des abscisses.

La courbure est constante égale à -1.

Le groupe des isométries préservant l'orientation est isomorphe à $PSL_2(\mathbb{R})$ via l'application $\left\{ \begin{array}{l} PSL_2(\mathbb{R}) \longrightarrow Isom(\mathbb{H}^2) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right) \end{array} \right.$

Remarque : La définition que nous avons donné du plan hyperbolique n'est qu'une manière de le représenter concrètement. C'est le modèle du *demi-*

plan de Poincaré. Il existe une autre manière de le représenter (modèle du *disque de Poincaré*) consistant à munir le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$ de son orientation usuelle, et de la métrique

$$g = 4\frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}$$

15 Revêtement universel et groupe fondamental de surfaces

DÉFINITION : Le *revêtement universel* d'une surface connexe S est une surface $\tilde{S}$ définie la manière suivante :

Soit $p \in S$. $\tilde{S}$ est le quotient de l'ensemble des lacets $\gamma : [0, 1] \to S$ tels que $\gamma(0) = p$ quotienté par la relation d'homotopie ($[\gamma_1] = [\gamma_2]$ ssi l'un peut être continûment déformé vers l'autre sans bouger le point de départ et le point d'arrivée).

On note π l'application qui à une classe de lacets $[\gamma] \in \tilde{S}$ associe $\gamma(1)$.

Si $[\gamma_0] \in \tilde{S}$, on définit une base de voisinages de $[\gamma]$ de la manière suivante : étant donné une carte $\phi : U \to \mathbb{R}^2$, on note $V_U[\gamma_0]$ l'ensemble des $[\gamma]$ tels que $\pi[\gamma] \in U$ et tels qu'un représentant de $[\gamma]$ peut être continûment déformé en un représentant de $[\gamma_0]$, tout en gardant le point de départ immobile égal à p et le point d'arrivée inclus dans U. Ceci définit une topologie sur $\tilde{S}$.

On montre alors que π est un homéomorphisme local, ce qui permet de remonter la structure différentielle de S sur $\tilde{S}$.

Remarquons tout d'abord que, à difféomorphisme près, une telle définition ne dépend pas du point de référence p choisi (ceci découle de la connexité par arcs de S).

On montre sans difficulté que $\tilde{S}$ est une surface simplement connexe telle que tout $x \in S$ possède un voisinage V_x tel que $\pi^{-1}(V_x)$ est difféomorphe à une somme disjointe au plus dénombrable de copies de V_x. De plus, si S est simplement connexe alors π est un difféomorphisme global.

DÉFINITION : Un *automorphisme de revêtement universel* est une application $f : \tilde{S} \to \tilde{S}$ telle que $\pi \circ f = f$. On note $Aut(\tilde{S} \to S)$ l'ensemble de ces applications. C'est un sous-groupe de $Diff\ \tilde{S}$.

DÉFINITION : Le *groupe fondamental* d'une surface connexe S est défini de la manière suivante :

Soit $p \in S$. $\pi_1(S)$ est l'ensemble des lacets $\gamma : [0,1] \to S$ tels que $\gamma(0) = \gamma(1) = p$, quotienté par la relation d'homotopie.

On munit $\pi_1(S)$ d'une structure de monoïde par la concaténation, qui est évidemment compatible avec la relation d'homotopie. L'élément neutre est le lacet constant égal à p. C'est en fait un groupe car on remarque que si γ est un lacet, en le concaténant avec γ^{-1} (ce même lacet, parcouru à l'envers) alors on obtient un lacet homotope au lacet constant.

Il est à noter, encore une fois, que la connexité par arcs entraîne que cette définition est indépendante du point de référence choisi.

Propriété : Le morphisme de groupes $\pi_1(S) \hookrightarrow Aut(\tilde{S} \to S)$ qui à une classe d'homotopie $[\gamma]$ associe l'automorphisme $[\gamma] \to [\gamma \vee \alpha]$, où $\vee$ désigne la concaténation, est un isomorphisme. De plus, S est difféomorphe au quotient de $\tilde{S}$ par l'action (libre) de $\pi_1(S)$.

16 Intégration des structures presque complexes

Dans la discussion qui va suivre, nous aurons besoin d'utiliser le fait que toute surface orientable munie d'une métrique admet un atlas holomorphe. Ceci découle essentiellement du fait qu'une structure presque complexe sur une surface peut être intégrée. Autrement dit, si J est une structure presque complexe sur S alors il existe un atlas holomorphe $(\phi_i : U_i \to U'_i \subseteq \mathbb{C})_{i \in I}$ tel que $T\phi_i(JX) = i \cdot T\phi_i X$.

Voici une preuve de cette propriété. Soit g une métrique sur S compatible avec J. Soit $p \in S$. Alors il existe un difféomorphisme $\phi : U \to U' \subseteq \mathbb{T}^2$ où U est un voisinage de p. A l'aide d'une partition de l'unité, on peut construire une métrique h sur $\mathbb{T}^2$ coïncidant avec l'image de g par ϕ sur un voisinage $V' \subseteq U'$. Autrement dit, si on note $V = \phi^{-1}(V')$, alors $\phi : (V, g) \to (V', h)$ est une isométrie. D'après le théorème d'uniformisation sur le tore, il existe $u \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ telle que $e^{2u}h$ soit de courbure nulle. Alors $e^{2u\circ\phi}g$ est également de courbure nulle sur V, donc il existe une isométrie $\iota_p : (V, e^{2u\circ\phi}g) \to W \subseteq \mathbb{C}$ conservant l'orientation. On montre alors que $\iota_p : (V, g) \to W$ préserve les structures presque complexes. Une telle application est définie au voisinage de tout $p \in S$. Les $(\iota_p)_{p \in S}$ forment alors un atlas holomorphe intégrant la structure presque complexe.

Ainsi, sur une surface, il y a équivalence entre structures complexes et structures presque complexes.

17 Théorème de Poincaré-Koebe

Le théorème de Poincaré-Koebe est une généralisation du théorème de représentation conforme aux surfaces holomorphes connexes quelconques. Nous n'en donnons que l'énoncé, car sa démonstration est ardue (voir par exemple la référence [3]). Ensuite, nous verrons ce que ce théorème implique quant à l'uniformisation des surfaces riemanniennes quelconques.

Théorème : (Poincaré-Koebe, 1907)
Toute surface S simplement connexe munie d'un atlas holomorphe est biholomorphe à l'une des surfaces suivantes :

1. $\mathbb{S}^2$, si S est compacte
2. $\mathbb{H}^2$, si S est non compacte et qu'il existe des fonctions holomorphes $f : S \to \mathbb{C}$ non constantes et bornées
3. $\mathbb{C}$ sinon

Tout d'abord, remarquons en quoi ce théorème généralise le théorème de représentation conforme : si U est un ouvert simplement connexe strictement inclus dans $\mathbb{C}$, il est non compact et admet des fonctions holomorphes non constantes et bornées (on peut se ramener au cas où 0 est hors de U. Prendre une racine carrée $\sqrt{.}$ sur U, prendre $V \subseteq \sqrt{U}$ ouvert. Alors $-V$ et $\sqrt{U}$ ne s'intersectent pas. Prendre $z_0 \in -V$ et $f(z) = 1/(\sqrt{z} - z_0)$). U est donc biholomorphe à $\mathbb{H}^2$, par le théorème précédent. Or, la métrique de Poincaré sur $\mathbb{D}$ et la métrique euclidienne sont conformément équivalentes, et induisent donc la même structure holomorphe. Donc, l'identité induit un biholomorphisme $\mathbb{H}^2 \to \mathbb{D}$. Donc U est biholomorphe à $\mathbb{D}$, ce qui constitue le résultat du théorème de représentation conforme.

Voyons ce que ce théorème implique pour une surface quelconque S. Le revêtement universel $\tilde{S}$ est une surface holomorphe simplement connexe, donc on est dans le cadre de l'application du théorème précédent.

Premier cas : $\tilde{S} \simeq \mathbb{S}^2$. Alors S est nécessairement compacte, donc d'après le théorème d'uniformisation montré dans ce texte, la métrique de S est conformément équivalente à une métrique de courbure constante.

Deuxième cas : $\tilde{S} \simeq \mathbb{C}$. On a vu plus haut que $\pi_1(S) \hookrightarrow Aut(\tilde{S} \to S) \subseteq Diff\ \mathbb{C}$ induit une action libre par difféomorphismes compatibles avec la structure complexe, donc par biholomorphismes, de $\pi_1(S)$ sur $\tilde{S}$ et telle que $S \simeq \frac{\tilde{S}}{\pi_1(S)}$. Les biholomorphismes de $\mathbb{C}$ sont des similitudes directes, et de plus, comme l'action est libre, les biholomorphismes induits par $\pi_1(S)$ sont simplement des translations. Donc, S est quotient de $\tilde{S}$ par un groupe libre et discret de translations. Trois sous-cas sont donc à traiter :

1. Si le groupe est trivial, $S \simeq \mathbb{C}$.
2. Si le groupe est de rang 1 alors $S \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}$. C'est donc un cylindre.
3. Si le groupe est de rang 2 alors $S \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$. S est donc un tore.

Enfin, comme $\pi_1(S)$ agit par isométries alors la métrique de courbure nulle sur $\mathbb{C}$ descend sur le quotient, qui hérite donc de la courbure nulle. S est donc biholomorphe à une surface de courbure nulle ce qui prouve que S peut être uniformisée.

Troisième cas : $\tilde{S} \simeq \mathbb{H}^2$. De même que précédemment, $\pi_1(S)$ agit librement par biholomorphismes sur $\mathbb{H}^2$. Or on peut montrer que tout biholomorphisme de $\mathbb{H}^2$ est une isométrie pour la métrique hyperbolique. Donc $\pi_1(S)$ agit par isométries, et donc $\mathbb{H}^2/\pi_1(S)$ hérite d'une métrique de courbure -1. S est biholomorphe à $\mathbb{H}^2/\pi_1(S)$, donc sa métrique est conformément équivalente à une métrique de courbure -1.

Remarquons enfin que dans les trois cas précédents, la métrique uniformisée sur S est géodésiquement complète (c'est-à-dire que son flot géodésique est défini pour un temps arbitrairement long). En effet, dans le premier cas, ceci découle de la compacité. Dans les deux derniers cas, ceci découle du fait que S est réalisé comme quotient d'une surface géodésiquement complète par un groupe agissant librement et discret d'isométries.

En résumé, on a l'énoncé suivant :

Théorème : Toute surface riemannienne connexe et orientable admet une métrique de courbure constante conformément équivalente à sa métrique d'origine, et géodésiquement complète.

Bibliographie

1. Michael Taylor, *Partial differential equations I, II, III*, 1996, Springer
2. Gallot, Hulin, Lafontaine, *Riemannian Geometry*, 2004, Springer
3. Farkas, Kra, *Riemann surfaces*, 1992, Springer
4. Sergiu Moroianu, Cours sur les surfaces, disponible à l'adresse : `http://www.imar.ro/ sergium/courses.html`
5. Frédéric Paulin, Cours de géométrie différentielle et de topologie algébrique élémentaire, tous deux disponibles à l'adresse : `http://www.math.u-psud.fr/ paulin/notescours/liste_notescours.html`