Etude de problèmes de contrôlabilité sur les fluides visqueux compressibles. Problèmes de continuation unique.

Sylvain Ervedoza
sous la direction de Jean-Pierre Puel

La théorie du contrôle est censée modéliser des problèmes d'ingénierie. Étant donné un système physique régi par une équation d'évolution, on considère que l'on peut agir et modifier ce système, par exemple en rajoutant une source sur un sous domaine, ou en changeant l'information sur la frontière, afin de l'amener dans un état cible, par exemple sur un état stationnaire instable, ou encore sur une trajectoire périodique.

Dans le cadre de ma thèse, j'aimerais considérer les problèmes de contrôlabilité des fluides visqueux compressibles, en travaillant dans le prolongement des résultats obtenus dans [7], qui prouve la contrôlabilité locale sur les trajectoires des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible, sous certaines conditions de régularité pour la trajectoire cible.

Théorème (Fernandez-Cara, Guerrero, Imanuvilov et Puel). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, avec $N = 2$ ou $N = 3$. Soit $\omega \Subset \Omega$.*
Considérons une solution $\bar{y}$ de l'équation des fluides parfaits incompressibles sur un domaine borné régulier Ω

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t \bar{y} - \Delta \bar{y} + \nabla.(\bar{y} \otimes \bar{y}) + \nabla \bar{p} = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ \nabla.\ \bar{y} = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ \bar{y} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \\ \bar{y}(t=0) = \bar{y}_0 & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{1}$$

Supposons que cette trajectoire $\bar{y}$ satisfasse en plus les conditions suivantes :

$$\begin{array}{l} \bar{y} \in L^\infty(Q)^N \\ \partial_t \bar{y} \in L^2((0,T); L^\sigma(\Omega)^N) \left\{\begin{array}{l} \sigma > 1 \text{ si } N = 2 \\ \sigma > \frac{6}{5} \text{ si } N = 3 \end{array}\right. \end{array} \tag{2}$$

Alors il existe $\delta > 0$, tel que pour tout y_0 satisfaisant $\|\bar{y}_0 - y_0\|_{L^{2N-2}(\Omega)\cap H} < \delta$, il existe un contrôle $v \in L^2(\omega \times (0,T))^N$, et une solution (y,p) de l'équation

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t y - \Delta y + \nabla.(y \otimes y) + \nabla p = v 1_\omega & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ \nabla.\ y = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \\ y(t=0) = y_0 & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{3}$$

telle que $y(T) = \bar{y}(T)$.

Mais on comprend bien moins bien la théorie des fluides compressibles. Rappelons tout d'abord les équations, l'une représentant la conservation de la masse, et l'autre la conservation de l'impulsion totale.

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho \vec{u}) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ \partial_t(\rho \vec{u}) - \mu \Delta \vec{u} + \mathrm{div}(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + (\lambda + \mu)\nabla(\mathrm{div}(u)) + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ \rho(t=0) = \rho_0 & \text{dans } \Omega \\ \rho \vec{u}(t=0) = \vec{q} & \text{dans } \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{4}$$

où p est la pression, déterminée par une loi d'état. Par exemple, pour les gazs parfaits, on distingue deux lois :

$$p \equiv p(\rho) \begin{cases} = a\rho & \text{(isotherme)} \\ = a\rho^\gamma & \text{(adiabatique)} \end{cases} \tag{5}$$

En fait, nous nous restreindrons au cas adiabatique, plus simple, contrairement à ce que l'on pourrait croire. Ainsi, dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, P.-L. Lions a démontré dans [11] l'existence de solutions faibles globales pour $\gamma \geq \frac{9}{5}$, résultat récemment amélioré dans [6]. Pour comprendre ces résultats, nous devons tout d'abord définir ce qu'est une solution à ce problème. On dira que les fonctions $(\rho, \vec{u})$ sont solutions d'énergie finie si

- $\rho \geq 0$, $\rho \in L^\infty((0,T), L^\gamma(\Omega))$, et $\vec{u} \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega)^3)$.
- L'énergie $E(t) = \int_\Omega \frac{1}{2}\rho|\vec{u}|^2 + \frac{a}{\gamma-1}\rho^\gamma$ est localement intégrable et l'inégalité ci-après est vraie dans $\mathcal{D}'(0,T)$.

$$\frac{d}{dt}E(t) + \mu \int |\nabla \vec{u}|^2 + (\lambda + \mu)|\mathrm{div}\vec{u}|^2 \leq 0 \tag{6}$$

- Les équations 4 sont vraies dans $\mathcal{D}'((0,T) \times \Omega)$. De plus, l'équation de conservation de la masse est aussi vraie dans $\mathcal{D}'((0,T) \times \mathbb{R}^3)$, si on prolonge tout par 0.
- L'équation de conservation de la masse est vérifiée au sens des solutions renormalisées, (cf Di Perna-Lions [3]) c'est-à-dire que l'équation (7) est vraie dans $\mathcal{D}'((0,T) \times \Omega)$ pour tout $b \in C^1(\mathbb{R})$ constante en l'infini.

$$\partial_t b(\rho) + \mathrm{div}(b(\rho)u) + (b'(\rho)\rho - b(\rho))\mathrm{div}(u) = 0 \tag{7}$$

Théorème (Feireisl, Novotny, Petzeltova [6]). *Soit Ω un domaine borné régulier. Supposons que $\gamma > \frac{3}{2}$, $\rho_0 \geq 0$, $\rho_0 \in L^\gamma(\Omega)$, $\vec{q} = 0$ quand $\rho_0 = 0$, et que $\frac{|\vec{q}|^2}{\rho_0} \in L^1(\Omega)$.*
Alors, T étant donné, il existe une solution d'énergie finie $(\rho, \vec{u})$ aux équations de Navier Stokes compressible.

Pour étudier la contrôlabilité de ces équations non linéaires, en général, on démontre la contrôlabilité du problème linéarisé (Après, on utilise un théorème des fonctions implicites). Pour cela, il existe principalement deux méthodes, l'une mise au point par J.-M. Coron

[2], et utilisée par exemple par O. Glass [9] ou K. Beauchard [1], l'autre reposant sur des inégalités de Carleman, que l'on peut trouver notamment dans les travaux de A. Fursikov et O. Imanuvilov [8], ou dans le papier de E. Fernandez-Cara, S. Guerrero, O. Imanuvilov et J.-P. Puel [7].

Ici, les problèmes naturels que l'on peut envisager, outre les questions de contrôlabilité des équations (4), concernent les généralisations du théorème de contrôlabilité locale sur les équations de Navier-Stokes incompressible, par exemple en démontrant la contrôlabilité approchée, ce qui suffirait à prouver la contrôlabilité globale. D'autre part, on peut se demander ce qui se passe sur un ouvert extérieur (i.e. non borné). De plus, il est aussi intéressant de se demander si on peut atténuer la condition $\gamma > \frac{3}{2}$ dans le théorème précédent, puisque les gaz parfaits monoatomiques satisfont la loi d'état (5) avec $\gamma = 1,4$.

Mais il convient aussi de remarquer que les inégalités de Carleman ont d'autres applications tout à fait non triviales, notamment elles permettent de prouver des résultats de continuation unique délicats. Citons le résulat d'unicité rétrograde pour des opérateurs paraboliques obtenu par J.-L. Lions et B. Malgrange dans [10], ou encore la continuation unique locale démontrée par J.-C. Saut et B. Scheurer dans [12]. Enfin, mentionnons les travaux récents de L. Escauriaza, G. Seregin et V. Sverak, dans [4], qui nient la possibilité d'exercer un contrôle frontière pour l'équation de la chaleur sur un demi-espace, et ce, quels que soient les espaces fonctionnels dans lesquels on se place (Notamment leur preuve concerne une classe de fonctions plus grosse que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N_+)$), en établissant l'unicité rétrograde de cette équation sans condition frontière !

Théorème (Escauriaza, Seregin et Sverak [4]). *Soit u satisfaisant l'équation parabolique rétrograde suivante :*

$$\partial_t u + \Delta u = b.\nabla u + a.u \quad \text{sur } \mathbb{R}^N_+ \times (0,T) \tag{8}$$

Supposons de plus que

$$u(t=0) = 0 \tag{9}$$

Si on impose les conditions naturelles suivantes sur u,

$$\left\{ \begin{array}{l} u \\ \partial_t u \\ \nabla^2 u \end{array} \right. \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N_+ \times (0,T)) \tag{10}$$

$$\exists M_1 > 0, \exists M_2 > 0,\ \forall (x,t) \in \mathbb{R}^N_+ \times (0,T),\ |u(x,t)| \leq M_1 \exp(M_2 |x|^2) \tag{11}$$

Alors la fonction u est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^N_+ \times (0,T)$.

Ce résultat, aux antipodes des travaux de A. Fursikov et O. Imanuvilov [8], qui prouve la possiblité de contrôler exactement l'équation de la chaleur sur un ouvert borné, est de plus très utile en mécanique des fluides puisqu'il permet de démontrer de la régularité pour les solutions de l'équation de Navier-Stokes, que l'on peut voir comme une extension de la condition de Ladyzhenskaya-Prodi-Serrin au cas où l'espace est invariant par le changement d'échelle naturel.

Théorème (Escauriaza, Seregin et Sverak [5]). *Soit v une solution faible de Leray-Hopf des équations de Navier-Stokes* (1) *pour un fluide incompressible dans* $\mathbb{R}^3 \times (0,T)$ *telle que* $v \in L^\infty((0,T); L^3(\mathbb{R}^3))$. *Alors* $v \in L^5(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$. *En particulier, la fonction v est régulière.*

Ainsi, nous pouvons nous attendre à de nouveaux résultats sur la régularité des solutions des équations de Navier-Stokes, qui est encore aujourd'hui un problème ouvert, via des résultats de continuation unique. Peut-être même pouvons nous tenter de simplifier l'argument en démontrant l'unicité rétrograde des équations de Stokes (Navier-Stokes linéarisé) sur un domaine extérieur. Enfin, on peut aussi se demander quels types d'ouverts on peut contrôler, notamment le cas d'une bande semble particulièrement pertinent, puisqu'il est intermédiaire entre un ouvert borné et un demi-espace.

Conclusion :
De nombreux problèmes intéressants apparaissent en mécanique des fluides, tant du point de vue de la contrôlabilité que de l'unicité rétrograde, et sont à l'origine de résultats parfois étonnamment éloignés. Je m'efforcerai donc, dans le cadre de ma thèse, de travailler sur ces problèmes précis, en essayant de garder à l'esprit les applications possibles et une vue globale des problèmatiques concernées.

Références

[1] K. Beauchard. Local controllability of 1-d schrödinger equation. *preprint, Université Paris-Sud*, 2004.

[2] J.-M. Coron. On the controllability of 2-d incompressible perfect fluids. *J. Math. Pures Appl.*, 75(2) :155–188, 1996.

[3] R.J. DiPerna and P.-L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and sobolev spaces. *Invent. Math.*, 98 :511–547, 1989.

[4] L. Escauriaza, G. Seregin, and V. Sverak. Backward uniqueness for the heat operator in a half space. *St. Petersburg Math. J.*, 15(1), 2003.

[5] L. Escauriaza, G. Seregin, and V. Sverak. $l_{3,\infty}$- solutions to the navier-stokes equations and backward uniqueness. *Uspekhi Matematicheskih Navk*, 58(2) :3–44, 2003.

[6] E. Feireisl, A. Novotný, and H. Petzeltová. On the existence of globally defined weak solutions to the navier-stokes equations. *J. Math. Fluid Mech.*, 3 :358–392, 2001.

[7] E. Fernandez-Cara, S. Guerrero, O. Yu. Imanuvilov, and J.-P. Puel. Local exact controllability of the navier stokes system. *J. Math. Pures Appl*, 83 :1501–1542, 2004.

[8] A. Fursikov and O. Imanuvilov. *Controllability of evolution equations*, volume 34. Seoul National University, 1996.

[9] O. Glass. Exact boundary controllability of 3-d euler equations. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 5 :1–44, 2000.

[10] J.-L. Lions and B. Malgrange. Sur l'unicité rétrograde dans les problèmes mixtes paraboliques. *Math. Scand.*, 8 :277–286, 1960.

[11] P.-L. Lions. *Mathematical topics in fluid dynamics, Vol.2, Compressible models*. Oxford Science Publication, 1998.

[12] J.-C. Saut and B. Scheurer. Unique continuation for some evolution equations. *Journal of differential equations*, 66 :118–139, 1987.