Équilibres d'attentes rationnelles dans des économies avec des interactions locales

Guilleron Jean-philippe
Espinasse Thibault

26 juin 2006

Table des matières

1 Introduction

Le but de ce mémoire est de modéliser un environnement socioéconomique dans lequel les agents rationnels interagissent localement, en dehors de tout impact des marchés sur leurs choix, dans le but de théoriser une détermination du choix des agents par leur milieu, par exemple la famille, les proches ou les ethnies. Nous étudierons les équilibres d'attentes rationnelles (comment les agents vont choisir leurs actions en prévoyant celles des autres agents rationnels) dans les cas d'information totale (interactions globales) et partielles (interactions locales). Nous nous restreindrons aux cas d'interactions à sens unique.

2 Économies statiques avec interactions locales

2.1 Définitions et notations

Soit $\mathbb{A}$ un ensemble dénombrable d'agents rationnels a (indexé par $\mathbb{Z}$). Soit Θ un sous ensemble de $\mathbb{R}$, et $(\Omega, F, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et $(\theta^a)_{a\in\mathbb{A}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes à valeur dans Θ de même loi ν sur cet espace de probabilité. Enfin soit X un segment de $\mathbb{R}$. L'espace Θ désigne l'espace des types des agents ; la loi des variables θ^a n'est pas forcément homogène, ce qui permet d'intégrer une hétérogénéité directement dans la loi ν. L'espace X désigne l'espace des actions. On va désormais introduire la fonction d'utilité, qui caractérise la préférence de chaque agent, et que chaque agent va donc essayer de maximiser ; elle permet de modéliser des interactions, que l'on va choisir à sens unique (ce qui permet d'exclure les stratégies de groupes, qui peuvent mener à plusieurs équilibres distincts) ; on supposera même que l'agent a interagit seulement avec l'agent $a+1$.

Soit $u : X \times X \times \Theta \to \mathbb{R}$. On va de plus faire l'hypothèse que u est continue et strictement concave par rapport à la première variable.

2.1.1 Économie statique

Définition 2.1 *Une économie statique avec interactions locales est un quintuplet $S = (X, \Theta, u, \nu, N)$, où $N \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ désigne l'étendue de l'information connue par chaque agent : l'agent a connait les θ^b pour $a \leq b \leq a+N$*

Pour tout vecteur $\theta_N = \left\{\theta^b\right\}_{0\leq b\leq N}$, on notera aussi $T^a\theta_N = \left\{\theta^b\right\}_{a\leq b\leq a+N}$

On peut désormais introduire la fonction $g^a : \Theta^N \to X$ de l'agent a, qui à une information $T^a\theta_N$ associe une action x^a.

Le problème d'optimisation revient à trouver une fonction de décision telle que l'action choisie est celle qui maximise l'utilité réelle ou attendue, selon si l'information est partielle ou totale.

2.1.2 Équilibre

Définition 2.2 *Soit $S = (X, \Theta, u, \nu, N)$ une économie statique avec interactions locales, soit $(g^{*a})_{a \in \mathbb{A}}$ une famille de fonctions mesurables de Θ^N dans X*

1. *Cas d'une information totale : $(g^{*a})_{a \in \mathbb{A}}$ est un équilibre si et seulement si*

$$\forall a \in \mathbb{A},\ \ g^{*a}(T^a \theta_N) = arg\ \ max_{x^a \in X}\ \ u(x^a, g^{*a+1}(T^{a+1}\theta_N), \theta^a),\ \ \mathbb{P}\ \ p.s.$$

2. *Cas d'une information partielle : $(g^{*a})_{a \in \mathbb{A}}$ est un équilibre si et seulement si $\forall a \in \mathbb{A},\ \mathbb{P}\ \ p.s.$*

$$g^{*a}(T^a \theta_N) = arg\ \ max_{x^a \in X}\ \ \int_\Theta u(x^a, g^{*a+1}(\theta^{a+1}, ..., \theta^{a+N}, \theta), \theta^a) \nu(\mathrm{d}\theta)$$

De plus l'équilibre est symétrique si et seulement si $g^{*a} = g^*\ \ \mathbb{P}\ \ p.s.$

Pour assurer l'existence et l'unicité d'équilibres, on fait en plus l'hypothèse **H** :

1. u est α-concave par rapport à la première variable :
   $\forall y, z,\ \ x^a \mapsto\ \ u(x^a, y, z) + \frac{1}{2}\alpha (x^a)^2$ est concave
2. u est différentiable par rapport à la première variable,
   et $\exists L : \Theta \to \mathbb{R}$ tel que
   $\left|\frac{\partial}{\partial x} u(x, y, \theta^0) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, \hat{y}, \theta^0)\right| \leq L(\theta^0)\,|y - \hat{y}|$, avec $\mathbb{E}\left[L(\theta^0)\right] < \alpha$

On définit maintenant, $\forall \eta > 0$, une distance sur $\Theta^0 := \left\{\theta_\infty = (\theta^i)_{i \geq 0}, \theta^i \in \Theta\right\}$:

$$d_\eta(\theta, \hat{\theta}) = \sum_{a \geq 0} 2^{-\eta a} \left|\theta^a - \hat{\theta}^a\right|$$

Enfin, on note $Lip_\eta(1) := \left\{f : \Theta^0 \to X; \left|f(\theta) - f(\hat{\theta})\right| \leq d_\eta(\theta, \hat{\theta})\right\}$

2.2 Résultats : conditions d'équilibres

2.2.1 Information totale

Théorème 2.1 *Soit $S = (X, \Theta, u, \nu, N)$ une économie statique avec interactions locales (et avec information totale : $N = \infty$)*

1. *Si la fonction d'utilité u satisfait **H**, alors S admet, à un ensemble de mesure nulle près, un unique équilibre symétrique g^*.*
2. *Si le second point de l'hypothèse **H** est remplacée par **H'** :*

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} u(x, y, \theta^a) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, \hat{y}, \hat{\theta}^a)\right| \leq L\ \max(|\hat{y} - y|, \left|\theta - \hat{\theta}\right|)\ \ avec\ \ L < \alpha$$

alors S admet, à un ensemble de mesure nulle près, un unique équilibre symétrique g^* qui vérifie de plus :

$$\exists \eta^* > 0 \quad \textit{tel que} \left| g^*(\theta) - g^*(\hat{\theta}) \right| \leq \frac{L}{\alpha} d_{\eta^*}(\theta, \hat{\theta})$$

On va démontrer d'abord quelques lemmes pour démontrer ce théorème :

Lemme 2.1 *Soit X un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, et $(Y, \|.\|_Y)$ un espace vectoriel normé. Soit $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie :*

1. *$\forall y \in Y$, la fonction $x \to F(x, y)$ est α-concave sur X.*
2. *F est différentiable par rapport à la première variable et la dérivée partielle $F_1(.) = \frac{\partial}{\partial x} F(.)$ vérifie :*
   $\exists G : Y \times Y \to \mathbb{R}$ tel que $|F_1(x, y_1) - F_1(x, y_2)| \leq G(y_1, y_2) \forall x \in X$

Alors il existe une unique fonction $f : Y \to X$ telle que
$f(y) = arg\ \sup_{x \in X} F(x, y)$ et $|f(y_1) - f(y_2)| \leq \frac{1}{\alpha} G(y_1, y_2)$.

Preuve du lemme 1.1 : Démontrons tout d'abord que si $\pm\infty \in X$, alors $\forall y \in Y, lim_{x \to \pm\infty} F(x, y) = -\infty$; en effet, $F(., y)$ étant α-concave pour tout y, on en déduit que $F_1(., y) + \alpha x$ est décroissante, et donc pour $x_0 \in X$ et pour tout $x \in X, y \in Y$, $F_1(x, y) \leq F_1(x_0, y) + \alpha(x_0 - x)$ d'où

$$\forall x \in X, y \in Y, \quad F(x, y) \leq F(x_0, y) + (F_1(x_0, y) + \alpha x_0)(x - x_0) - \frac{\alpha}{2}(x - x_0)^2$$

.
La α-concavité de la fonction $F(., y)$ donne alors l'existence et l'unicité de la fonction f définie par $f(y) = arg\ \sup_{x \in X} F(x, y)$. Montrons maintenant que $\forall x \in X, F_1(f(y), y)(f(y) - x) \geq 0$; en effet, si $f(y)$ est intérieur, on a $F_1(f(y), y) = 0$, sinon, $f(y)$ est une borne de X, finie, par exemple inférieure, qui vérifie donc $F_1(f(y), y) \leq 0$ par concavité de $F(., y)$, et $x - f(y) \geq 0$.
On a alors, par décroissance de $F_1(x, y) + \alpha x$, $\forall x \in X$ tel que $x \leq f(y)$,
$F_1(f(y), y) + \alpha f(y) \leq F_1(x, y) + \alpha x$, d'où

$$F_1(x, y)(f(y) - x) \geq \alpha(f(y) - x)^2 + F_1(f(y), y)(f(y) - x) \geq \alpha(f(y) - x)^2$$

On peut faire de même pour $x \geq f(y)$, et on obtient

$$\forall y \in Y, \forall x \in X, \alpha(f(y) - x)^2 \leq F_1(x, y)(f(y) - x)$$

En particulier, $\forall y_1, y_2 \in Y, F_1(f(y_2), y_1)(f(y_1) - f(y_2)) \geq \alpha(f(y_1) - f(y_2))^2$
Puis $\alpha(f(y_1) - f(y_2))^2 \leq (F_1(f(y_2), y_1) - F_1(f(y_2), y_2))(f(y_1) - f(y_2))$ car $F_1(f(y_2), y_2))(f(y_1) - f(y_2)) \leq 0$.
D'où le lemme :

$$|\alpha(f(y_1) - f(y_2))| \leq |F_1(f(y_2), y_1) - F_1(f(y_2), y_2)| \leq G(y_1, y_2)$$

En particulier, si $G(y_1, y_2) = L \|y_1 - y_2\|$ alors $|f(y_1) - f(y_2)| \leq \frac{L}{\alpha} \|y_1 - y_2\|$

Pour démontrer le théorème, on va maintenant introduire un opérateur $V : B(\Theta^0, X) \to B(\Theta^0, X)$ (où $B(\Theta^0, X)$ désigne l'ensemble des fonctions bornées de Θ^0 dans X) tel que tout équilibre symétrique g^* soit un point fixe de l'opérateur V : $\forall \theta \in \Theta^0, V_g(\theta) = arg \quad max_{x^0 \in X} \quad u(x^0, g \circ T(\theta), \theta^0)$

Lemme 2.2 *Si la fonction d'utilité u est uniformément α-concave en la première variable et si elle satisfait* ***H'****, l'opérateur V vérifie :*

1. *$\exists \eta^* > 0$ tel que V envoie $Lip_{\eta^*}(1)$ continuement dans lui-même*
2. *L'opérateur V a un unique point fixe g^*, et $g^* \in Lip_{\eta^*}(1)$*

Preuve du lemme 2.2 Soit $h(y, \theta^0) = \arg \max_{x \in X} \quad u(x, y, \theta^0)$ l'action optimale conditionnelle de l'agent $0 \in \mathbb{A}$, en fonction de son type θ^0 et de l'action $y \in X$ de son voisin.
Munissons $X \times \Theta$ de la norme infinie. Il vient, en appliquant le lemme 2.1 à $F(x, y') = u(x, (y, \theta))$ avec $G((y, \theta^0), (\hat{y}, \hat{\theta}^0)) = L \max \left\{ |y - \hat{y}|, \left|\theta^0 - \hat{\theta}^0\right| \right\}$:
$\left|h(y, \theta^0) - h(\hat{y}, \hat{\theta}^0)\right| \leq \gamma \max \left\{ |y - \hat{y}|, \left|\theta^0 - \hat{\theta}^0\right| \right\}$
où $\gamma = \frac{L}{\alpha} < 1$
Montrons que V est un opérateur continu de l'espace de Banach $(B(\Theta^0, X), \|.\|_\infty)$
On a : $|V_g(\theta) - V_{\hat{g}}(\theta)| \leq \gamma |g \circ T(\theta) - \hat{g} \circ T(\theta)| \leq \gamma \|g - \hat{g}\|_\infty$
où $g, \hat{g} \in B(\Theta^0, X)$ (prendre $y = g \circ T(\theta), \hat{y} = \hat{g} \circ T(\theta)$)
D'où : $\|V_g - V_{\hat{g}}\|_\infty \leq \gamma \|g - \hat{g}\|_\infty$.
Puisque $L < \alpha$, V est une contraction et admet donc un unique point fixe, grâce au théorème du point fixe de Banach.
Soient $\eta > 0$ tel que $2^\eta \gamma < 1$, et $g \in Lip_\eta(1)$.

$$\begin{aligned}
\left|V_g(\theta) - V_g(\hat{\theta})\right| &\leq \gamma \max \left\{ \left|\theta^0 - \hat{\theta}^0\right|, \left|g \circ T(\theta) - g \circ T(\hat{\theta})\right| \right\} \\
&\leq \gamma \max \left\{ \left|\theta^0 - \hat{\theta}^0\right|, \textstyle\sum_{a \geq 1} 2^{-\eta(a-1)} \left|\theta^a - \hat{\theta}^a\right| \right\} \\
&\leq 2^\eta \gamma (\left|\theta^0 - \hat{\theta}^0\right| + \textstyle\sum_{a \geq 1} 2^{-\eta a} \left|\theta^a - \hat{\theta}^a\right|) \\
&\leq d_\eta(\theta^0, \hat{\theta}^0)
\end{aligned}$$

Cela prouve que $V_g(\theta)$ est 1-lipschitzienne(et même $2^\eta\gamma$-lipschitzienne si on majore plus finement), donc que V_g envoie $Lip_\eta(1)$ dans lui-même. Or, puisque $Lip_\eta(1)$ est un fermé (pour la norme de la congergence uniforme) du Banach $(B(\Theta^0, X), \|.\|_\infty)$, $Lip_\eta(1)$ est un Banach. V peut alors être vu comme une contraction de $(Lip_\eta(1), \|.\|_\infty)$, et son unique point fixe g^* appartient à $Lip_\eta(1)$.

Preuve du théorème 2.1 :

1. L'opérateur h défini au lemme 2.2 vérifie $\left|h(y,\theta^0)-h(\hat{y},\theta^0)\right| \leq \frac{L(\theta^0)}{\alpha}\left|y-\hat{y}\right|$ où θ^0 est fixé (en appliquant à nouveau le lemme 2.1 à $F_{\theta^0}(x,y) = u(x,y,\theta^0)$ avec $G_{\theta^0}(y,\hat{y}) = L(\theta^0)\left|y-\hat{y}\right|$.
On a alors :
$\left|V_g(\theta)-V_{\hat{g}}(\theta)\right| \leq \frac{L(\theta^0)}{\alpha}\left|g\circ T(\theta)-\hat{g}\circ T(\theta)\right|$
$\forall g,\hat{g}\in B(\Theta^0,X)$
Les types étant indépendants entre agents, les variables aléatoires $L(\theta^0)$ et $\left|g\circ T(\theta)-\hat{g}\circ T(\theta)\right|$ sont indépendantes, d'où :
$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}\left[\left|V_g(\theta)-V_{\hat{g}}(\theta)\right|\right] & \leq & \frac{\mathbb{E}\left[L(\theta^0)\right]}{\alpha}\mathbb{E}\left[\left|g\circ T(\theta)-\hat{g}\circ T(\theta)\right|\right] \\ & \leq & \gamma\mathbb{E}\left[\left|g\circ T(\theta)-\hat{g}\circ T(\theta)\right|\right]\end{array}$$
où $\gamma = \frac{\mathbb{E}\left[L(\theta^0)\right]}{\alpha} < 1$
Tous les types étant distribués identiquement, on obtient :
$\mathbb{E}\left[\left|V_g(\theta)-V_{\hat{g}}(\theta)\right|\right] \leq \gamma\mathbb{E}\left[\left|g(\theta)-\hat{g}(\theta)\right|\right]$
Si V^n désigne l'opérateur V itéré n fois, on a
$$lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left[\left|V_g^n(\theta)-V_{\hat{g}}^n(\theta)\right|\right] = 0 \quad (*)$$
En particulier, la suite $(V^n g(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait :
$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}\left[\left|V^{(n+m)}g(\theta)-V^n g(\theta)\right|\right] & = & \mathbb{E}\left[\left|V^n(V^m g)(\theta)-V^n g(\theta)\right|\right] \\ & \leq & \gamma^n\mathbb{E}\left[\left|V^m g(\theta)-g(\theta)\right|\right] \\ & \leq & C\gamma^n\end{array}$$
où $C = \frac{\mathbb{E}[Vg(\theta)-g(\theta)]}{1-\gamma} < \infty$
Ainsi, $(V^n g(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de Cauchy dans $L^1(\mathbb{P})$ qui est complet, il existe une variable aléatoire $G^*[g](\theta)$, définie de manière unique modulo la relation d'égalité $\mathbb{P}$ $p.s.$, telle que $V^n g(\theta) \to G^*[g](\theta)$ dans $L^1(\mathbb{P})$.
Par (*), la limite L^1 $G^*[g](\theta)$ ne dépend pas de g.
Nous avons donc démontré qu'il existe une variable aléatoire $g^*(\theta)$ définie de manière unique modulo la relation d'égalité presque partout, telle que :
$V^n g(\theta) \to g^*(\theta)$ dans $L^1(\mathbb{P})$
De plus, par l'inégalité de Chebyschev, on a :
$\mathbb{P}\left[\left|V^n g^*(\theta)-g^*(\theta)\right| > \epsilon\right] \leq \epsilon^{-1}\mathbb{E}\left[\left|V^n g^*(\theta)-g^*(\theta)\right|\right] \to 0$ quand $n\to\infty$
Fixons $\hat{\epsilon} > 0$. Il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables et $N\in\mathbb{N}$ qui vérifie $\mathbb{P}\left[A_n\right]\to 1$ quand $n\to\infty$ et tels que :
$\left|V^n g^*(\theta)-g^*(\theta)\right| < \hat{\epsilon}$ et $\left|V^{n+1}g^*(\theta)-g^*(\theta)\right| < \hat{\epsilon}$ sur A_n, $\quad\forall n\geq N$
(On peut prendre par exemple
$$A_n = \Omega - \left\{(\left|V^n g^*(\theta)-g^*(\theta)\right| > \hat{\epsilon}\right\} \cup \left\{\left|V^{n+1}g^*(\theta)-g^*(\theta)\right| > \hat{\epsilon})\right\})$$

Puisque l'opérateur V est continu, on peut choisir $\hat{\epsilon}$ tel que $|Vg^* - g^*| < \epsilon$ surA_n. En effet,

$$|Vg^* - g^*| \leq \left|V^{n+1}g^*(\theta) - g^*(\theta)\right| + \|V\| \left|V^n g^*(\theta) - g^*(\theta)\right|$$

Donc $Vg^*(\theta) = g^*(\theta)$ $\mathbb{P}$ p.s. (on a $\forall\epsilon, |Vg^*(\theta) - g^*(\theta)| \leq \epsilon, \mathbb{P}\ \ p.s.$)
La convergence L^1 impliquant la convergence d'une sous-suite p.s., comme tout équilibre symétrique $\hat{g}$ vérifie $\mathbb{P}\left[V\hat{g}(\theta) = \hat{g}(\theta)\right] = 1$, il vient $\hat{g}(\theta) = lim_{k\to\infty} V^{n_k} g(\theta) = g^*(\theta)$ $\mathbb{P}$ p.s. pour une sous-suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Cela montre l'unicité (excepté sur un ensemble de mesure nulle) de l'équilibre symétrique.

2. On sait déjà, d'après le lemme 2.2, que g^* existe,est unique et est 1-lipschitzienne. Plus précisément, g^* est même $2^\eta\gamma$-lipschitzienne dès lors que $2^\eta\gamma < 1$.
Posons $\eta^* = \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{1}{\gamma}\right) > 0$ car $\gamma < 1$ de sorte que $2^{2\eta^*}\gamma = 1$ et $2^{\eta^*}\gamma < 1$.
Reprenant le calcul du lemme 2.1, on a :

$$\begin{aligned}
\left|V_{g^*}(\theta) - V_{g^*}(\hat{\theta})\right| &= \left|g^*(\theta) - g^*(\hat{\theta})\right| \\
&\leq \gamma \max\left\{\left|\theta^0 - \hat{\theta}^0\right|, \left|g^* \circ T(\theta) - g^* \circ T(\hat{\theta})\right|\right\} \\
&\leq \gamma \max\left\{\left|\theta^0 - \hat{\theta}^0\right|, 2^{\eta^*}\gamma \textstyle\sum_{a\geq 1} 2^{-\eta^*(a-1)} \left|\theta^a - \hat{\theta}^a\right|\right\} \\
&\leq \gamma \max\left\{\left|\theta^0 - \hat{\theta}^0\right|, \textstyle\sum_{a\geq 1} 2^{-\eta^* a} \left|\theta^a - \hat{\theta}^a\right|\right\} \\
&\leq \gamma(\left|\theta^0 - \hat{\theta}^0\right| + \textstyle\sum_{a\geq 1} 2^{-\eta^* a} \left|\theta^a - \hat{\theta}^a\right|) \\
&\leq \gamma d_{\eta^*}(\theta^0, \hat{\theta}^0)
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du résultat.

2.2.2 Information partielle

Théorème 2.2 *Soit $S = (X, \Theta, \mu, \nu, N)$ une économie statique avec interactions locales et information partielle, i.e. $N \in \mathbb{N}$.*

1. *Si l'utilité $u : X^2 \times \Theta \to \mathbb{R}$ vérifie* **H** *et est continue différentiable en sa première variable, alors S a un unique équilibre symétrique g^*(sauf sur un ensemble de mesure nulle).*
2. *Si u satisfait $\left|\frac{\partial}{\partial x}u(x, y, \theta_N) - \frac{\partial}{\partial x}u(x, \hat{y}, \hat{\theta_N})\right| \leq L \max\left\{|\hat{y} - y|, \left|\hat{\theta_N} - \theta_N\right|\right\}$ avec $L < \alpha$ alors g^* est lipschitzienne et*
$\left|g^*(\theta_N) - g^*(\hat{\theta}_N)\right| \leq \frac{L}{\alpha}\max\left\{\left|\theta^b - \hat{\theta}^b\right|; b = 0, 1, ..., N\right\}$

Preuve du théorème 2.2 : Dans un soucis de lisibilité, nous traiterons ici le cas $N = 1$, le cas $N \in \mathbb{N}$ s'en déduisant trivialement. Montrons que $\exists g^* : \Theta^2 \to X$ mesurable qui vérifie

$g^*(\theta^0,\theta^1) = \arg\max_{x^a\in X} \int u(x^a, g^*(\theta^1,\theta^2),\theta^0)\nu(d\theta^2)$.
g^* est un point fixe de l'opérateur $\tilde{V} : B(\Theta^2, X) \to B(\Theta^2, X)$ qui agit sur les classes $B(\Theta^2, X)$ des fonctions mesurables bornées de Θ^2 dans X par
$\tilde{V}(\theta^0,\theta^1) = \arg\max_{x^a\in X} \int u(x^a, g(\theta^1,\theta^2),\theta^0)\nu(d\theta^2)$
Pour prouver que l'opérateur a un point fixe continu lipschitzien si l'utilité vérifie (ii), on introduit la classe :
$Lip = \left\{ g : \Theta^2 \to \mathbb{R} : \left|g(\theta^0,\theta^1) - g(\tilde{\theta}^0,\tilde{\theta}^1)\right| \leq \max\left\{\left|\theta^0-\tilde{\theta}^0\right|, \left|\theta^1-\tilde{\theta}^1\right|\right\}\right\}$ des fonctions 1-lipschitziennes.

Lemme 2.3 *: Si la fonction d'utilité u est continue lipschitzienne au sens de (ii), alors l'opérateur $\tilde{V}$ vérifie :*

1. *$\tilde{V}$ envoie continuement l'ensemble Lip dans lui-même*
2. *$\tilde{V}$ a un unique point fixe g^* et $g^* \in Lip$.*

Preuve du lemme 2.3 : On définit la fonction continue $U : Lip \times X \times \Theta^2 \to \mathbb{R}$ par :
$U(g,x,\theta^0,\theta^1) = \int u(x, g(\theta^1,\theta^2),\theta^0)\nu(d\theta^2)$
Sous les hypothèses du théorème 2.2, la fonction $x \mapsto u(x,y,\theta^0)$ est uniformément α-concave, donc la fonction $x \mapsto U(g,x,\theta^0,\theta^1)$ est α-concave.

1. Soit $g \in Lip$. Puisque la fonction $(x^0,\theta^0,\theta^1,\theta^2) \mapsto \frac{\partial}{\partial x}u(x^0, g(\theta^1,\theta^2),\theta^0)$ est uniformément continue, la $\mathbf{H}'$ donne :

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{\partial}{\partial x}U(g,x,\theta^0,\theta^1) - \tfrac{\partial}{\partial x}U(g,x,\hat{\theta}^0,\hat{\theta}^1)\right| &\leq sup_{\theta^2}\left|\tfrac{\partial}{\partial x}u(x^0,g(\theta^1,\theta^2),\theta^0)\right.\\ &\quad \left.-\tfrac{\partial}{\partial x}u(x^0,g(\hat{\theta}^1,\theta^2),\hat{\theta}^0)\right|\\ &\leq sup_{\theta^2} L\max\left\{\left|g(\theta^1,\theta^2)-g(\hat{\theta}^1,\theta^2)\right|,\right.\\ &\quad \left.\left|\theta^0-\hat{\theta}^0\right|\right\}\\ &\leq L\max\left\{\left|\theta^1-\hat{\theta}^1\right|, \left|\theta^0-\hat{\theta}^0\right|\right\}\end{aligned}$$

   puisque g est 1-lischitzienne.
   Ainsi, pour tout g de Lip, la fonction $(x,\theta^0,\theta^1) \mapsto u(g,x,\theta^0,\theta^1)$ satisfait les hypothèses du lemme 2.1 avec $Y = \Theta^2$ muni de la norme infinie.
   $\tilde{V}g \in Lip$ car $L < \alpha$.
   Montrons que $\tilde{V}$ est continu pour la norme infinie.
   Soient $\theta^0,\theta^1 \in \Theta$. $\forall g,\tilde{g} \in B(\Theta^2,X)$, on a :
   $\left|\frac{\partial}{\partial x}U(g,x,\theta^0,\theta^1) - \frac{\partial}{\partial x}U(\hat{g},x,\theta^0,\theta^1)\right| \leq L\left\|g-\hat{g}\right\|_\infty$
   Ainsi, $\forall(\theta^0,\theta^1), (g,x) \mapsto U(g,x,\hat{\theta}^0,\hat{\theta}^1)$ satisfait les hypothèses du lemme 2.1 avec $Y = B(\Theta^2,X)$.
   D'où :

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{V}g - \tilde{V}\hat{g}\right\|_\infty &= sup_{\theta^0,\theta^1}\left|\arg\max_{x\in X} U(g,x,\theta^0,\theta^1)\right.\\ &\quad \left.-\arg\max_{x\in X} U(\hat{g},x,\theta^0,\theta^1)\right|\\ &\leq \tfrac{L}{\alpha}\left\|g-\hat{g}\right\|_\infty\end{aligned}$$

Donc $\tilde{V}$ est continue pour $\|\|_\infty$.

2. Comme $L < \alpha$, il vient d'après (i) que $\tilde{V}$ est une contraction du Banach $B(\Theta^2, X)$. Ainsi, $\tilde{V}$ envoie le fermé Lip dans lui-même, donc $g^* \in Lip$.

Suite de la preuve du théorème 2.2 :

1. Avec des arguments semblables à ceux du théorème 2.1 et en appliquant le lemme 2.1 à U définie dans le lemme 2.3, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\tilde{V}g(\theta^0,\theta^1) - \tilde{V}\hat{g}(\theta^0,\theta^1)\right| &\leq \tfrac{\mathbb{E}L(\theta^0)}{\alpha}\int_{\Theta^2}\left|g(\theta^1,\theta^2) - \hat{g}(\theta^1,\theta^2)\right|\nu(d\theta^2)\nu(d\theta^1)\\ &\leq \gamma\mathbb{E}\left|g - \hat{g}\right|.\end{aligned}$$

Comme $\gamma = \frac{\mathbb{E}L(\theta^0)}{\alpha} < 1$, un argument de fermeture prouve que g^* est défini de manière unique modulo la relation d'égalité p.s.

2. Le lemme 2.3 nous donne l'existence et l'unicité de l'équilibre g^*, ainsi que sa 1-lischitziennité.
En appliquant le lemme 2.1 avec $Y = \Theta^{N+1}$ muni de la norme infinie et $G(\theta,\hat{\theta}) = L\max\left\{\left|\theta^0 - \hat{\theta}^0\right|, \left|\theta^1 - \hat{\theta}^1\right|\right\}$ on obtient :
$\left|g^*(\theta^0,\theta^1) - g^*(\hat{\theta}^0,\hat{\theta}^1)\right| \leq \frac{L}{\alpha}\max\left\{\left|\theta^0 - \hat{\theta}^0\right|, \left|\theta^1 - \hat{\theta}^1\right|\right\}$

3 Economies dynamiques avec interactions locales

3.1 Définitions et notations

Comme précédemment on introduit un ensemble dénombrable $\mathbb{A}$ d'agents rationnels a, $\Theta \subset \mathbb{R}$, X un segment de $\mathbb{R}$ et $(\Omega, F, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. À chaque temps $t \in \mathbb{N}$, chaque agent a a pour type θ_t^a, les types sont indépendants dans le temps et selon les agents, à valeurs dans Θ, et de même loi ν. L'utilité instantanée u de l'agent a au temps t dépend du type instantané θ_t^a, de l'action présente choisie $x_t^a \in X$, de l'action qu'il avait choisie au temps précédent x_{t-1}^a, et de l'action présente de son voisin x_t^{a+1} :

$$u : (x_t^a, x_{t-1}^a, x_t^{a+1}, \theta_t^a) \mapsto u(x_t^a, x_{t-1}^a, x_t^{a+1}, \theta_t^a)$$

On suppose u strictement concave par rapport à la première variable. L'utilité totale d'un agent a est la somme de ces utilités futures affectées d'un coefficient $\beta < 1$ ($\tilde{u}_{t_0} = \sum_{t \geq t_0} \beta^t u_t$). L'agent a a une information partielle : il ne connait que son présent type $\theta_{t_0}^a$ et non celui de ses voisins. Il connait par contre, pour tout $t < t_0$, $\mathbf{x}_t = \{x_t^a\}_{a \in \mathbb{A}}$.

3.1.1 Economie dynamique

Définition 3.1 *Une économie dynamique avec interactions locales est un quintuplet $S = (X, \Theta, u, \nu, \beta)$, comme ci-dessus.*

Pour définir une notion d'équilibre, on va introduire des notations supplémentaires. Soient $\mathbf{X} := \{\mathbf{x} = (x^a)_{a \in \mathbb{A}}, x^a \in X\} = X^{\mathbb{A}}$ l'ensemble des configurations d'actions possible, et $\mathbf{X}^0 := \{\mathbf{x} = (x^a)_{a \geq 0}, x^a \in X\} = X^{\mathbb{N}}$, munis de la topologie produit, ce qui induit leur compacité. On va s'intéresser au cas où les actions aux temps $t \leq t_0 - 2$ affectent les actions au temps t_0 seulement à travers les actions aux temps $t_0 - 1$. On supposera donc que la fonction de décision dépend seulement des actions au temps $t-1$ et du type au temps t : on suppose donc que $x_t^a = g(T^a x_{t-1}, \theta_t^a)$ où $g : \mathbf{X}^0 \times \Theta \to X$ désigne la fonction de décision et $T^a x_{t-1} = \left\{(x_{t-1}^b)_{b \geq a}\right\}$

Soit g une fonction de décision continue, on note $\pi_g(T^a x_{t-1}, .)$ la loi conditionelle de x_t^a sachant x_{t-1}. Il s'agit d'une mesure sur X, et pour $A \subset X$, $\pi_g(T^a x_{t-1}, A)$ donne la probabilité, en partant de la configuration x_{t-1}, que $x_t^a \in A$. On définit ensuite la mesure produit sur $\mathbf{X}^0$:

$$\Pi_g(Tx, (A_a)_{a \geq 1}) = \prod_{a=1}^{\infty} \pi_g(T^a x, A_a),$$

qui donne la probabilité, étant dans la configuration initiale x_{t-1}, que pour tout $a \geq 1$, $x_t^a \in A_a$. Puis on note $\Pi_g^t(Tx, (A_a)_{a \geq 1}) = \int_X \Pi_g^{t-1}(Tx, \mathrm{d}y) \Pi_g(y, (A_a)_{a \geq 1})$ la probabilité, étant dans la configuration initiale x_{t_0}, que pour tout $a \geq 1$, $x_{t_0+t}^a \in A_a$.

Si l'agent 0 suppose que les agents $a > 0$ ont g comme fonction de décision, pour toute configuration initiale x et pour tout type initial θ_1^0, le problème d'optimisation est donné par :

$$\max_{(x_t^0)_{t\geq 1}} \left\{ \int_X u(x_1^0, x_0^0, x_1^1, \theta_1^0)\pi_g(Tx, \mathrm{d}x_1^1) + \sum_{t\geq 2} \beta^{t-1} \int_{\mathbf{X}^0\times\Theta} u(x_t^0, x_{t-1}^0, x_t^1, \theta_t^0)\Pi_g(Tx, \mathrm{d}x_t)\nu(\mathrm{d}\theta_t^0) \right\}$$

Lemme 3.1 *Le maximum précédent s'écrit* $\hat{x}_1^0 = V_g(x_0, \theta_1^0)$ *où* V_g *est solution de l'équation fonctionelle :*

$$\begin{aligned} V_g(x_{t-1}, \theta_t^0) &= V_g(x_{t-1}^0, Tx_t, \theta_t^0) \\ &= \max_{x_t^0\in X} \left\{ \int_X u(x_t^0, x_{t-1}^0, x_t^1, \theta_t^0)\pi_g(Tx_{t-1}, \mathrm{d}x_t^1) \right. \\ &\quad \left. +\beta \int_{\mathbf{X}^0\times\Theta} V_g(x_t^0, \hat{x}_t, \theta)\Pi_g(Tx_{t-1}, \mathrm{d}\hat{x}_t)\nu(\mathrm{d}\theta) \right\} \end{aligned}$$

Preuve du lemme 3.1 : Par récurence sur t_0, on va montrer que

$$\begin{aligned} V_g(x_0, \theta_1^0) = {} & \max_{(x_t^0)_{1\leq t\leq t_0}} \left\{ \int_X u(x_1^0, x_0^0, x_1^1, \theta_1^0)\pi_g(Tx_0, \mathrm{d}x_1^1) \right. \\ & + \sum_{2\leq t\leq t_0} \beta^{t-1} \int_{\mathbf{X}^0\times\Theta} u(x_t^0, x_{t-1}^0, x_t^1, \theta_t^0)\Pi_g(Tx_0, \mathrm{d}x_t)\nu(\mathrm{d}\theta_t^0) \\ & \left. +\beta^{t_0} \int_{\mathbf{X}^0\times\Theta} V_g(x_{t_0}^0, \hat{x}_{t_0}, \theta)\Pi_g^{t_0}(Tx_{t_0-1}, \mathrm{d}\hat{x}_{t_0})\nu(\mathrm{d}\theta) \right\} \end{aligned}$$

Pour $t_0 = 1$, il s'agit de la définition de V_g. On suppose que l'hypothèse de récurence est vérifiée, on injecte V_g, et on obtient :

$$\begin{aligned} V_g(x_0, \theta_1^0) = {} & \max_{(x_t^0)_{1\leq t\leq t_0+1}} \left\{ \int_X u(x_1^0, x_0^0, x_1^1, \theta_1^0)\pi_g(Tx_0, \mathrm{d}x_1^1) \right. \\ & + \sum_{2\leq t\leq t_0} \beta^{t-1} \int_{\mathbf{X}^0\times\Theta} u(x_t^0, x_{t-1}^0, x_t^1, \theta_t^0)\Pi_g(Tx_0, \mathrm{d}x_t)\nu(\mathrm{d}\theta_t^0) \\ & +\beta^{t_0} \int_{\mathbf{X}^0\times X\times\Theta} \Big(u(x_{t_0+1}^0, x_{t_0}^0, x_{t_0+1}^1, \theta_{t_0+1}^0)\Pi_g^{t_0}(Tx_{t_0-1}, \mathrm{d}\hat{x}_{t_0}) \\ & \quad \times\pi_g(\hat{x}_{t_0}, \mathrm{d}x_{t_0+1}^1)\nu(\mathrm{d}\theta_{t_0+1}^0)\Big) \\ & +\beta^{t_0} \int_{\mathbf{X}^0\times\Theta\times\mathbf{X}^0\times\Theta} \Big(V_g(x_{t_0+1}^0, \hat{x}_{t_0+1}, \theta)\Pi_g(T\hat{x}_{t_0}, \mathrm{d}\hat{x}_{t_0+1}) \\ & \left. \quad \times\Pi_g^{t_0}(Tx_{t_0-1}, \mathrm{d}\hat{x}_{t_0})\nu(\mathrm{d}\theta)\nu(\mathrm{d}\theta_{t_0+1}^0)\Big) \right\} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} V_g(x_0,\theta_1^0) &= \max_{(x_t^0)_{1\le t\le t_0+1}} \Big\{ \int_X u(x_1^0,x_0^0,x_1^1,\theta_1^0)\pi_g(Tx_0,\mathrm{d}x_1^1) \\ &\quad + \sum_{2\le t\le t_0} \beta^{t-1} \int_{\mathbf{X}^0\times\Theta} u(x_t^0,x_{t-1}^0,x_t^1,\theta_t^0)\Pi_g(Tx_0,\mathrm{d}x_t)\nu(\mathrm{d}\theta_t^0) \\ &\quad +\beta^{t_0}\int_{\mathbf{X}^0\times\Theta}\Big(u(x_{t_0+1}^0,x_{t_0}^0,x_{t_0+1}^1,\theta_{t_0+1}^0) \\ &\qquad \times \int_{\mathbf{X}^0}(\Pi_g^{t_0}(Tx_{t_0-1},\mathrm{d}\hat{x}_{t_0})\Pi_g(\hat{x}_{t_0},\mathrm{d}x_{t_0+1}))\nu(\mathrm{d}\theta_{t_0+1}^0)\Big) \\ &\quad +\beta^{t_0}\int_{\mathbf{X}^0\times\Theta}\Bigg(V_g(x_{t_0+1}^0,\hat{x}_{t_0+1},\theta) \\ &\qquad \times\int_{\mathbf{X}^0}(\Pi_g(T\hat{x}_{t_0},\mathrm{d}\hat{x}_{t_0+1})\Pi_g^{t_0}(Tx_{t_0-1},\mathrm{d}\hat{x}_{t_0}))\nu(\mathrm{d}\theta))\Bigg)\Big\}, \end{aligned}$$

ce qui clot la récurence. Le lemme se déduit alors en passant à la limite en t_0, le reste tendant vers 0, car la fontion $\int_\Theta V_g(x,y,\theta)\nu(\mathrm{d}\theta)$ est bornée.

Lemme 3.2 (admis) *On suppose g continue. On suppose toujours u continue strictement concave. Alors l'équation fontionelle précédente possède une unique solution continue et bornée V_g sur $\boldsymbol{X}^0\times\Theta$. De plus, $V_g(.,Tx_{t-1},\theta_t^0)$ est strictement concave sur X et il existe une unique fonction de décision optimale $\hat{g}_g : \boldsymbol{X}^0\times\Theta\to X$ qui satisfait :*

$$\begin{aligned} \hat{g}_g(x_{t-1},\theta_t^0) &= arg \quad \max_{x_t^0\in X}\Big\{ \int_X u(x_t^0,x_{t-1}^0,x_t^1,\theta_t^0)\pi_g(Tx_{t-1},\mathrm{d}x_t^1) \\ &\qquad +\beta\int_{\mathbf{X}^0\times\Theta} V_g(x_t^0,\hat{x}_t,\theta)\Pi_g(Tx_{t-1},\mathrm{d}\hat{x}_t)\nu(\mathrm{d}\theta)\Big\} \end{aligned}$$

3.1.2 Équilibre

On peut maintenant définir un équilibre de Markov parfait et symétrique dans le cas dynamique :

Définition 3.2 *Soit $S=(X,\Theta,u,\nu,\beta)$. Un équilibre de Markov parfait et symétrique d'une économie dynamique avec interactions locales et prévoyance est une fonction $g^* : \boldsymbol{X}^0\times\Theta\to X$ telle que :*

$$\begin{aligned} g^*(x_{t-1},\theta_t^0) &= arg \quad max_{x_t^0\in X}\Big\{ \int_X u(x_t^0,x_{t-1}^0,x_t^1,\theta_t^0)\pi_{g^*}(Tx_{t-1},\mathrm{d}x_t^1) \\ &\qquad +\beta\int_{\mathbf{X}^0\times\Theta} V_{g^*}(x_t^0,\hat{x}_t,\theta)\Pi_{g^*}(Tx_{t-1},\mathrm{d}\hat{x}_t)\nu(\mathrm{d}\theta)\Big\} \end{aligned}$$

Comme dans le cas statique, on peut voir l'équilibre comme point fixe d'un opérateur $\hat{V} : B(\mathbf{X}^0\times\Theta,X)\to B(\mathbf{X}^0\times\Theta,X)$ définit par :

$$\begin{aligned} \hat{V}(g)(x_{t-1},\theta_t^0) &= arg \quad max_{x_t^0\in X}\Big\{ \int_X u(x_t^0,x_{t-1}^0,x_t^1,\theta_t^0)\pi_g(Tx_{t-1},\mathrm{d}x_t^1) \\ &\qquad +\beta\int_{\mathbf{X}^0\times\Theta} V_g(x_t^0,\hat{x}_t,\theta)\Pi_g(Tx_{t-1},\mathrm{d}\hat{x}_t)\nu(\mathrm{d}\theta)\Big\} \end{aligned}$$

On va maintenant énoncer des résultats généraux, avec des hypothèses fortes, que nous utiliserons dans l'exemple de la partie 3. Elles ne sont donc pas vaines.

3.2 Conditions fortes d'équilibre

Définition 3.3 *Pour une constante $C > 0$, on définit l'ensemble des affectations d'importance d'impact total C l'ensemble des suites à valeurs positives sommables dont la somme est inférieure ou égale à C.*
$L_+^C = \left\{ \mathbf{c} = (c_a)_{a \geq 0} : \forall a, \quad c_a \geq 0, \sum_{a \geq 0} c_a \leq C \right\}$

On peut associer à toute affectation $\mathbf{c} \in L_+^C$ la distance :

$$d_c(x,y) = \sum_{a \in \mathbb{N}} c_a \left| x^a - y^a \right|.$$

Cette distance induisant sur $\mathbf{X}^0$ la topologie produit, $(\mathbf{X}^0, d_c)$ est un espace métrique compact. La classe de fonctions

$$Lip_{\mathbf{c}}^C = \left\{ f : \mathbf{X}^0 \to \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq d_c(x,y) \right\}$$

est compacte pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 3.1 *Supposons qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que :*

1. *$\forall \mathbf{c} \in L_+^C, \forall \theta^0 \in \Theta$ et $\forall g \in Lip_{\mathbf{c}}^C, \exists F(\mathbf{c}) \in L_+^C$ tel que l'unique fonction de décision $\hat{g}_g(.,\theta^0)$ qui résout l'équation du lemme 2.2 soit lipschitzienne, uniformément en θ^0, pour la distance $d_{F(\mathbf{c})}$*
2. *La fonction $F : L_+^C \to L_+^C$ est continue.*
3. *$lim_{n\to\infty} \|g_n - g\|_\infty = 0$ implique $lim_{n\to\infty} \left\| \hat{g}_{g_n}(.,\theta^0) - \hat{g}_g(.,\theta^0) \right\|_\infty = 0$*

Alors l'économie dynamique à interaction locale possède un équilibre de Markov parfait et symétrique g^* et la fonction $g^*(.,\theta^0)$ est lipschitzienne uniformément en θ^0.

Preuve du théorème 3.1 : Pour tout $C < \infty$, L_+^C est un convexe fermé du compact $[0,C]^{\mathbb{N}}$, et est donc compact pour la topologie produit. La fonction continue F admet donc un point fixe (théorème du point fixe de Schauder). L'opérateur $\hat{V}$ défini précédemment envoie d'après (1). $Lip_{\mathbf{c}^*}^{C*}$ dans lui-même. L'hypothèse (3). nous donnant la continuité de $\hat{V}$, et puisque nous avons remarqué que $Lip_{\mathbf{c}^*}^{C*}$ est compact convexe, on peut appliquer encore une fois le théorème de Schauder à $\hat{V}$. Ce point fixe est l'équilibre cherché.

Introduisons le vecteur $r^* = (r_a^*)_{a \in \mathbb{A}}$ de composantes

$$r_a^* = \sup_{\left\{ x^b = y^b \quad \forall b \neq a \right\}} \left\{ \|\pi_{g^*}(x;.) - \pi_{g^*}(y;.)\| \right\}$$

où $\|\pi_{g^*}(x;.) - \pi_{g^*}(y;.)\|$ désigne la variation totale de la mesure signée $\pi_{g^*}(x;.) - \pi_{g^*}(y;.)$.

Théorème 3.2 (admis) *Si $\sum_{a \in \mathbb{A}} r^a_{g^*} < 1$, il existe une unique μ^* sur l'espace $\boldsymbol{X}$ des configurations possibles telle que, pour toute configuration initiale $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, la suite $\Pi^t_{g^*}(\boldsymbol{x};.)$ converge étroitement vers μ^*.*

4 Étude d'un exemple : Conformisme local et attachement aux habitudes

4.1 Existence d'un équilibre

Introduisons un exemple pour mettre en pratique la théorie élaborée ci-dessus. Nous allons considérer une économie dans laquelle les fonctions d'utilité des agents sont de la forme :
$u\left(x_{t-1}^a, x_t^a, x_t^{a+1}, \theta_t^a\right) = -\alpha_1(x_{t-1}^a - x_t^a)^2 - \alpha_2(\theta_t^a - x_t^a)^2 - \alpha_3(x_t^{a+1} - x_t^a)^2$
où α_1, α_2 et α_3 sont des constantes positives. Le terme en α_1 représente l'attachement aux habitudes qu'on a du mal à changer, celui en α_2 l'effet du propre type de l'agent et celui en α_3 le conformisme local lié aux interactions sociales. Par exemple, si l'on cherche à modéliser la consommation d'un produit comme la cigarette, le premier terme traduira l'habitude du fumeur, le second sa volonté à l'instant considéré de continuer à fumer, et le troisième l'influence de son voisin sur sa décision. On prendra $X = \Theta = [-1, 1]$.

Théorème 4.1 *Supposons que $\mathbb{E}\theta_t^0 = 0$ et que l'agent $a \in \mathbb{A}$ ne connait que de son propre type θ^a. Si la fonction d'utilité u est de la forme quadratique définie précédemment, l'économie possède un équilibre de Markov parfait et symétrique g^*. La fonction de décision optimale g^* peut être choisie de la forme :*
$g^*(x, \theta^0) = c_0^* x^0 + \gamma\theta^0 + \sum_{b\geq 1} c_b^* x^b$ où γ est une constante strictement positive et $\mathbf{c}^* = (c_a^*)_{a\geq 0}$

Lemme 4.1 *Soit $g : \mathbf{X}^0 \times \Theta \to X$ une fonction de décision continue prise par les agents $a > 0$. Sous les hypothèses du théorème précédent, la fonction de décision induite $\hat{g}_g$ de l'agent $0 \in \mathbb{A}$ est déterminée de manière unique et $\mathbb{P}\left[\hat{g}_g(x_{t-1}, \theta_t^0) \in \{-1, 1\} \text{ avec } t \in \mathbb{N}\right] = 0$.*

Preuve du lemme 4.1 : Soit le temps d'arrêt

$$\tau = \inf\left\{t > 0 : \hat{g}_g(x_{t-1}, \theta_t^0) = 1\right\}$$

et $y_t = \hat{g}_g(x_{t-1}, \theta_t^0)$.
Raisonnons par l'absurde et supposons $\mathbb{P}\left[\tau < \infty\right] > 0$.
$y_\tau = 1$ est alors optimal pour la fonction d'utilité totale, qui est la somme des fonctions d'utilité pondérées dans le temps par β. y_τ intervenant dans les trois termes de u au temps τ et le premier au temps $\tau + 1$, on obtient après simplification que $\forall y \in X$:
$-\alpha_1(1 - y_{\tau-1})^2 - \alpha_2(1 - x_\tau^1)^2 - \alpha_3(1 - \theta_\tau^0)^2 - \beta\alpha_1(1 - y_{\tau+1})^2$
$\geq -\alpha_1(y - y_{\tau-1})^2 - \alpha_2(y - x_\tau^1)^2 - \alpha_3(y - \theta_\tau^0)^2 - \beta\alpha_1(y - y_{\tau+1})^2 = f(y)$.
Le minimum de la fonction f sur X étant atteint en
$\frac{\alpha_1 y_{\tau-1} + \alpha_2 x_\tau^1 + \alpha_3\theta_\tau^0 + \beta\alpha_1 y_{\tau+1}}{\alpha_1(1+\beta) + \alpha_2 + \alpha_3}$, ceci implique que $\theta_\tau^0 = y_{\tau-1} = y_{\tau+1} = 1$. On en déduit par récurrence immédiate que $y_t = 1 = \theta_t^0 \quad \forall t \in \mathbb{N}$.

D'après la loi forte des grands nombres, ceci contredit $\mathbb{E}\left[\theta_t^0\right] = 0$.
On en conclut $\mathbb{P}[\tau < \infty] = 0$.
Le cas du temps d'arrêt $\tau = \inf\left\{t > 0 : \hat{g}_g(x_{t-1}, \theta_t^0) = -1\right\}$ est similaire.

On note $M(\mathbf{X}^0)$ la classe des mesures de probabilité sur $\mathbf{X}^0$ équipé de la topologie de la convergence étroite. L'utilité au temps t attendue au temps 0 de l'agent 0 dépend des actions x_0^a seulement à travers celle attendue de son voisin au temps t

$$z_t = \int_{\mathbf{X}^0} y_t^1 \Pi_g^t(Tx_0, \mathrm{d}y_t)$$

et à travers

$$\int_{\mathbf{X}^0} (y_t^1)^2 \Pi_g^t(Tx_0, \mathrm{d}y_t)$$

Soit x_0 la configuration initiale, $\mu := \Pi_g(Tx_0, .)$ un élement de $M(\mathbf{X}^0)$ et $U : X \times X \times \Theta \times M(\mathbf{X}^0) \to \mathbb{R}$ définie par

$$U(x_1^0, x_0^0, \theta_1^0, \mu) := -\alpha_1(x_1^0 - x_0^0)^2 - \alpha_2(x_1^0 - \theta_1^0)^2 - \alpha_3 \int_{\mathbf{X}^0} (x_1^0 - y^1)^2 \mu(\mathrm{d}y).$$

Le problème d'optimisation se réécrit alors :

$$max_{(x_t^0)_{t\geq 1}} \left\{ U(x_1^0, x_0^0, \theta_1^0, \mu) + \sum_{t\geq 2} \beta^{t-1} \int_\Theta U(x_t^0, x_{t-1}^0, \theta_t^0, \Pi_g^t(Tx_0, .))\nu(\mathrm{d}\theta_t^0) \right\}$$

Lemme 4.2 *On suppose les hypothèses du théorème 3.1. vérifiées. Etant donné une configuration $x_0 \in \boldsymbol{X}^0$ et la fonction de décision g continue des agents $a > 0$, la fonction de décision de l'agent 0 est linéaire et de la forme :*

$$\hat{g}_g(x_0, \theta) = \gamma_1 x_0^0 + \gamma_2 \theta_0^0 + \sum_{t\geq 1} \delta_{t-1} \int_{\mathbf{X}^0} y_t^1 \Pi_g^t(Tx_0, \mathrm{d}y_t),$$

avec

$$\gamma_1 = \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4\alpha_1^2\beta}}{2\alpha_1\beta},$$

$$\gamma_2 = \frac{\alpha^2}{\lambda - \gamma_1\alpha_1\beta},$$

$$\delta_0 = \frac{\alpha^3}{\lambda - \gamma_1\alpha_1\beta},$$

$$\delta_{t+1} = \frac{\alpha^1\beta}{\lambda - \gamma_1\alpha_1\beta}\delta_t, \textit{pour} \quad t \geq 1,$$

où $\lambda = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1\beta$
De plus les constantes ne dépendent pas de g et vérifient $\gamma_1 + \gamma_2 + \sum_{t\geq 0} \delta_t \leq 1$

La preuve du lemme se fait en plusieurs étapes, on utilise d'abord le lemme 3.2 pour l'existence d'une fonction de décision optimale continue, puis on déduit une relation entre les x_t^0 optimaux, que l'on utilise pour montrer par récurence sur t que les x_t^0 optimaux sont bien de la forme souhaitée. Pour calculer les coefficients, on utilise ensuite des fonctions g^τ optimales pour un programme de maximisation restreint aux τ prochains temps.
On va maintenant vérifier que la fonction de décision optimale vérifie bien les hypothèses du théorème 3.1. Soit une affectation d'importance $\mathbf{c} = (c_a)_{a\geq 1} \in L_+^{1-\gamma_2}$ et supposons pour le moment que la fonction de décision des agents $a > 0$ prennent la forme $\tilde{g}(T^a x, \theta^a) = c_0 x^a + \gamma_2 \theta^a + \sum_{b\geq 1} c_b x^{a+b}$. D'après le lemme 3.1, $c_0 = \gamma_1$; De plus,

$$\begin{array}{rcl} z_1 & = & \int_{\mathbf{X}^0} y^1 \Pi_{\tilde{g}}(Tx, dy) \\ & = & \int_X y^1 \int_\Theta \delta_{g(Tx,\theta)}(\mathrm{d}y^1)\nu(\mathrm{d}\theta) \\ & = & \int_\Theta g(Tx,\theta)\nu(\mathrm{d}\theta) \\ & = & \int_\Theta (c_0 x^1 + \gamma_2\theta^1 + \sum_{b\geq 1} c_b x^{1+b})\nu(\mathrm{d}\theta^1) \\ & = & \sum_{b\geq 0} c_b x^{b+1} \end{array},$$

car $\mathbb{E}\left[\theta^1\right] = 0$
Par récurence, on montre alors que :

$$z_t = \int_{\mathbf{X}^0} \Pi_{\tilde{g}}^t(Tx, dy) = \sum_{a_1\geq 0, a_2\geq 0 \ldots a_t \geq 0} \left(c_{a_1} c_{a_2} \ldots c_{a_t} x^{a_1+\ldots+a_t+1} \right)$$

On peut alors écrire :

$$\hat{g}_{\tilde{x}}(x,\theta) = \gamma_1 x^0 + \gamma_2\theta + \sum_{b\geq 1} l_b x^b,$$

avec

$$l_b = F_b(c_0, c_1, \ldots, c_{b-1})$$

$$l_b = \sum_{t\geq 1} \delta_{t-1} \sum_{0\leq a_1\leq b-1, 0\leq a_2\leq b-1, \ldots 0\leq a_t\leq b-1} \left(c_{a_1} c_{a_2} \ldots c_{a_t} \mathbf{1}_{\left\{\sum_{i=1}^t a_i = b-1\right\}} \right)$$

Preuve du théorème 4.1 : Puisque $\hat{g}_{\tilde{g}}\left(x, \theta^0\right) \in X$, on a $\sum_{b\geq 1} l_b \leq 1 - \gamma_1 - \gamma_2$.
Ainsi, l'application $F(\mathbf{c}) = (F_b(\gamma_1, c_1, \ldots, c_{b-1}))_{b\geq 1}$ envoie $L_+^{1-\gamma_1-\gamma_2}$ dans lui-même. Puisque F est continue pour la topologie produit, elle admet un point fixe $\mathbf{c}^* = (c_a^*)_{a\geq 1}$.

$$l_b = F_b(\gamma_1, c_1, \ldots, c_{b-1}) = c_b^*, \quad \forall b \geq 1$$

En posant $c_0^* = \gamma_1$, on peut vérifier les hypothèses du théorème 3.1, cela prouve alors le théorème.

4.2 Convergence

On peut maintenant étudier la convergence vers l'équilibre. En considérant l'expression $g^*\left(x,\theta^0\right) = c_0^* x^0 + \gamma_2\theta^0 + \sum_{a\geq 1} c_a^* x^a$ de la fonction de décision optimale g^*, si $x, y \in \mathbf{X}^0$ vérifient $x^b = y^b \quad \forall b \neq a$, on a :
$\left|g^*(x,\theta^0) - g^*(y,\theta^0)\right| \leq c_a^* \left|x^a - y^a\right|$
En supposant que les goûts sont équidistribués sur X, on obtient, $\forall A \in B\left(X\right)$:
$\left|\Pi_{g^*}\left(x,A\right) - \Pi_{g^*}\left(y,A\right)\right| \leq 2c_a^*$.
On en déduit que si $\sum_{a\geq 0} c_a^* < \frac{1}{2}$, alors $\sum_{a\geq 0} r_{g^*}^a < 1$.
On a donc convergence vers une mesure μ^* si α_1 est assez grand et α_3 assez petit, c'est-à-dire si l'interaction existant entre les agents n'est pas trop forte.

5 Conclusion

Ce modèle semble en premier lieu donner des résultats assez généraux, notamment grâce à la non dénombrabilité de θ et de X, et sachant que l'on impose peu de contraintes à ν. Si les situations d'équilibres méritent d'être précisées dans chaque modèle spécifique, l'exemple permet néammoins d'entrevoir comment on peut appliquer les théorèmes pour modéliser le conformisme local. On pourrait presque interpréter l'existence d'équilibres comme la preuve de l'existence du determinisme social. Cependant, il est essentiel d'observer les limites de ce modèle : bien que les hypothèses sur la fonction d'utilité ne soient pas excessivement contraignantes, le principe de temps non continu, des interactions à sens unique, avec un seul agent, le fait d'interagir tout le temps avec le même agent, et les types attribués aléatoirement dans le temps constituent des obstacles à une modélisation réaliste de nombreux problèmes, puisqu'ils excluent, entre autres, tous les comportements de groupes, et les interactions stratégiques ; autant de remarques qui nous laissent deviner toutes les idées d'évolution de ce modèle, et qui ouvrent de nombreuses voies de recherche.

6 Remerciements

Nous tenions à remercier Philippe Askénazy qui a accepté de nous encadrer et nous a trouvé un sujet d'étude, Olivier Glass et David Madore.