

Mémoire de première année : Le groupe exceptionnel G'_2 et le problème de la boule qui roule

Yohan Mandin–Hublé et Eva Philippe

Résumé

On s'intéresse au problème suivant : une boule qui roule sur une autre sans glisser ni tourner sur elle-même, et au lien avec le groupe exceptionnel G_2 qui apparaît lorsque le rapport des rayons est égal à 3.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Modélisation d'une boule roulante	2
2.1	Géométrie d'incidence	2
2.2	Spineur roulant et quaternions	3
	Construction des quaternions	4
2.3	Spineur roulant sur un plan projectif	6
3	Boule qui roule et octonions déployés	8
4	Algèbres de composition	19
5	Un peu de géométrie différentielle	24
5.1	Distributions	24
5.2	Théorème de Chow	25
5.3	Application au problème de la boule qui roule	27
6	Bibliographie	31

1 Introduction

On se propose d'étudier la géométrie de l'espace des configurations d'un système composé d'une sphère roulant sur une autre sphère, sans glissement, sans tourner sur elle-même et selon des grands cercles. Lorsque le rapport entre les rayons de ces sphères est 3, et quitte à modifier le système en considérant plutôt un spineur sur le plan projectif, on verra que le groupe de symétrie coïncide avec G'_2 , le groupe des automorphismes des octonions déployés (qui se trouve également être la forme réelle déployée de G_2 , le plus petit groupe de Lie exceptionnel). Dans les deux premières sections, nous étudions ce problème d'un point de vue algébrique en explicitant les liens avec les quaternions et les octonions déployés, dans ce rapport de rayons particulier. La troisième section permet de justifier certaines propriétés calculatoires de l'algèbre des octonions en présentant le cadre plus large de la théorie des algèbres de composition. Dans la dernière

section, nous utiliserons les outils de la géométrie différentielle, et en particulier les distributions, pour retrouver le fait qu'on peut toujours se rendre d'une configuration à une autre en respectant les règles de déplacement prescrites.

2 Modélisation d'une boule roulante

2.1 Géométrie d'incidence

On considère le système suivant : une sphère de rayon 1, appelée *boule roulante*, peut rouler sans glisser ni tourner sur elle-même autour d'une sphère immobile de rayon R , appelée *boule fixe*.

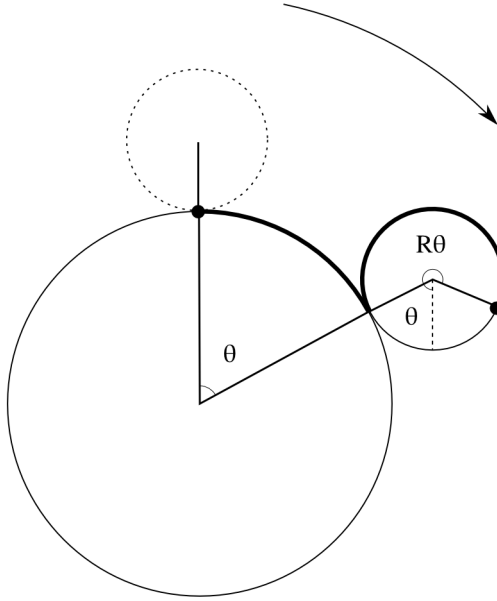
Nous allons voir que lorsque le rapport des rayons est 3, on peut presque considérer la forme réelle déployée de G_2 comme le groupe de symétrie de ce système de boule roulante. Pour ce faire, il faut considérer une version légèrement différente du problème : on remplacera la boule roulante par son revêtement double (*spineur roulant*) et la boule fixe par son projectivisé dans le plan projectif réel.

Mais tout d'abord, décrivons la géométrie d'incidence de notre système, c'est-à-dire les éléments considérés et les relations qui les lient :

- Les points sont les configurations possibles pour la boule roulante en contact avec la boule fixe.
- Les lignes sont les trajectoires de la boule roulante qui roule le long d'un grand cercle de la boule fixe, sans glisser ni tourner sur elle-même.

Plus précisément, on a les caractérisations suivantes :

- Un point est caractérisé par le point de contact $x \in S^2$ de la boule fixe avec la boule roulante et par l'orientation $g \in SO(3)$ de la boule roulante, par rapport à un repère invariant lié à la boule fixe. L'espace des points est donc $S^2 \times SO(3)$, c'est un espace de dimension 5 qui ne dépend pas de la valeur de R .
- On se donne un point de départ $(u, g) \in S^2 \times SO(3)$. Le choix d'une direction v orthogonale à u (on prendra v unitaire) donne une direction pour faire rouler la boule roulante, donc une ligne. La figure suivante, montre que lorsque la boule roulante roule d'un angle θ autour de la boule fixe, elle tourne d'un angle $(R + 1)\theta$ sur elle-même.



Le point obtenu est alors caractérisé par le point de contact $\cos(\theta)u + \sin(\theta)v \in S^2$ et l'orientation de la boule roulante $Rot(u \wedge v, (R + 1)\theta)g$, où $Rot(w, \psi)$ désigne la rotation d'angle ψ autour de l'axe donné par le vecteur unitaire w , et les vecteurs $u, v, u \wedge v$ forment une base orthonormée directe. Une ligne est donc un sous-ensemble

$$L = \{(\cos(\theta)u + \sin(\theta)v, Rot(u \wedge v, (R + 1)\theta)g), \theta \in \mathbb{R}\} \subset S^2 \times SO(3), \quad (1)$$

où u, v sont deux vecteurs orthogonaux de S^2 et $g \in SO(3)$.

L'espace des lignes est de dimension 5 : deux dimensions pour le choix de $u \in S^2$, une pour le choix de $v \in S^2$ orthogonal à u , trois pour l'orientation de départ $g \in SO(3)$, moins une dimension de redondance puisque le choix du point de départ sur la ligne est arbitraire.

On appellera groupe de symétrie de ce système le groupe des difféomorphismes de $S^2 \times SO(3)$ qui préserve les lignes.

2.2 Spineur roulant et quaternions

Pour voir apparaître G_2 et les octonions, il faut changer un peu de système et considérer non plus une boule, mais un spineur roulant. Nous allons voir comment on peut utiliser les quaternions pour donner une nouvelle définition des lignes de notre géométrie, ce qui prépare le terrain pour une troisième définition qui permettra de faire le lien avec les octonions déployés.

Contrairement à une boule, un spineur doit faire non pas 1 mais 2 tours sur lui-même pour revenir à son orientation d'origine. Cela revient à remplacer le groupe de rotation $SO(3)$ par son revêtement double $SU(2)$. En effet, $SO(3) = \{Rot(w, \theta), w \in S^2, \theta \in \mathbb{R}\}$ et en identifiant $SU(2)$ aux quaternions unitaires on exhibera le revêtement

$$\begin{aligned} SU(2) &\longrightarrow SO(3) \\ q &\longmapsto \varphi_q, \end{aligned} \quad (2)$$

avec $\varphi_q = \varphi_{-q}$.

Construction des quaternions On notera \mathcal{H} le corps des *quaternions*. C'est une algèbre associative réelle non commutative, de dimension 4 comme \mathbb{R} -espace vectoriel, dont une base est donnée par $1, i, j, k$ tels que :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

On également les identités suivantes :

$$\begin{aligned} ij &= -ji = k \\ jk &= -kj = i \\ ki &= -ik = j \end{aligned}$$

Remarque 2.1. On peut voir \mathcal{H} comme $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$ (avec la conjugaison habituelle sur \mathbb{C}), et $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 2.1. La *conjugaison* sur \mathcal{H} est donnée par

$$q = x_0 + x_1i + x_2j + x_3k \mapsto \bar{q} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3k.$$

On a la règle de multiplication suivante :

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \overline{q_1}.$$

La *norme* $||$ est donnée par

$$|q|^2 = N(q) = q\bar{q} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (3)$$

C'est un morphisme multiplicatif $\mathcal{H}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ dont le noyau (l'ensemble des quaternions *unitaires*) est isomorphe à $SU(2)$.

On notera $\text{Im}(\mathcal{H}) = \{x_1i + x_2j + x_3k, x_0, x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{q \in \mathcal{H}, \bar{q} = -q\}$ l'ensemble des quaternions *imaginaires purs*, que l'on peut identifier à \mathbb{R}^3 .

De la même manière qu'on peut utiliser les nombres complexes pour faire de la géométrie dans \mathbb{R}^2 , on va pouvoir donner une interprétation géométrique des quaternions imaginaires purs dans \mathbb{R}^3 , qui nous donnera des outils pour étudier notre système.

Propriété 2.1 (Produit de deux quaternions imaginaires purs). Soient $u, v \in \text{Im}(\mathcal{H})$, qui s'écrivent $u = u_1i + u_2j + u_3k$ et $v = v_1i + v_2j + v_3k$. Alors on peut écrire leur produit sous la forme :

$$uv = -u \cdot v + u \wedge v$$

où

$$- u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \in \mathbb{R}$$

$$- u \wedge v = (u_2v_3 - u_3v_2)i + (u_3v_1 - u_1v_3)j + (u_1v_2 - u_2v_1)k \in \text{Im}(\mathcal{H}).$$

(Ces opérations correspondent bien aux produit scalaire et produit vectoriel habituels dans \mathbb{R}^3 .)

En particulier, $u \wedge v = -v \wedge u$ donc $vu = \overline{uv}$.

Dans le cas où u et v sont orthogonaux ($u \cdot v = 0$), on a $uv = u \wedge v$ et si $w = uv$, alors $v = wu$ et $u = vw$.

Remarque 2.2. Le produit scalaire défini ci-dessus s'étend à tout \mathcal{H} par $\alpha \cdot \beta = \Re(\alpha\bar{\beta})$, où $\Re(x_0 + x_1i + x_2j + x_3k) = x_0$. Si q est un quaternion de norme 1 on a alors :

$$\begin{aligned} \alpha q \cdot \beta q &= \Re\left((\alpha q)(\overline{\beta q})\right) \\ &= \Re(\alpha q \bar{q} \bar{\beta}) \\ &= \Re(\alpha \bar{\beta}) \\ &= \alpha \cdot \beta \end{aligned}$$

Proposition 2.1. *On a une action de $SU(2)$ sur $\text{Im}(\mathcal{H})$ par conjugaison : pour $q \in \mathcal{H}$ tel que $N(q) = 1$,*

$$\begin{aligned}\varphi_q: \text{Im}(\mathcal{H}) &\rightarrow \text{Im}(\mathcal{H}) \\ x &\mapsto qxq^{-1}.\end{aligned}$$

De plus, φ_q préserve la norme.

Démonstration. En effet, si $x \in \text{Im}(\mathcal{H})$, alors $\overline{qxq^{-1}} = \overline{q^{-1}} \overline{x} \overline{q} = q(-x)q^{-1}$ car $N(q) = 1$ donc $q^{-1} = \overline{q}$, et $\overline{x} = -x$. D'où $\varphi_q(x) \in \text{Im}(\mathcal{H})$. De plus, φ_q préserve la norme car si $x \in \text{Im}(\mathcal{H})$, $N(\varphi_q(x)) = N(qxq^{-1}) = qxq^{-1}\overline{qxq^{-1}} = qx(\overline{q}q)\overline{x}q = qN(x)\overline{q} = N(x)$ puisque $N(q) = 1$. \square

Proposition 2.2. *En identifiant les quaternions unitaires à $SU(2)$ et $\text{Im}(\mathcal{H})$ à \mathbb{R}^3 , on obtient un morphisme de groupes*

$$\begin{aligned}\varphi: SU(2) &\rightarrow SO(3, \mathbb{R}) \\ q &\mapsto \varphi_q.\end{aligned}$$

Démonstration. On vérifie directement que φ est un morphisme dans $O_3(\mathbb{R})$ mais par connexité (car $SU(2)$ est isomorphe à S^3 la sphère unité de \mathbb{R}^4 , donc est connexe), $\varphi(SU(2)) \subset SO(3)$. La surjectivité vient du fait suivant, démontré dans les propositions qui suivent : si $\omega \in \text{Im}(\mathcal{H})$ tel que $N(\omega) = 1$ et qu'on note $e^{\theta\omega} = \cos(\theta) + \sin(\theta)\omega$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, alors $\varphi_{e^{\theta\omega}}$ correspond à la rotation d'angle 2θ autour du vecteur ω (vu dans \mathbb{R}^3). \square

Proposition 2.3. *Soit $\omega \in \text{Im}(\mathcal{H})$ tel que $N(\omega) = 1$. Alors φ_ω est le renversement d'axe $\mathbb{R}\omega$.*

Démonstration. On a :

- $\varphi_\omega(\omega) = \omega$
- Soit $u \in \text{Im}(\mathcal{H})$ orthogonal à ω . Alors $\omega u = \omega \wedge u$ et $\omega^{-1} = \overline{\omega}$, d'où en faisant le produit :

$$\begin{aligned}\omega u \omega^{-1} &= (u_1(-\omega_2^2 - \omega_3^2) + u_2(\omega_1\omega_2) + u_3(\omega_1\omega_3))i + (\dots)j + (\dots)k \\ &= (u_1(-\omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2) + \omega_1(u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + u_3\omega_3))i + (\dots)j + (\dots)k \\ &= -u_1i + (\dots)j + (\dots)k \\ &= -u\end{aligned}$$

car $N(\omega) = 1$ et $u \cdot \omega = 0$.

D'où $\varphi_\omega(u) = -u$.

Donc φ_ω est bien le renversement d'axe $\mathbb{R}\omega$. \square

Proposition 2.4. *Soit $\omega \in \text{Im}(\mathcal{H})$ tel que $N(\omega) = 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi_{e^{\theta\omega}}$ est la rotation d'angle 2θ autour de l'axe $\mathbb{R}\omega$ (où on a défini $e^{\theta\omega} = \cos(\theta) + \sin(\theta)\omega$, ce qui correspond à l'exponentielle dans le groupe $SU(2)$).*

Démonstration. On a $N(e^{\theta\omega}) = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 N(\omega)^2 = 1$, d'où $(e^{\theta\omega})^{-1} = \cos(\theta) - \sin(\theta)\omega = e^{-\theta\omega}$.

On a :

$$\begin{aligned}\varphi_{e^{\theta\omega}}(\omega) &= (\cos(\theta) + \sin(\theta)\omega)\omega(\cos(\theta) - \sin(\theta)\omega) \\ &= \cos(\theta)^2\omega + \cos(\theta)\sin(\theta)(\omega - \omega) - \sin(\theta)^2\omega^3 \\ &= \omega\end{aligned}$$

car $\omega^2 = -N(\omega) = -1$.

— Soit $u \in \text{Im}(\mathcal{H})$ orthogonal à ω . Montrons que $\varphi_{e^{\theta\omega}}(u) = \cos(2\theta)u + \sin(2\theta)\omega \wedge u$.

$$\begin{aligned} (\cos(\theta) + \sin(\theta)\omega)u(\cos(\theta) - \sin(\theta)\omega) &= \cos(\theta)^2u + \cos(\theta)\sin(\theta)(\omega u - u\omega) - \sin(\theta)^2\omega u\omega \\ &= (\cos(\theta)^2 - (\sin(\theta))^2)u + 2\cos(\theta)\sin(\theta)\omega \wedge u \\ &= \cos(2\theta)u + \sin(2\theta)\omega \wedge u. \end{aligned}$$

Donc $\varphi_{e^{\theta\omega}}$ est bien la rotation d'angle 2θ autour de l'axe $\mathbb{R}\omega$. \square

Proposition 2.5. Une ligne dans $S^2 \times SU(2)$ est de la forme :

$$\tilde{L} = \{(e^{2\theta\omega}u, e^{(R+1)\theta\omega}q), \theta \in \mathbb{R}\} \subset S^2 \times SU(2) \quad (4)$$

pour deux vecteurs orthogonaux unitaires $u, \omega \in \text{Im}(\mathcal{H})$ (u étant la position initiale et $\mathbb{R}\omega$ l'axe de la boule fixe autour duquel le spineur roule) et $q \in SU(2)$ (« l'orientation » initiale).

Démonstration. Rappelons que dans $S^2 \times SO(3)$, une ligne est de la forme :

$$L = \{(\cos(\theta)u + \sin(\theta)v, \text{Rot}(u \wedge v, (R+1)\theta)g), \theta \in \mathbb{R}\} \subset S^2 \times SO(3),$$

où u, v sont deux vecteurs orthogonaux de S^2 et $g \in SO(3)$.

Pour passer à $S^2 \times SU(2)$, il faut remplacer g et $\text{Rot}(u \wedge v, (R+1)\theta)$ par un de leurs deux antécédents par le morphisme φ . Notons q un antécédent de g par φ . De plus, si on note $\omega = u \wedge v$, on a :

$$\begin{aligned} \text{— } \varphi_{e^{(1+R)\theta\omega/2}} &= \text{Rot}(\omega, (R+1)\theta) \\ \text{— } e^{\theta\omega}u &= \cos(\theta)u + \sin(\theta)(\omega u) = \cos(\theta)u + \sin(\theta)v \text{ (car } (u \times v)u = uvu = -u^2v = v \text{ puisque} \\ &\quad u \text{ et } v \text{ sont deux quaternions imaginaires purs orthogonaux)} \end{aligned}$$

Donc une ligne dans $S^2 \times SU(2)$ est de la forme :

$$\tilde{L} = \{(e^{\theta\omega}u, e^{(R+1)\theta\omega/2}q), \theta \in \mathbb{R}\} \subset S^2 \times SU(2),$$

et en remplaçant θ par 2θ on obtient l'expression annoncée. \square

2.3 Spineur roulant sur un plan projectif

Finalement, nous allons considérer une troisième variante du problème, en quotientant S^2 par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour obtenir un spineur roulant sur le plan projectif $\mathbb{R}P^2$. En effet, nous verrons que l'espace $\mathbb{R}P^2 \times SU(2)$ maintenant considéré s'identifie à l'espace des sous-espaces nuls de dimension 1 de $\text{Im}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{H}$. Nous verrons également pourquoi le rapport des rayons 3 intervient spécifiquement.

Pour $(v, q) \in S^2 \times SU(2)$, on notera $(\pm v, q) \in \mathbb{R}P^2 \times SU(2)$ la classe d'équivalence contenant les deux points (v, q) et $(-v, q)$.

L'espace $\text{Im}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{H}$ est un espace vectoriel de dimension 7, que l'on peut équiper de la forme quadratique de signature $(3, 4)$ définie par :

$$Q(a, b) = |a|^2 - |b|^2 = N(a)_N(b). \quad (5)$$

Définition 2.2. On dit qu'un vecteur x de $\text{Im}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{H}$ est un *vecteur isotrope* s'il vérifie $Q(x) = 0$.

Un *sous-espace isotrope* de $\text{Im}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{H}$ est un sous-espace dont tous les vecteurs sont isotropes.

On définit le *cône de lumière* C des vecteurs isotropes :

$$C = \{x \in \text{Im}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{H}, Q(x) = 0\}, \quad (6)$$

et le cône de lumière projectif :

$$PC = \{x \in C, x \neq 0\}/\mathbb{R}^*, \quad (7)$$

où \mathbb{R}^* agit par dilatation sur le cône C . Un point de PC est identifié à un sous-espace isotrope de dimension 1 de $\text{Im}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{H}$, engendré par un vecteur isotrope x . En renormalisant, on peut supposer que $x = (v, q)$ est de norme 1, i.e. $|v|^2 = |q|^2 = 1$. Donc x est un point de $S^2 \times SU(2)$ et $-x$ étant dans la même classe d'équivalence que x dans PC , on notera cette classe $\pm(v, q)$, pour $(v, q) \in S^2 \times SU(2)$.

Proposition 2.6. *On a un difféomorphisme*

$$\begin{aligned} \tau: \quad \mathbb{R}P^2 \times SU(2) &\longrightarrow PC \\ (\pm v, q) &\longmapsto \pm(v, vq). \end{aligned}$$

Démonstration. τ est bien définie car $(-v, (-v)q) = -(v, q)$. De plus, τ a pour fonction réciproque $\pm(v, q) \mapsto (\pm v, v^{-1}q)$ et ces deux fonctions sont bien C^∞ . \square

Proposition 2.7. *Une ligne dans PC est de la forme :*

$$L = \{\pm(e^{2\theta\omega}u, e^{-(R-1)\theta\omega}uq), \theta \in \mathbb{R}\} \subset PC \quad (8)$$

pour deux vecteurs orthogonaux unitaires $u, v \in \text{Im}(\mathcal{H})$ et $q \in SU(2)$.

Démonstration. Dans $S^2 \times SU(2)$, une ligne était de la forme :

$$\{(e^{2\theta\omega}u, e^{(R+1)\theta\omega}q), \theta \in \mathbb{R}\}$$

pour deux vecteurs orthogonaux unitaires $u, \omega \in \text{Im}(\mathcal{H})$ et $q \in SU(2)$.

En quotientant dans $\mathbb{R}P^2$ on obtient :

$$\{(\pm e^{2\theta\omega}u, e^{(R+1)\theta\omega}q), \theta \in \mathbb{R}\}$$

puis en appliquant le difféomorphisme τ :

$$\{\pm(e^{2\theta\omega}u, e^{2\theta\omega}ue^{(R+1)\theta\omega}q), \theta \in \mathbb{R}\} = \{\pm(e^{2\theta\omega}u, e^{-(R-1)\theta\omega}uq), \theta \in \mathbb{R}\}$$

car u et ω sont deux quaternions imaginaires orthogonaux donc ils anticommulent. \square

Si $X \subset \text{Im}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{H}$ est un sous espace isotrope de dimension 2, on peut le projectiviser et obtenir une courbe dans PC :

$$PX = \{x \in X, x \neq 0\}/\mathbb{R}^*. \quad (9)$$

On a alors une caractérisation particulièrement sympathique des lignes dans PC , dans le cas où le rayon R de la boule fixe est 3.

Théorème 2.1. *Toute ligne de PC est la projectivisation d'un espace isotrope de dimension 2 de $\text{Im}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{H}$ si et seulement si $R = 3$.*

Démonstration. Pour pouvoir faire les calculs, on polarise la forme quadratique $Q : Q(x) = x \cdot x$, avec pour $(a, b), (c, d) \in \text{Im}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{H}$, $(a, b) \cdot (c, d) = a \cdot c - b \cdot d$ où $a \cdot c = \Re(a\bar{c})$ est le produit scalaire habituel de \mathcal{H} vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel.

Sens direct

Soit $L = \{\pm(e^{2\theta\omega}u, e^{-(R-1)\theta\omega}uq), \theta \in \mathbb{R}\}$ une ligne de PC et supposons que L est le projectivisé d'un sous-espace isotrope $X \subset \text{Im}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{H}$. En prenant $x = (u, uq)$ et $y = (e^{2\theta\omega}u, e^{-(R-1)\theta\omega}uq)$ deux points sur cette ligne, on a $x+y \in L$ et $Q(x+y) = Q(x) + 2x \cdot y + Q(y) = 0$, d'où $x \cdot y = 0$.

Calculons :

$$\begin{aligned} x \cdot y &= u \cdot e^{2\theta\omega}u - uq \cdot e^{-(R-1)\theta\omega}uq \\ &= u \cdot e^{2\theta\omega}u - u \cdot e^{-(R-1)\theta\omega}u \end{aligned}$$

(car la multiplication à droite par un quaternion imaginaire préserve le produit scalaire sur $\text{Im}(\mathcal{H})$)

Comme ω est orthogonal à u et $e^{2\theta\omega}u$ correspond à la rotation de u d'un angle 2θ autour de l'axe $\mathbb{R}\omega$, on a

$$u \cdot e^{2\theta\omega}u = \cos(2\theta)$$

et

$$u \cdot e^{-(R-1)\theta\omega}u = \cos((1-R)\theta),$$

d'où

$$x \cdot y = \cos(2\theta) = \cos((R-1)\theta)$$

et $x \cdot y = 0$ entraîne $\cos(2\theta) = \cos((R-1)\theta)$. Comme ça doit être vrai pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on en déduit $1-R \in \{-2, 2\}$, d'où $R = 3$ (car $R > 0$).

Réciproque : Si $R = 3$, une ligne dans PC est de la forme $L = \{\pm(e^{2\theta\omega}u, e^{-2\theta\omega}uq), \theta \in \mathbb{R}\}$. En développant les exponentielles on a :

$$\begin{aligned} (e^{2\theta\omega}u, e^{-2\theta\omega}uq) &= (\cos(2\theta)u + \sin(2\theta)\omega u, \cos(2\theta)uq - \sin(2\theta)\omega uq) \\ &= \cos(2\theta)(u, uq) + \sin(2\theta)(\omega u, -\omega uq). \end{aligned}$$

On constate que ce vecteur appartient au sous-espace isotrope de dimension 2 engendré par les vecteurs isotropes (u, uq) et $(\omega u, -\omega uq)$, qui sont orthogonaux car $u \cdot \omega u - uq \cdot (-\omega uq) = 2u \cdot \omega u = 0$ car ω et u sont des quaternions imaginaires orthogonaux. \square

On comprend donc pourquoi le cas $R = 3$ est si intéressant puisqu'on a alors une description des lignes dans PC comme projectivisations de sous-espaces isotropes de dimension 2. Néanmoins la réciproque est fautive : tout sous-espace isotrope de dimension 2 ne se projectivise pas sur une ligne de PC . Pour comprendre quels sous-espaces se projectivent bien, on introduit les octonions déployés...

3 Boule qui roule et octonions déployés

Nous avons identifié l'espace des configurations pour un spineur roulant sur un plan projectif au cône projectif PC . Nous avons également vu que les lignes dans cet espace prenaient une forme particulière, à savoir des projectivisations de sous-espaces nuls, lorsque le rapport des rayons entre les deux boules était égal à 3. Nous allons maintenant identifier $\text{Im}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{H}$ aux imaginaires purs d'une algèbre de composition, les octonions déployés. Nous serons en mesure de caractériser les lignes dans PC à l'aide de la structure algébrique de cet espace, quand le rapport des rayons est de 3. Les automorphismes des octonions déployés constitueront alors des symétries de l'espace des configurations qui enverront des lignes sur des lignes.

Définition 3.1. On appelle *octonions*, et on note \mathcal{O} , l'espace vectoriel $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ muni du produit

$$(a, b)(c, d) = (ac - b\bar{d}, \bar{a}d + cb). \quad (10)$$

L'espace \mathcal{O} muni de la forme quadratique définie positive donnée par $Q(a, b) = |a|^2 + |b|^2$ devient une algèbre de composition (voir la section correspondante pour une définition et les propriétés utiles), non commutative et non associative. On note G_2 son groupe d'automorphismes.

On appelle *octonions déployés*, et on note \mathcal{O}' , l'espace vectoriel $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ muni du produit

$$(a, b)(c, d) = (ac + b\bar{d}, \bar{a}d + cb). \quad (11)$$

L'espace \mathcal{O}' muni de la forme quadratique non dégénérée de signature $(4, 4)$ donnée par $Q(a, b) = |a|^2 - |b|^2$ devient une algèbre de composition. On note G'_2 son groupe d'automorphismes.

Nous nous intéresserons par la suite uniquement aux octonions déployés et à G'_2 , qui sont étroitement liés au problème posé. Introduisons quelques objets et notations classiques dans la théorie des algèbres de composition, dans le cas particulier de \mathcal{O}' . Comme dans toute algèbre de composition, la forme quadratique sur \mathcal{O}' peut se réécrire en utilisant la conjugaison :

$$\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b). \quad (12)$$

Propriétés 3.1. On a alors :

$$Q(x) = x\bar{x} = \bar{x}x. \quad (13)$$

$$\bar{\bar{x}} = x, \overline{xy} = \bar{y}\bar{x}. \quad (14)$$

Définition 3.2. On définit l'ensemble des octonions déployés imaginaires purs, noté \mathcal{I} par :

$$\mathcal{I} = \{x \in \mathcal{O}', \bar{x} = -x\} = \text{Im}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{H}. \quad (15)$$

Comme tout automorphisme de \mathcal{O}' commute avec la conjugaison (voir 4.2), \mathcal{I} est stable pour l'action de G'_2 et forme ainsi une représentation de dimension 7 de G'_2 , qui est de plus irréductible. La forme quadratique Q restreinte à \mathcal{I} a pour signature $(3, 4)$.

Ainsi, le cône C vit maintenant dans \mathcal{I} . Par ailleurs les automorphismes d'une algèbre de composition sont des isométries, donc G'_2 agit sur C , ainsi que sur sa projectivisation PC . On sait déjà voir cet espace comme l'espace des configurations d'un spineur roulant sur un plan projectif et comment y décrire les trajectoires pour n'importe quel rapport de rayon. Dans la suite, nous montrons que lorsque le rapport est 3 l'action de G'_2 préserve ces trajectoires.

Définition 3.3. On appelle *sous-algèbre nulle* de \mathcal{O}' tout sous-espace vectoriel V de \mathcal{O}' tel que :

$$\forall x, y \in V, xy = 0. \quad (16)$$

Proposition 3.1. *Toute sous-algèbre nulle est incluse dans \mathcal{I} , est un sous-espace isotrope, et donc inclus dans C .*

Démonstration. Si $x = (a, b)$ est dans une sous-algèbre nulle, alors en particulier $x^2 = 0$, donc $(a^2 + |b|^2, (a + \bar{a})b) = 0$. Si $b = 0$, alors $a = 0$ (les quaternions sont sans diviseur de zéro). Sinon, a est imaginaire pur, donc x également. Par ailleurs, $Q(x) = x\bar{x} = -x^2 = 0$. \square

Théorème 3.1. *Supposons $R = 3$. Alors toute ligne dans PC résulte de la projectivisation d'une sous-algèbre nulle de dimension 2 de \mathcal{O}' , et, réciproquement, la projectivisation de toute sous-algèbre nulle de dimension 2 de \mathcal{O}' donne une ligne dans PC .*

Démonstration. Soit L une ligne dans PC . Elle est de la forme (quand $R = 3$) :

$$L = \{ \pm (e^{2\theta w}u, e^{-2\theta w}uq) \}. \quad (17)$$

Par le théorème précédent, L est la projectivisation d'un sous-espace isotrope de dimension 2, $X \subset \text{Im}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{H}$. Le sous-espace vectoriel X est engendré par deux vecteurs linéairement indépendants lui appartenant, d'où en prenant $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{4}$ dans la formule pour L :

$$X = \langle (u, uq), (wu, -wuq) \rangle. \quad (18)$$

Le sous-espace X est en réalité une sous-algèbre nulle. Pour le vérifier, il suffit de montrer que le produit de deux quelconques des vecteurs de cette base donne 0. Ces deux vecteurs sont dans un sous-espace isotrope et imaginaires purs, donc leurs carrés s'annulent. En effet, on a pour x un tel vecteur :

$$-x^2 = x\bar{x} = Q(x) = 0. \quad (19)$$

Enfin, comme u est unitaire (ainsi que q), imaginaire pur, et anti-commute avec w , on a :

$$(u, uq)(wu, -wuq) = (uwu + (-wuq)\bar{u}q, \bar{u}(-wuq) + wuuq) = (uwu - w, wuuq - wq) = 0. \quad (20)$$

Donc X est bien une sous-algèbre nulle de dimension 2.

Réciproquement, donnons-nous une sous-algèbre nulle X de dimension 2. Pour montrer que sa projectivisation donne une ligne dans PC , il suffit de montrer que X est de la forme :

$$X = \langle (u, uq), (wu, -wuq) \rangle, \quad (21)$$

où u et w sont unitaires imaginaires et orthogonaux et q est unitaire. Soit x un vecteur non nul dans X . On peut écrire $x = (u, uq)$ avec u imaginaire, et quitte à renormaliser on peut supposer u unitaire (et donc q car x est nul). Choisissons maintenant dans X un vecteur $y = (v, v')$ indépendant de x . En lui soustrayant un multiple de x , on peut prendre v et u orthogonaux, et en renormalisant on se ramène à v et v' unitaires. v et u étant des quaternions imaginaires unitaires orthogonaux, on peut écrire $v = wu$ où w est imaginaire unitaire, orthogonal à u et v . Nous avons donc :

$$X = \langle (u, uq), (wu, v') \rangle. \quad (22)$$

Enfin on doit avoir $xy = 0$, or :

$$xy = (uwu + v'\bar{u}q, \bar{u}v' + wuuq) = (v'\bar{u}q + w, \bar{u}v' + wuuq). \quad (23)$$

Donc $v' = -wuq$ comme voulu. □

Corollaire 3.1. *Quand $R = 3$, l'action de G'_2 sur PC envoie des lignes sur des lignes.*

Grâce à la correspondance entre les lignes dans PC et les sous-algèbres nulles de dimension 2 de \mathcal{I} , nous pouvons utiliser la structure algébrique de \mathcal{I} pour étudier la géométrie de PC .

Définition 3.4. Soit $x \in C$. On définit l'annihilateur de x par :

$$Ann_x = \{y \in \mathcal{I}, yx = 0\}. \quad (24)$$

Si x est non nul dans C , alors tout $y \in Ann_x$ indépendant de x engendrera avec lui une sous-algèbre nulle de dimension 2, qui, une fois projectivée, donnera une ligne dans PC passant par $\langle x \rangle$. En effet, c'est clair si $y \in C$, ce que nous allons montrer dans la proposition suivante, qui étudie l'annihilateur d'un point de C .

Proposition 3.2. *Soit $x \in C$, non nul. Alors :*

1. Ann_x est un sous-espace isotrope de \mathcal{I} .
2. Deux éléments quelconques de Ann_x anticommulent.
3. Ann_x est de dimension 3.

Démonstration. Notons que pour $y, y' \in \mathcal{I}$ on a :

$$y \cdot y' = -\frac{1}{2}(yy' + y'y). \quad (25)$$

On peut donc montrer que deux vecteurs $y, y' \in Ann_x$ anti-commutent et sont orthogonaux en même temps. Or on a les égalités :

$$-2(y \cdot y')x = (yy')x + (y'y)x = y(y'x) + y'(yx) + [y, y', x] + [y', y, x], \quad (26)$$

où $[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$ est l'associateur de de (x, y, z) . Les deux premiers termes sont nuls car y et y' annihilent x . Les deux derniers s'annulent car l'associateur est antisymétrique (\mathcal{O}' est une algèbre de composition alternative).

Pour prouver (3), nous allons montrer qu' Ann_x est isomorphe à $\text{Im}(\mathcal{H})$. Écrivons x sous la forme $(u, q) \in \mathcal{I}$. Quitte à considérer un λx (ce qui ne change pas Ann_x), on peut supposer u unitaire, et donc q également ($Q(x) = 0$). Soit maintenant $y = (c, d) \in Ann_x$. Alors :

$$xy = (uc + d\bar{q}, \bar{u}d + cq). \quad (27)$$

Ceci s'annule si et seulement si $d = -ucq$. Ainsi, $y = (c, -ucq)$, et l'application linéaire

$$\begin{aligned} f : \text{Im}(\mathcal{H}) &\rightarrow Ann_x \\ c &\mapsto (c, -ucq) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. □

Définition 3.5. Deux points a, b sont dits *distants d'au plus n mouvements* s'il existe une suite de points a_0, \dots, a_n telle que $a_0 = a$, $a_n = b$ et que pour tous deux points consécutifs il existe une ligne passant par ces deux points. On dira que a et b sont *distants de n mouvements* si n est le plus petit entier m tel que a et b sont distants d'au plus m mouvements.

Proposition 3.3. *On a les résultats suivants :*

1. Deux points a et b sont distants de 0 mouvements si et seulement si $a = b$.
2. Deux points a et b sont distants d'un mouvement si et seulement si il existe une ligne les contenant et $a \neq b$.
3. Deux points a et c sont distants de deux mouvements si et seulement si il existe un unique point b tel que :
 - il existe une ligne contenant a et b ,
 - il existe une ligne contenant b et c .

Démonstration. Les deux premiers points sont immédiats. Pour le troisième, supposons tout d'abord que a et c sont distants de deux mouvements. L'existence de b découle de la définition.

Montrons l'unicité. Soit b et b' deux points satisfaisant la propriété demandée. Écrivons $a = \langle x \rangle$, $b = \langle y \rangle$, $b' = \langle y' \rangle$, et $c = \langle z \rangle$. On sait que $x, z \in Ann_y$, car $\langle x, y \rangle$ et $\langle y, z \rangle$ sont des sous-algèbres nulles (de dimension 2). Si $\langle x, y, z \rangle$ est de dimension 2, alors x et z sont contenus dans une sous-algèbre nulle de dimension 2, et donc il existe une ligne passant par a et b , de

sorte que a et b sont en réalité distants de un mouvement. Donc $\langle x, y, z \rangle$ est de dimension 3, et en fait :

$$\text{Ann}_y = \langle x, y, z \rangle. \quad (28)$$

De même, $\text{Ann}_{y'} = \langle x, y', z \rangle$. Comme les annihilateurs sont des sous-espaces isotropes, x , z et y sont deux à deux orthogonaux, ainsi que x , z et y' . De plus, y et y' sont dans Ann_x , donc sont orthogonaux. Donc $\langle x, y, y', z \rangle$ est un sous-espace isotrope. Mais la dimension d'un sous-espace isotrope de \mathcal{I} (de dimension 7) est 3. Donc :

$$y' = \alpha x + \beta y + \gamma z. \quad (29)$$

En multipliant par x :

$$xy' = \gamma xz = 0. \quad (30)$$

$xz \neq 0$, car sinon $\langle x, z \rangle$ est une sous-algèbre nulle de dimension 2 qui donne une ligne joignant a et c , donc $\gamma = 0$. De même, comme $y'z = 0$, on a $\alpha = 0$. Donc $y' = \beta y$. Donc $b = b'$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un unique point b tel que a et b (respectivement b et c) soient alignés. Alors par l'existence a et c sont distants d'au plus deux mouvements, et par l'unicité ils ne peuvent pas être distants d'au plus un mouvement. D'où le résultat. \square

Avec le théorème suivant, nous serons en mesure de déterminer le nombre de mouvements nécessaires pour relier $\langle x \rangle$ à $\langle y \rangle$ par un calcul sur x et y . Commençons par une notation et quelques remarques calculatoires.

Définition 3.6. On définit le *produit-croix* sur \mathcal{O}' par :

$$x \times y = \frac{1}{2} (xy - yx). \quad (31)$$

Remarque 3.1. Pour $x, y \in \mathcal{I}$ on a les relations suivantes :

$$x \cdot y = -\frac{1}{2} (xy + yx), \quad (32)$$

$$xy = x \times y - x \cdot y, \quad (33)$$

où $x \times y \in \mathcal{I}$ et $x \cdot y$ est un multiple de l'identité. Il en découle que si $xy = 0$, alors $x \times y = x \cdot y = 0$.

Théorème 3.2. Soient $\langle x \rangle, \langle y \rangle \in PC$. Alors :

1. $\langle x \rangle$ et $\langle y \rangle$ sont distants d'au plus un mouvement si et seulement si $xy = 0$, ou de manière équivalente $x \times y = 0$.
2. $\langle x \rangle$ et $\langle y \rangle$ sont distants d'au plus deux mouvements si et seulement si $x \cdot y = 0$.
3. $\langle x \rangle$ et $\langle y \rangle$ sont distants d'au plus trois mouvements.

Démonstration. Le point $\langle x \rangle$ est distant d'au plus un mouvement de $\langle y \rangle$ si et seulement si $\langle x, y \rangle$ est une sous-algèbre nulle, ce qui est équivalent à $xy = 0$ et $yx = 0$ (car $x, y \in C$). Mais on a les égalités :

$$yx = \overline{y\bar{x}} = \overline{\bar{y}x}. \quad (34)$$

Il suffit donc de montrer que $xy = 0$ équivaut à $x \times y = 0$. Si $xy = 0$, alors $yx = 0$ par le calcul précédent, et donc $x \times y = 0$. Réciproquement, supposons $x \times y = 0$. Alors $xy = -x \cdot y$. Or, en utilisant l'alternativité dans \mathcal{O}' et le fait que x et y commutent :

$$(x \cdot y)x = -\frac{1}{2} (xy + yx)x = -x^2y = (x \cdot x)y = 0. \quad (35)$$

D'où le résultat.

Supposons $\langle x \rangle$ et $\langle z \rangle$ distants d'au plus deux mouvements. Il existe $\langle y \rangle$ distant d'au plus un mouvement de $\langle x \rangle$ et $\langle z \rangle$. Alors $x, z \in \text{Ann}_y$, or les annihilateurs sont des sous-espaces nuls, donc $x \cdot z = 0$. Réciproquement, supposons $x \cdot z = 0$. Si $xz = 0$, c'est bon car alors $\langle x \rangle$ et $\langle z \rangle$ sont distants d'au plus un mouvement. Sinon, $\langle xz \rangle$ est distant d'au plus un mouvement de $\langle x \rangle$ et de $\langle z \rangle$. En effet on a :

$$x(xz) = x^2z = -(x \cdot x)z = 0. \quad (36)$$

Et :

$$(xz)z = xz^2 = -(z \cdot z)x = 0. \quad (37)$$

Et la première partie du théorème permet de conclure.

Prenons $\langle x \rangle$ et $\langle z \rangle$ dans PC . On cherche $\langle y \rangle$ distant d'au plus un mouvement de $\langle x \rangle$ et d'au plus deux de $\langle z \rangle$, c'est-à-dire qu'on veut $y \in C$ tel que $xy = 0$ et $y \cdot z = 0$. Or Ann_x est de dimension 3, donc le noyau de la forme linéaire $\text{Ann}_x \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto y \cdot z$ est au moins de dimension 2, ce qui garantit l'existence du y désiré. \square

Définition 3.7. On appelle *triplet nul* tout triplet (x, y, z) d'éléments de C deux à deux orthogonaux satisfaisant :

$$(x \times y) \cdot z = \frac{1}{2}. \quad (38)$$

Nous montrerons que l'ensemble des triplets nuls est un G'_2 -torseur : une fois deux triplets nuls donnés, il existe un unique élément de G'_2 qui envoie le premier sur le second. Par ailleurs les triplets nuls se révéleront particulièrement adaptés à l'étude de la géométrie de PC , car chaque point d'un triplet nul donne un point dans PC , et nous verrons que ces points sont deux à deux distants de deux mouvements.

Le théorème suivant explicite une base canonique de \mathcal{I} étant donné un triplet nul, ainsi que de nombreuses relations algébriques entre les membres de ce triplet.

Théorème 3.3. Soit (x, y, z) un triplet nul. La famille suivante est une base de \mathcal{I} :

$$(x, y, z, x \times y, y \times z, z \times x, 2(x \times y) \times z). \quad (39)$$

De plus, on a les relations suivantes, pour le produit-point (commutatif) :

$$x \cdot (y \times z) = (x \times y) \cdot z = y \cdot (z \times x) = \frac{1}{2} \quad (40)$$

$$x \cdot (x \times y) = x \cdot y = x \cdot z = x \cdot (z \times x) = 0 \quad (41)$$

$$y \cdot (y \times z) = y \cdot z = y \cdot x = y \cdot (x \times y) = 0 \quad (42)$$

$$z \cdot (z \times x) = z \cdot x = z \cdot y = z \cdot (y \times z) = 0 \quad (43)$$

— $2(x \times y) \times z$ est orthogonal aux autres vecteurs de la base, et $Q(2(x \times y) \times z) = -1$.
Et pour le produit-croix (anticommutatif) :

$$\forall a \neq b \in x, y, z, 0 = a \times (a \times b) \quad (44)$$

$$(x \times y) \times (y \times z) = y \quad (45)$$

$$(y \times z) \times (z \times x) = z \quad (46)$$

$$(z \times x) \times (x \times y) = x \quad (47)$$

$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z = y \times (z \times x) = \frac{1}{2}(2(x \times y) \times z) \quad (48)$$

$$(2(x \times y) \times z) \times x = x \quad (49)$$

$$(2(x \times y) \times z) \times y = y \quad (50)$$

$$(2(x \times y) \times z) \times z = z \quad (51)$$

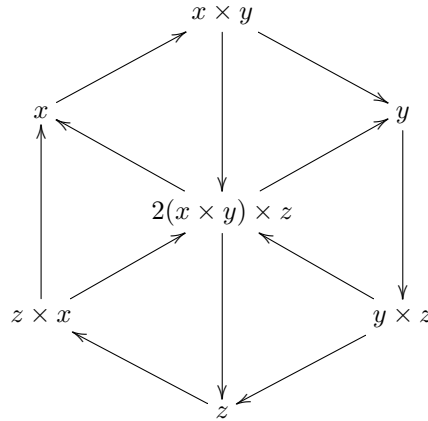
$$(x \times y) \times (2(x \times y) \times z) = x \times y \quad (52)$$

$$(y \times z) \times (2(x \times y) \times z) = y \times z \quad (53)$$

$$(z \times x) \times (2(x \times y) \times z) = z \times x \quad (54)$$

Remarque 3.2. Ces relations peuvent être résumées grâce au diagramme suivant, qui vérifie :

- Les six sommets extérieurs sont des vecteurs isotropes.
- Les paires de sommets opposés ont pour produit-point $\frac{1}{2}$.
- Chaque sommet extérieur est orthogonal à tous les autres, excepté le sommet opposé.
- Le sommet du milieu est orthogonal à tous les autres et n'est pas isotrope. Son produit-point avec lui-même est égal à -1 .
- Le produit-croix de deux sommets adjacents est nul.
- Pour deux sommets extérieurs qui ne sont ni adjacents ni opposés, le produit-croix est donné par le sommet extérieur situé entre les deux s'ils sont multipliés dans l'ordre est donné par les orientations des flèches.
- Le produit-croix de deux sommets extérieurs opposés, multipliés dans l'ordre spécifié par l'orientation des flèches, est égal à la moitié du sommet central.
- Le produit-croix du sommet central et des sommets extérieurs est égal à ce sommet extérieur s'ils sont multipliés dans l'ordre donné par l'orientation des flèches.



Nous montrons tout d'abord deux lemmes calculatoires, utiles dans la démonstration :

Lemme 3.1. Si $u, v \in C$ sont orthogonaux, alors :

$$(u \times v) \times u = 0. \quad (55)$$

Lemme 3.2. Les vecteurs

$$1, i = z + (x \times y), j = z - (x \times y), k = i \times j = w \quad (56)$$

engendrent une copie des quaternions déployés dans \mathcal{O}' .

Démonstration. Il suffit de vérifier que $i^2 = j^2 = -1$ et que i et j anticommulent, car alors $k = i \times j = ij$ anticommute avec i et j et donne 1 une fois élevé au carré. On a :

$$i^2 = (z + x \times y)^2 \quad (57)$$

$$= z^2 + z(x \times y) + (x \times y)z + (x \times y)^2 \quad (58)$$

$$= -2z \cdot (x \times y) \quad (59)$$

$$= -1. \quad (60)$$

On montre de même que $j^2 = 1$. Puis, i et j sont orthogonaux (et donc anticommulent) :

$$i \cdot j = z \cdot z + (x \times y) \cdot z - (x \times y) \cdot z - (x \times y) \cdot (x \times y) = 0. \quad (61)$$

□

Démonstration. Comme u et v sont orthogonaux, ils anticommulent, donc $u \times v = uv$. On a donc :

$$(uv) \times u = \frac{1}{2}((uv)u - u(uv)) = -u^2v = (u \cdot u)v = 0. \quad (62)$$

□

Démonstration. 1. Le carré des vecteurs de la base annoncée donne 0, exception faite du dernier. En effet, c'est clair pour x , y et z , et pour les 3 autres :

$$(x \times y)(x \times y) = -(xy)(yx) = -x(y^2)x = 0. \quad (63)$$

2. On a :

$$x(x \times y) = x \times (xy) = x^2y = 0. \quad (64)$$

Donc $x \cdot (x \times y) = x \times (x \times y) = 0$ (et de même en remplaçant x par y et y par z , ou x par z et y par x). Donc x et $x \times y$ donnent des points de PC qui sont distants d'au plus un mouvement. Par conséquent, $x \times y$ et $y \times z$ (par exemple) sont distants d'au plus deux mouvements, donc sont orthogonaux.

3. Toujours concernant le produit-point, on a le calcul suivant :

$$\begin{aligned} -2x \cdot (y \times z) &= x(y \times z) + (y \times z)x \\ &= x(yz) + (yz)x = x(yz) - (zy)x \\ &= (xy)z - z(yx) - [x, y, z] - [z, y, x] \\ &= (x \times y)z + z(x \times y) \\ &= -2(z \cdot (x \times y)) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Les autres calculs sont similaires.

4. A propos du produit-croix, on a, par exemple, le calcul suivant :

$$\begin{aligned} (y \times z) \times (z \times x) &= (yz)(zx) \\ &= (zy)(xz) \\ &= z(yx)z \\ &= z(x \times y)z \\ &= -z^2(x \times y) + z(z(y \times x) + (y \times x)z) \\ &= -2z(z \cdot (y \times x)) \\ &= z. \end{aligned}$$

A la troisième étape, nous avons utilisé une identité de Moufang (voir 4.3), valable dans n'importe quelle algèbre alternative :

$$(zy)(xz) = z(yx)z. \quad (65)$$

5. Notons que $x + z$ et y sont dans C et orthogonaux. En appliquant le lemme, on a :

$$((x + z) \times y) \times (x + z) = 0. \quad (66)$$

En utilisant la bilinéarité du produit-croix :

$$(x \times y) \times x + (x \times y) \times z + (z \times y) \times x + (z \times y) \times z = 0. \quad (67)$$

Les premier et dernier termes sont nuls. Donc :

$$(x \times y) \times z = (y \times z) \times x. \quad (68)$$

On procède de même pour les résultats similaires.

6. Il nous reste à calculer le produit-croix et le produit-point des six premiers vecteurs avec $w = 2(x \times y) \times z$. Par le second lemme, les vecteurs

$$1, i = z + (x \times y), j = z - (x \times y), k = i \times j = w \quad (69)$$

engendrent une copie des quaternions déployés dans \mathcal{O}' . Les vecteurs k, i et j sont donc orthogonaux, ce qui impose :

$$w \cdot z = 0, w \cdot (x \times y) = 0. \quad (70)$$

De plus, $k \times i = j$, donc :

$$w \times z = z, w \times (x \times y) = -(x \times y). \quad (71)$$

Les quatre autres égalités s'en déduisent par permutations cycliques de x, y et z (qui laissent inchangé $(x \times y) \times z$).

7. Il nous reste enfin à montrer que nos sept vecteurs forment une base de \mathcal{I} . Comme x, y et $x \times y$ sont linéairement indépendants (on peut le voir en prenant le produit-croix de toute combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs par x et y), on a :

$$Ann_{x \times y} = \langle x, x \times y, y \rangle. \quad (72)$$

De même :

$$Ann_z = \langle z \times x, z, y \times z \rangle. \quad (73)$$

Ces sous-espaces sont supplémentaires : en effet, un élément non nul de leur intersection donnerait un point dans PC distant d'au plus un mouvement de $\langle x \times y \rangle$ et de z , qui seraient donc distants d'au plus deux mouvements, ce qui contredit $(x \times y) \cdot z \neq 0$. Ces deux sous-espaces engendrent donc un sous-espace de dimension 6 de \mathcal{I} . Il reste à trouver un septième vecteur indépendant, et $2(x \times y) \times z$ convient car il est orthogonal à $Ann_{x \times y}$ et Ann_z . □

Grâce à cette base particulière pour I , nous allons pouvoir montrer que l'ensemble des triplets nuls est un G'_2 -torseur.

Théorème 3.4. *Étant donnés deux triplets nuls (x, y, z) et (x', y', z') , il existe un unique élément $g \in G'_2$ qui envoie l'un sur l'autre :*

$$(gx, gy, gz) = (x', y', z'). \quad (74)$$

Démonstration. Les éléments de G'_2 sont des automorphismes d'algèbre sur les quaternions donc ils préservent le produit-point et le produit-croix et un triplet nul est toujours envoyé sur un triplet nul. De plus, l'unicité est assurée par le fait qu'un triplet nul engendre \mathcal{I} : l'action d'un $g \in G'_2$ est entièrement déterminée par son action sur un triplet nul et il y a au plus un élément de G'_2 qui envoie (x, y, z) sur (x', y', z') . Pour montrer l'existence d'un tel élément, considérons l'application linéaire $g: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ qui envoie la base $(x, y, z, x \times y, y \times z, z \times x, 2(x \times y) \times z)$ sur la base $(x', y', z', x' \times y', y' \times z', z' \times x', 2(x' \times y') \times z')$. D'après le théorème précédent, cet isomorphisme linéaire préserve le produit-point et le produit-croix. C'est donc un élément de G'_2 , comme souhaité. \square

Proposition 3.4. *Soient $x, y \in \mathcal{I}$ deux vecteurs nuls tels que $\langle x \rangle$ et $\langle y \rangle$ soient distants de deux mouvements. Alors il existe un vecteur isotrope $z \in \mathcal{I}$ tel que (x, y, z) soit un triplet isotrope.*

Démonstration. Nous avons vu que les vecteurs x, y et $x \times y$ engendraient un sous-espace isotrope maximal :

$$V = \text{Ann}_{x \times y} = \langle x, x \times y, y \rangle. \quad (75)$$

Soit W un sous-espace isotrope maximal en somme directe avec V . La forme quadratique Q est non-dégénérée sur la somme directe $V \oplus W \subset \mathcal{I}$ (car un sous-espace isotrope est de dimension au plus 3). L'application qui réalise le produit-point avec x ,

$$\begin{aligned} W &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto w \cdot x \end{aligned}$$

a donc un noyau de dimension 2 puisque l'image est de dimension 1. De même, l'application qui réalise le produit-point avec y ,

$$\begin{aligned} W &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\mapsto w \cdot y \end{aligned}$$

a un noyau de dimension 2. Ces deux noyaux sont distincts car sinon les deux formes linéaires seraient proportionnelles donc l'application qui réalise le produit-point avec $x - \lambda y$ serait nulle à la fois sur V et sur W donc x et y seraient proportionnels (car la forme quadratique est non dégénérée sur $V \oplus W$), ce qui contredit leur indépendance linéaire. Le sous-espace W est donc orthogonal à la fois à x et à y et l'intersection de ces deux noyaux (de dimension 2) dans W (de dimension 3) est de dimension 1. Soit $z \in W$ un vecteur générateur de cette intersection. Comme z est orthogonal à x et y , on doit avoir $z \cdot (x \times y) \neq 0$ car sinon le sous-espace $V \oplus W$ serait dégénéré pour la forme Q . Quitte à multiplier z par un scalaire on peut supposer $(x \times y) \cdot z = \frac{1}{2}$. On a alors bien un triplet nul (x, y, z) . \square

A partir de la proposition précédente, on peut créer un triplet nul à partir de deux vecteurs isotropes quelconques, pas nécessairement ceux dont les projectivisés sont distants de 2 mouvements.

Proposition 3.5. *On a les propriétés suivantes :*

1. *Tout vecteur isotrope $x \in \mathcal{I}$ est le premier vecteur d'un triplet nul (x, y, z) .*

2. Pour tous vecteurs isotropes $x, w \in \mathcal{I}$ tels que $\langle x \rangle$ et $\langle w \rangle$ sont distants d'un mouvement, il existe un triplet nul (x, y, z) tel que $w = x \times y$.
3. Pour tous vecteurs $x, w \in \mathcal{I}$ tels que $\langle x \rangle$ et $\langle w \rangle$ sont distants de trois mouvements, il existe un triplet nul (x, y, z) tel que $w = y \times z$.

Démonstration. On applique la proposition précédente à chaque fois.

1. Soit y n'importe quel vecteur isotrope distant de deux mouvements de x (existe car Ann_x est de dimension 3 et le noyau de l'application qui réalise le produit-point avec x sur \mathcal{I} est de dimension 6.) D'après la proposition 3.4, il existe z tel que (x, y, z) est un triplet nul.
2. Soit $\langle y \rangle$ distant de un mouvement de $\langle w \rangle$ et qui n'appartient pas à la ligne joignant $\langle w \rangle$ et $\langle x \rangle$. Alors $\langle x \rangle$ et $\langle y \rangle$ sont distants de deux mouvements et $\langle w \rangle$ est l'unique point distant de au plus un mouvement de $\langle x \rangle$ et $\langle y \rangle$. Or $\langle x \times y \rangle$ est également distant d'au plus un mouvement de $\langle x \rangle$ et $\langle y \rangle$. En effet, comme $x \cdot y = 0$ on a $x \times y = xy = -yx$ et $x \cdot (x \times y) = -\frac{1}{2}(x(xy) - (xy)x) = 0$ car x et y anticommulent et \mathcal{O}' est une algèbre de composition alternative. De même, $y \cdot (x \times y) = 0$. Par unicité de $\langle w \rangle$ on a donc $\langle w \rangle = \langle x \times y \rangle$ et quitte à multiplier y par un scalaire : $w = x \times y$. Comme x et y sont distants de deux mouvements, la proposition 3.4 permet de conclure.
3. Comme $\langle x \rangle$ et $\langle w \rangle$ sont distants de trois mouvements, on a $w \cdot x \neq 0$. Donc l'application linéaire

$$\begin{aligned} Ann_w &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto u \cdot x \end{aligned}$$

est de rang 1 et son noyau est de dimension 2. Soient y et z deux vecteurs orthogonaux qui engendrent ce noyau. Alors $\langle y \rangle$ et $\langle z \rangle$ sont chacun distants d'un mouvement de $\langle w \rangle$. S'ils étaient distants d'un mouvement l'un de l'autre on aurait $yz = 0$ et $\langle w, y, z \rangle$ serait une sous-algèbre nulle de dimension 3. Or la dimension maximale d'une sous-algèbre nulle est 2 donc $yz \neq 0$ et $\langle y \rangle$ et $\langle z \rangle$ sont distants de deux mouvements l'un de l'autre. Comme précédemment on a alors $\langle w \rangle = \langle y \times z \rangle$. De plus, x, y et z sont deux à deux orthogonaux par construction. Montrons que $(x \times y) \cdot z \neq 0$, ce qui assurera quitte à multiplier z par un scalaire que (x, y, z) est un triplet nul.

Remarquons que $Ann_w = \langle w, y, z \rangle$. De plus, Ann_x et Ann_w sont deux sous-espaces isotropes en somme directe et tous les deux de dimension maximale car si on avait un vecteur non nul dans leur intersection, il serait distant de un mouvement à la fois de $\langle w \rangle$ et de $\langle x \rangle$, ce qui contredit l'hypothèse que ces deux points sont distants de trois mouvements. Le produit-point (ou produit intérieur) se restreint sur la somme directe $Ann_x \oplus Ann_w$ en un produit intérieur non-dégénéré. En particulier, comme $x \times y \in Ann_x$ est orthogonal à tous les vecteurs de Ann_x , il doit avoir un produit intérieur non nul avec un vecteur de $Ann_w = \langle w, y, z \rangle$. Mais comme $\langle x \times y \rangle$ est distant d'un mouvement de $\langle y \rangle$, qui est distant d'un mouvement de $\langle w \rangle$, $x \times y$ est orthogonal à y et à w . D'où $(x \times y) \cdot z \neq 0$, ce qui achève la preuve. □

On peut utiliser les triplets nuls pour décomposer $PC \times PC$ selon ses orbites sous l'action de G'_2 . Il y en a exactement quatre :

Théorème 3.5. *Sous l'action de G'_2 , l'espace des paires de configurations $PC \times PC$ se décompose selon les orbites suivantes :*

1. X_0 , l'espace des paires de points distants de zéro mouvement l'un de l'autre. C'est l'ensemble diagonal :

$$X_0 = \{(\langle x \rangle, \langle x \rangle) \in PC \times PC\}. \quad (76)$$

2. X_1 , l'espace des paires de points distants de un mouvement l'un de l'autre :

$$X_1 = \{(\langle x \rangle, \langle y \rangle) \in PC \times PC, \langle x \rangle \neq \langle y \rangle \text{ et } x \times y = 0\}. \quad (77)$$

3. X_2 , l'espace des paires de points distants de deux mouvements l'un de l'autre :

$$X_2 = \{(\langle x \rangle, \langle y \rangle) \in PC \times PC, x \times y \neq 0 \text{ et } x \cdot y = 0\}. \quad (78)$$

4. X_3 , l'espace des paires de points distants de trois mouvements l'un de l'autre :

$$X_3 = \{(\langle x \rangle, \langle y \rangle) \in PC \times PC, x \cdot y \neq 0\}. \quad (79)$$

Démonstration. On combine le théorème 3.4 et la proposition 3.5.

1. Soient x et x' deux vecteurs isotropes non nuls dans C . D'après la proposition 3.5, on a des triplets nuls (x, y, z) et (x', y', z') et d'après le théorème 3.4, on a un élément $g \in G'_2$ qui envoie le premier triplet sur le second. En particulier, $gx = x'$. Ainsi, G'_2 agit transitivement sur les vecteurs isotropes de C , donc sur PC et sur X_0 .
2. Soient $\langle w \rangle$ et $\langle x \rangle$ deux points de PC distants de un mouvement l'un de l'autre. D'après la proposition 3.5, on a un triplet nul (x, y, z) tel que $w = x \times y$. Si $\langle w' \rangle$ et $\langle x' \rangle$ sont deux autres points distants de un mouvement, soit (x', y', z') un triplet nul associé. On dispose d'un $g \in G'_2$ qui envoie l'un sur l'autre. Alors $gx = x'$ et $gw = g(x \times y) = gx \times gy = x' \times y' = w'$. On en déduit que l'action de G'_2 est transitive sur X_1 .
3. Soient $(\langle x \rangle, \langle y \rangle)$ et $(\langle x' \rangle, \langle y' \rangle)$ deux paires de points de PC distants de deux mouvements l'un de l'autre. D'après la proposition 3.5, on a deux triplets nuls (x, y, z) et (x', y', z') . D'après le théorème 3.4, on a un $g \in G'_2$ qui envoie l'un sur l'autre, d'où $gx = x'$ et $gy = y'$. On en déduit que l'action de G'_2 est transitive sur X_2 .
4. Soient $(\langle w \rangle, \langle x \rangle)$ et $(\langle w' \rangle, \langle x' \rangle)$ deux paires de points de PC distants de deux mouvements l'un de l'autre. On a des triplets nuls (x, y, z) et (x', y', z') tels que $\langle w \rangle = \langle y \times z \rangle$ et $\langle w' \rangle = \langle y' \times z' \rangle$. Soit g un élément de G'_2 qui envoie l'un sur l'autre. Alors $gx = x'$ et $gw = g(y \times z) = gy \times gz = y' \times z' = w'$. On en déduit que l'action de G'_2 est transitive sur X_3 .

□

4 Algèbres de composition

Le but de cette partie est la démonstration des identités de Moufang, utilisées dans la partie précédente, qui sont des formes faibles d'associativité dans des algèbres non associatives dites de composition, comme celle des octonions (ou des octonions déployés). Les preuves seront faites pour des algèbres sur des corps quelconques, mais nous n'irons pas plus loin dans cette théorie.

Définition 4.1. On appelle *algèbre de composition* sur un corps k une algèbre unitaire non nécessairement associative A telle qu'il existe une forme quadratique non dégénérée sur A , notée N , vérifiant pour tous $x, y \in A$:

$$N(xy) = N(x)N(y). \quad (80)$$

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la forme bilinéaire (appelée produit intérieur) associée à N par la formule $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(N(x+y) - N(x) - N(y))$, et e l'élément neutre de A .

On peut déduire directement de la définition précédente quelques propriétés basiques des algèbres de composition. Dans toute la suite, on fixe A une algèbre de composition sur un corps k .

Propriétés 4.1. On a les propriétés suivantes, pour tous $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in A$:

$$N(e) = 1 \quad (81)$$

$$\langle x_1y, x_2y \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle N(y) \quad (82)$$

$$\langle xy_1, xy_2 \rangle = N(x) \langle y_1, y_2 \rangle \quad (83)$$

$$\langle x, yx \rangle + \langle x^2, y \rangle = \langle x, y \rangle \langle e, x \rangle. \quad (84)$$

Démonstration. De l'égalité $N(x) = N(ex) = N(e)N(x)$ valable pour tout x dans A on déduit le premier point. De plus, on a :

$$N(x_1y + x_2y) = N(x_1y) + N(x_2y) + \langle x_1y, x_2y \rangle \quad (85)$$

$$= N(x_1)N(y) + N(x_2)N(y) + \langle x_1y, x_2y \rangle, \quad (86)$$

et par ailleurs :

$$N(x_1y + x_2y) = N(x_1 + x_2)N(y) = (N(x_1) + N(x_2) + \langle x_1, x_2 \rangle)N(y). \quad (87)$$

D'où le deuxième point. La preuve du troisième est similaire. Enfin, en appliquant la deuxième propriété avec $y = y_1 + y_2$, on obtient :

$$\langle x_1y_1, x_2y_2 \rangle + \langle x_1y_2, x_2y_1 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle \langle y_1, y_2 \rangle. \quad (88)$$

En prenant $x_1 = y_2 = x$, $x_2 = y$ et $y_1 = e$ on a bien l'identité annoncée. \square

Dans une algèbre de composition, chaque élément satisfait une équation du second degré, minimale si l'élément en question n'est pas un multiple (scalaire) de l'identité : c'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.1. *Pour tout x dans A on a :*

$$x^2 - \langle x, e \rangle x + N(x)e = 0. \quad (89)$$

Et, pour $x, y \in A$:

$$xy + yx - \langle x, e \rangle y - \langle y, e \rangle x + \langle x, y \rangle e = 0. \quad (90)$$

Enfin, si le sous-espace $ke \oplus kx$ est de dimension 2 et non isotrope (i.e la restriction de la forme quadratique N n'y est pas dégénérée), alors c'est une algèbre de composition.

Démonstration. On a pour tout y dans A les égalités suivantes :

$$\langle x^2 - \langle x, e \rangle x + N(x)e, y \rangle = \langle x^2, y \rangle + \langle x, e \rangle \langle x, y \rangle + N(x) \langle e, y \rangle \quad (91)$$

$$= \langle x^2, y \rangle + \langle x, e \rangle \langle x, y \rangle + \langle x, yx \rangle \quad (92)$$

$$= 0. \quad (93)$$

Donc x satisfait bien l'équation annoncée. La deuxième équation de la proposition s'obtient en remplaçant x par $x + y$ dans la première et en soustrayant les équations quadratiques pour x et y (on dit qu'on linéarise l'équation). Le troisième point est clair. \square

Ce résultat donne immédiatement une propriété d'associativité pour les puissances d'un élément d'une algèbre de composition.

Définition 4.2. On définit les puissances d'un élément x d'une algèbre non-associative A par :

$$x^1 = x, x^{i+1} = x^i x. \quad (94)$$

Corollaire 4.1. Pour tout $x \in A$ et $i, j \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$x^{i+j} = x^i x^j \quad (95)$$

Corollaire 4.2. Les automorphismes d'algèbre de A sont des isométries.

Démonstration. Soit x fixé dans A et σ un automorphisme d'algèbres de A . On a d'une part, en appliquant σ à l'équation quadratique vérifiée par x :

$$\sigma(x)^2 - \langle x, e \rangle \sigma(x) + N(x)e = 0, \quad (96)$$

et d'autre part :

$$\sigma(x)^2 - \langle x, e \rangle \sigma(x) + N(\sigma(x))e = 0. \quad (97)$$

Donc $N(\sigma(x)) = N(x)$. \square

Introduisons maintenant un nouvel outil dans les algèbres de composition, la conjugaison.

Définition 4.3. On pose, pour $x \in A$:

$$\bar{x} = \langle x, e \rangle e - x = -s_e(x), \quad (98)$$

appelé le conjugué de x , où s_e est la réflexion sur e^\perp .

Du fait que les automorphismes d'algèbre d'une algèbre de composition sont des isométries, on déduit immédiatement la proposition ci-dessous.

Proposition 4.2. Tout automorphisme d'algèbres d'une algèbre de composition commute avec la conjugaison.

Lemme 4.1. Dans une algèbre de composition, la conjugaison vérifie les propriétés suivantes :

$$x\bar{x} = \bar{x}x = n(x)e \quad (99)$$

$$\overline{xy} = \bar{y}\bar{x} \quad (100)$$

$$\overline{\bar{x}} = x \quad (101)$$

$$\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y} \quad (102)$$

$$N(\bar{x}) = N(x) \quad (103)$$

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \langle x, y \rangle \quad (104)$$

Démonstration. 1. C'est immédiat sachant $x^2 - \langle x, e \rangle x + N(x)e = 0$.

2. On a les égalités :

$$\begin{aligned} \overline{yx} &= (\langle y, e \rangle e - y)(\langle x, e \rangle e - x) \\ &= \langle x, e \rangle \langle y, e \rangle e - \langle x, e \rangle y - \langle y, e \rangle x + yx \\ &= \langle x, e \rangle \langle y, e \rangle e - xy - \langle x, y \rangle e \\ &= \langle xy, e \rangle - xy \\ &= \overline{xy}. \end{aligned}$$

3. Cela vient du fait que s_e est une réflexion, donc involutive.
4. Immédiat.
- 5.

$$N(\bar{x})e = \bar{x}\bar{x} = x\bar{x} = N(x)e \quad (105)$$

6. Cela découle immédiatement des points 4 et 5. □

Enonçons encore quelques égalités utiles.

Lemme 4.2. *Pour $x, y, z \in A$, on a :*

$$\langle xy, z \rangle = \langle y, \bar{x}z \rangle \quad (106)$$

$$\langle xy, z \rangle = \langle x, z\bar{y} \rangle \quad (107)$$

$$\langle xy, \bar{z} \rangle = \langle yz, \bar{x} \rangle. \quad (108)$$

Démonstration. Prouvons la première équation, les autres s'en déduisent :

$$\begin{aligned} \langle y, \bar{x}z \rangle &= \langle y, (\langle x, e \rangle e - x)z \rangle \\ &= \langle x, e \rangle \langle y, z \rangle - \langle y, xz \rangle \\ &= \langle xy, z \rangle + \langle xz, y \rangle - \langle y, xz \rangle \\ &= \langle xy, z \rangle. \end{aligned}$$

□

De ce lemme découlent d'autres formules, plus importantes.

Lemme 4.3. *Pour $x, y, z \in A$, on a :*

$$x(\bar{x}y) = N(x)y \quad (109)$$

$$(\bar{x}\bar{y})y = N(y)x \quad (110)$$

$$x(\bar{y}z) + y(\bar{x}z) = \langle x, y \rangle z \quad (111)$$

$$(\bar{x}\bar{y})z + (\bar{x}\bar{z})y = \langle y, z \rangle x. \quad (112)$$

Démonstration. 1. Pour tout $z \in A$ on a :

$$\begin{aligned} \langle x(\bar{x}y), z \rangle &= \langle \bar{x}y, \bar{y}z \rangle \\ &= N(x) \langle y, z \rangle \\ &= \langle N(x)y, z \rangle. \end{aligned}$$

Donc on a bien $x(\bar{x}y) = N(x)y$.

2. Il suffit de conjuguer la première équation.
3. C'est la linéarisation de la première équation.
4. C'est la linéarisation de la seconde équation. □

Proposition 4.3. *Dans toute algèbre de composition, on a les identités suivantes, dites de Moufang :*

$$(ax)(ya) = a((xy)a) \quad (113)$$

$$a(x(ay)) = (a(xa))y \quad (114)$$

$$x(a(ya)) = ((xa)y)a. \quad (115)$$

Démonstration. Pour prouver la première égalité, prenons le produit intérieur du terme de gauche par un z arbitraire dans A :

$$\begin{aligned}\langle (ax)(ya), z \rangle &= \langle ya, (\bar{x}\bar{a})z \rangle \\ &= \langle y, \bar{x}\bar{a} \rangle \langle a, z \rangle - \langle yz, (\bar{x}\bar{a})a \rangle \\ &= \langle xy, \bar{a} \rangle \langle z, a \rangle - N(a) \langle yz, \bar{x} \rangle.\end{aligned}$$

Le produit intérieur du terme de droite par z donne :

$$\begin{aligned}\langle a((xy)a), z \rangle &= \langle (xy)a, \bar{a}z \rangle \\ &= \langle xy, \bar{a} \rangle \langle a, z \rangle - \langle (xy)z, \bar{a}a \rangle \\ &= \langle xy, \bar{a} \rangle \langle z, a \rangle - N(a) \langle (xy)z, e \rangle \\ &= \langle xy, \bar{a} \rangle \langle z, a \rangle - N(a) \langle xy, \bar{z} \rangle \\ &= \langle xy, \bar{a} \rangle \langle z, a \rangle - N(a) \langle yz, \bar{x} \rangle.\end{aligned}$$

D'où l'égalité voulue. Pour la seconde, on procède de la même manière :

$$\begin{aligned}\langle (a(xa))y, z \rangle &= \langle xa, \bar{a}(z\bar{y}) \rangle \\ &= \langle x, (\bar{a}(z\bar{y}))\bar{a} \rangle \\ &= \langle \bar{x}, a((y\bar{z})a) \rangle \\ &= \langle \bar{x}, (ay)(\bar{z}a) \rangle \\ &= \langle x, (\bar{a}z)(\bar{y}\bar{a}) \rangle \\ &= \langle x(ay), \bar{a}z \rangle \\ &= \langle a(x(ay)), z \rangle.\end{aligned}$$

Un calcul similaire permet de prouver la dernière. □

Dérivons enfin des identités de Moufang trois relations d'associativité très utiles.

Corollaire 4.3. *Dans toute algèbre de composition, on a les égalités :*

$$(xy)x = x(yx) \tag{116}$$

$$x(xy) = x^2y \tag{117}$$

$$(xy)y = xy^2. \tag{118}$$

En particulier, l'associateur $[x, y, z] = (xy)z - x(yz)$ est une application trilinéaire alternée.

Démonstration. La première relation découle immédiatement de la première identité de Moufang. La seconde est une conséquence des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}x(\bar{x}y) &= (x\bar{x})y \\ x(\langle x, e \rangle e - xy) &= (x(\langle x, e \rangle e - x))y \\ x(\langle x, e \rangle y - xy) &= (\langle x, e \rangle x - x^2)y \\ \langle x, e \rangle xy - x(xy) &= \langle x, e \rangle xy - x^2y.\end{aligned}$$

La troisième relation se prouve de la même manière. □

5 Un peu de géométrie différentielle

Dans les parties précédentes, nous avons abordé notre problème d'un point de vue algébrique, en montrant que le groupe de symétries du système du spineur roulant sur un plan projectif pour un rapport de rayons égal à 3 s'identifiait à G'_2 , le groupe d'automorphismes de l'algèbre des octonions déployés. De plus, la description de l'action de G'_2 sur les triplets nuls en permet une description précise.

Nous allons maintenant aborder notre problème du point de vue de la géométrie différentielle. En effet, $\mathbb{R}P^2 \times SU(2)$ est une variété différentielle, de dimension 5. Imposer de déplacer le spineur sans glisser ni tourner sur lui-même revient à restreindre les directions de déplacement dans l'espace tangent : en chaque point on a deux directions de déplacement possibles donc on considèrera un sous-espace de l'espace tangent de dimension 2. On peut formaliser cette idée grâce aux distributions. Dans ce cadre, on pourra montrer à nouveau que tous les points de notre système sont accessibles en ne réalisant que des mouvements autorisés.

5.1 Distributions

Définition 5.1. Une *distribution* sur une variété M est un sous-fibré vectoriel Δ du vecteur tangent TM . Si l'on se donne également un produit scalaire fibre par fibre $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur ce sous-fibré, on parle de *géométrie sous-riemannienne*.

La dimension d des fibres Δ_x (pour $x \in M$) est appelé le *rang* de la distribution.

Un objet comme un champ de vecteurs ou une courbe est *horizontal* s'il est tangent en tout point à Δ . Par exemple, un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow M$ est horizontal si $\forall t \in [\alpha, \beta], \gamma'(t) \in \Delta$.

Remarque 5.1. Pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x et des champs de vecteurs X_1, \dots, X_d définis sur U tels que $(X_1(y), \dots, X_d(y))$ est une base de Δ_y pour tout $y \in U$. On dit alors que $(X_1(y), \dots, X_d(y))$ est une *base locale* de Δ en x .

Définition 5.2. La *longueur* d'une courbe horizontale γ est définie par :

$$l(\gamma) = \int \|\dot{\gamma}\| dt, \quad (119)$$

où $\|\dot{\gamma}\| = \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle}$ est calculé grâce au produit scalaire fibre par fibre sur les espaces horizontaux $\Delta_{\gamma(t)}$ est l'intégrale est prise sur le domaine de définition de la courbe.

On peut alors définir la *distance sous-riemannienne* entre deux points A et $B \in M$:

$$d(A, B) = \inf l(\gamma), \quad (120)$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des courbes horizontales \mathcal{C}^1 par morceaux.

Une question importante qui se pose est la suivante : peut-on toujours relier deux points A et B d'une variété M sur laquelle on dispose d'une distribution Δ par une courbe horizontale ?

La réponse dépend de certaines propriétés de la distribution, en particulier de son comportement par passage au crochet de Lie, comme le montrent le théorème de Frobenius et le théorème de Chow.

Définition 5.3. Une distribution est dite *involutive* si pour tous champs de vecteurs horizontaux X et Y , leur crochet de Lie $[X, Y]$ est également horizontal.

Théorème 5.1 (Théorème de Frobenius). *Soit M une variété munie d'une distribution Δ involutive de rang d . Soit A un point de M .*

Alors l'ensemble des points de M accessibles depuis A par un chemin horizontal est une sous-variété immergée de dimension d , appelée la feuille de A .

En particulier, si Δ est involutive et que le point B n'appartient pas à la feuille de A , alors on ne peut pas relier A et B par un chemin horizontal.

À l'exact opposé du théorème de Frobenius, le théorème de Chow donne une condition suffisante sur les distributions pour que toute paire de points puisse être connectée par un chemin horizontal. C'est le cas qui nous intéresse ici puisque nous avons vu que tous les points sont accessibles à partir d'un autre en au plus trois mouvements (qui correspondent à des chemins horizontaux). Nous allons donc nous attarder un peu sur ce théorème et sa preuve.

5.2 Théorème de Chow

Théorème 5.2 (Théorème de Chow). *Si Δ est une distribution génératrice par crochet sur une variété M connexe, alors deux points de M peuvent toujours être connectés par un chemin horizontal C^1 par morceaux.*

Avant de démontrer le théorème de Chow, nous avons besoin de quelques définitions et notations supplémentaires et d'un autre théorème : le théorème boule-boîte.

Définition 5.4. Une distribution $\Delta \subset TM$ est dite *génératrice par crochet* si tout système de coordonnées local X_i pris avec les crochets de Lie itérés $[X_i, X_j], [X_i, [X_j, X_k]], \dots$, engendrent tout le fibré vectoriel TM .

Voici une autre manière de le voir : on peut considérer la distribution Δ comme un sous-faisceau de TM (vu comme le faisceau de tous les champs de vecteurs sur M), qui associe à tout ouvert $U \subset M$ la collection Δ_U de tous les champs de vecteurs lisses définis sur U . Les crochets de Lie sur les champs de vecteurs de Δ engendrent un drapeau de sous-faisceaux :

$$\Delta \subset \Delta^2 \subset \dots \subset \Delta^k \subset \dots \subset TM \quad (121)$$

où

$$\Delta^2 = \Delta + [\Delta, \Delta] \quad (122)$$

$$\Delta^{k+1} = \Delta^k + [\Delta, \Delta^k] \quad (123)$$

et $[\Delta, \Delta^k]$ est le sous-faisceau engendré par les $[X, Y], X \in \Delta, Y \in \Delta^k$.

Dire que Δ est génératrice par crochets revient à dire qu'il existe un r tel que $\Delta^r = TM$.

Remarque 5.2. En un point $x \in M$, le drapeau des sous-faisceaux donne un drapeau de sous-espaces de $T_x M$:

$$\Delta_x \subset \Delta_x^2 \subset \dots \subset \Delta_x^k \subset \dots \subset T_x M \quad (124)$$

Définition 5.5. Posons $n_i(x) = \dim \Delta_x^i$. Alors la liste des dimensions $(n_1(x), \dots, n_r(x))$ est appelée le *vecteur de croissance* de Δ en x .

Notations 5.1. Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq d}$ une base locale de Δ en x , de flots locaux correspondants $\Phi_i(t) = \exp(tX_i)$. Pour une liste d'indices $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, on note X_I le champ de vecteurs défini récursivement par $X_I = [X_{i_1}, X_J]$ où $J = (i_2, \dots, i_m)$. On notera $|I| = m$ la longueur de l'indice multiple I . De la même manière on définit récursivement le flot Φ_I par $\Phi_I(t) = [\Phi_{i_1}(t), \Phi_J(t)]$, où la notation des crochets pour les flots désigne le commutateur $\Phi_J(t)^{-1} \circ \Phi_{i_1}(t)^{-1} \circ \Phi_J(t) \circ \Phi_{i_1}(t)$.

Proposition 5.1. *Pour un indice multiple I de longueur m , on a au voisinage de 0 :*

$$\Phi_I(t) = Id + t^m X_I + O(t^{m+1}). \quad (125)$$

Démonstration. La démonstration de ce calcul est traité dans [4, page 21, théorème 3.16]. \square

Notations 5.2. Pour une distribution génératrice par crochet, on dispose d'un système de coordonnées local sur TM pris parmi les X_I . Choisissons un tel système de coordonnées et renommons ses coordonnées $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ tel que $\{Y_1 = X_1, \dots, Y_d = X_d\}$ engendre Δ au voisinage de x et $\{Y_1, \dots, Y_{n_k}\}$ engendre Δ^k au voisinage de x pour $2 \leq k \leq r$, où (d, n_2, \dots, n_r) est le vecteur de croissance de la distribution en x .

On renomme de la même manière les flots Φ_I associés aux champs de vecteurs choisis par Φ_i où $i \in \{1, \dots, n\}$ est l'indice correspondant à $X_I = Y_i$.

Pour $i \in \{1, n\}$, on note ω_i la longueur de l'indice multiple I correspondant à $Y_i = X_I$. Ainsi, $\omega_i = m$ si et seulement si $Y_i \in \Delta^m$ et $Y_i \notin \Delta^{m-1}$. On dit que $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ est le *poids* du système de coordonnées (Y_1, \dots, Y_n) .

Définition 5.6. Un système de coordonnées de M est dit *linéairement adapté* à la distribution Δ en x si les différentielles dy_{n_i+1}, \dots, dy_n s'annulent en x sur Δ_x^i , où les $n_i = n_i(x)$ sont les coordonnées du vecteur de croissance de Δ en x .

C'est bien sûr le cas des coordonnées $y_1, \dots, y - n$ pour lesquelles les dy_i sont les applications duales des vecteurs de base Y_i en x .

Définition 5.7. Pour un système de coordonnées linéairement adapté à Δ en x , un vecteur-poids $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ et un réel $\epsilon > 0$, on définit la boîte de taille ϵ et de poids ω comme l'ensemble de points :

$$\text{Box}^\omega(\epsilon) = \{y \in M, |y_i| \leq \epsilon^{\omega_i}, i \in \{1, \dots, n\}\}. \quad (126)$$

Théorème 5.3 (Théorème boule-boîte). *On utilise toutes les notations précédentes : (y_1, \dots, y_n) est un système de coordonnées local linéairement adapté à Δ en x qui vient de la propriété de génération par crochet de Δ , ω est le poids associé. Alors il existe des constantes positives c et $\epsilon_0 > 0$ tels que pour tout $\epsilon < \epsilon_0$:*

$$\text{Box}^\omega(c\epsilon) \subset B(x, \epsilon), \quad (127)$$

où $B(x, \epsilon)$ correspond à la boule sous-riemannienne de centre x et rayon ϵ .

Remarque 5.3. En réalité, on a aussi une constante $C > c$ telle que, quitte à diminuer ϵ_0 , on ait $B(x, \epsilon) \subset \text{Box}^\omega(C\epsilon)$ mais cette inclusion ne nous servira pas pour la démonstration du théorème de Chow.

Démonstration. La preuve repose principalement sur l'utilisation de l'expression (125) : pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\Phi_i(t)(x) = x + t^{\omega_i} Y_i(x) + O(t^{\omega_i+1})$. Néanmoins, pour ω_i pair, elle ne permet pas de se déplacer dans la direction $-Y_i$. On va donc ajuster les flots de la manière suivante : pour les indices i correspondant à un indice multiple I tel que $\omega_i = |I|$ est pair on définit :

$$\Psi_i(t) = \begin{cases} \Phi_I(t) & \text{si } t \geq 0 \\ [\Phi_J(t), \Phi_{i_1}(t)] & \text{si } t < 0, \end{cases} \quad (128)$$

où $I = (i_1, \dots, i_m)$ et $J = (i_2, \dots, i_m)$.

Pour les indices i tels que ω_i est impair on garde $\Psi_i = \Phi_i$.

Définissons également les fonctions :

$$\sigma_i(t) = \begin{cases} t^{\omega_i} & \text{si } \omega_i \text{ est pair et } t \geq 0 \\ -t^{\omega_i} & \text{si } \omega_i \text{ est pair et } t < 0 \\ t^{\omega_i} & \text{si } \omega_i \text{ est impair.} \end{cases} \quad (129)$$

Alors on a $\Psi_i(t) = Id + \sigma_i(t)Y_i + O(t^{\omega_i+1})$.

Définissons l'application $F : \mathbb{R}^n \mapsto M$ par :

$$F(t_1, \dots, t_n) = \Psi_n(t_n) \circ \dots \circ \Psi_1(t_1) = (y_1, \dots, y_n), \quad (130)$$

où les y_i sont les coordonnées dans la base donnée par les Y_i au point x . Elles s'expriment alors de la manière suivante :

$$y_i = \sigma_i(t_i) + o(t_i^{\omega_i}). \quad (131)$$

Pour comprendre et borner les termes d'erreur, commençons par poser $s_i = \sigma_i(t_i)$ pour avoir $y_i = s_i + o(s_i)$.

L'application $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ est un homéomorphisme (non lisse) entre deux voisinages de 0 dans \mathbb{R}^n , d'application réciproque $S = (S_1, \dots, S_n)$. Alors

$$F \circ S(s_1, \dots, s_n) = (s_1, \dots, s_n) + o(|s|). \quad (132)$$

Donc $F \circ S$ est différentiable en 0, de différentielle l'identité. On peut appliquer le théorème d'inversion locale dans un voisinage de 0. Si l'on note $F \circ S(s_1, \dots, s_n) = (y_1, \dots, y_n)$, on a des constantes ϵ_0 et $c = c(\epsilon_0)$ telles que $c|s_i| \leq |y_i(s_1, \dots, s_n)|$ dès que $|s_i| \leq \epsilon_0$. Prenons $\epsilon < \epsilon_0$ et la boîte $\{s, |s_i| \leq \epsilon^{\omega_i}\}$. L'image réciproque de cet ensemble par l'application S est le ϵ -cube $Box(\epsilon) = \{t, |t_i| \leq \epsilon\}$. En appliquant F à cet ϵ -cube on obtient $Box^\omega(c\epsilon) \subset F(Box(\epsilon))$.

Or tout point de $F(Box(\epsilon))$ est le point d'arrivée d'une courbe γ , concaténation de courbes horizontales données par champs de vecteurs intervenant dans les Ψ_i et parcourues pendant les temps t_i . La longueur de γ est donc inférieure à $M\epsilon$ où M est le nombre de concaténations impliquées dans γ (ne dépend que de ω , il faut multiplier par 2 et ajouter 2 pour chaque nouveau passage au crochet). D'où $F(Box(c\epsilon)) \subset B(x, M\epsilon)$ et en remplaçant ϵ_0 par $\frac{\epsilon_0}{M}$ et c par $\frac{c}{M}$ on obtient bien $Box^\omega(c\epsilon) \subset B(x, \epsilon)$. \square

Démonstration. (du théorème de Chow) Le théorème boule-boîte a pour conséquence que l'ensemble des points de M qui peuvent être connectés au point A par des chemins horizontaux est un voisinage de A . Il reste à voir que ce voisinage est en fait l'ensemble de la variété M (connexe).

Soit B un point quelconque de M et soit c un chemin lisse reliant A et B . L'image de c est compacte donc on peut la recouvrir par un nombre fini d'ouverts U_1, \dots, U_m en forme de boîtes sur lesquelles le théorème boule-boîte s'applique. On peut supposer les U_i centrés en des points successifs p_i le long de c , avec $p_1 = A$ et $p_m = B$. Puisque $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$, on peut choisir des points $q_i \in U_i \cap U_{i+1}$ et le long de c . D'après le théorème boule-boîte à U_i et U_{i+1} , on dispose de chemins horizontaux reliant p_i à q_i et q_i à p_{i+1} . En concaténant tous ces chemins, on obtient un chemin horizontal \mathcal{C}^1 par morceaux reliant A à B . \square

5.3 Application au problème de la boule qui roule

Dans le système étudié, on s'intéresse à la variété différentielle, de dimension 5, $PC = \mathbb{R}P^2 \times SU(2)$, qui est le projectivisé du cône C privé de 0, vivant dans les octonions imaginaires purs \mathcal{I} . En un point $\langle x \rangle \in PC$, on veut que les déplacements infinitésimaux restent uniquement selon les lignes de notre géométrie d'incidence, ce qui correspond à rester dans le projectivisé de l'annihilateur Ann_x décrit précédemment. On notera p la projection de C sur PC .

Proposition 5.2. *On peut munir PC d'une structure de variété quotient de dimension 5.*

Démonstration. Le groupe \mathbb{R}^* agit proprement (un compact de $C \setminus \{0\}$ est borné et à distance strictement positive de 0) et librement sur $C \setminus \{0\}$. \square

Nous allons maintenant montrer qu'on peut faire tous les calculs dans C et non pas dans PC , ce qui les simplifiera grandement.

Définition 5.8. Soit X, Y deux champs de vecteurs sur PC , et X', Y' des relèvements de ces champs sur C . Alors $[X', Y']$ est un relèvement de $[X, Y]$:

$$T_x p(X'(x)) = X(p(x)). \quad (133)$$

Proposition 5.3. Soit X, Y deux champs de vecteurs sur PC , et X', Y' des relèvements de ces champs sur C . Alors $[X', Y']$ est un relèvement de $[X, Y]$.

Démonstration. C'est un calcul local, on peut donc se placer dans une trivialisatation locale de p au-dessus d'un ouvert U de PC , on a $C|_U \cong U \times \mathbb{R}$. Les relèvements X' et Y' s'écrivent alors :

$$X'(u, t) = X(u) + f(u, t)\partial_t \quad (134)$$

$$Y'(u, t) = Y(u) + g(u, t)\partial_t. \quad (135)$$

D'où :

$$[X', Y'] = [X, Y] + (X.g)\partial_t - (Y.f)\partial_t + (f\partial_t g)\partial_t - (g\partial_t f)\partial_t. \quad (136)$$

Or si $x \in C|_U$, alors $T_x p(\partial_t) = 0$. Donc $[X', Y']$ est bien un relèvement de $[X, Y]$. \square

Passons maintenant à la description de notre distribution.

Définition 5.9. On considère la distribution D' suivante sur C : à $x = (u, q)$ avec $u \in \text{Im}(\mathcal{H})$ et $q \in \mathcal{H}$, on associe :

$$\text{Ann}_x = \left\{ \left(c, -\frac{ucq}{|u|^2} \right), c \in \text{Im}(\mathcal{H}) \right\}. \quad (137)$$

On note D la projectivisation de cette distribution, qui est la distribution qui modélise notre système.

Remarque 5.4. La distribution D est de rang 2 tandis que D' est de rang 3. En effet, D' contient une direction supplémentaire qui correspond à l'absence de mouvement dans PC : $\forall x \in C, x \in \text{Ann}_x$.

Proposition 5.4. Si D' est génératrice par crochets, alors D l'est également.

Démonstration. C'est clair car p est une submersion et le poussé en avant par p est compatible avec les crochets. \square

Notations 5.3. Soit $c \in \text{Im}(\mathcal{H})$. On notera X_c le champ de vecteurs horizontal défini sur C qui à $x = (u, q) \in C$ (où $u \in \text{Im}(\mathcal{H})$ et $q \in \mathcal{H}$) associe $X_c(x) = \left(c, -\frac{ucq}{|u|^2} \right)$.

On va calculer les crochets de Lie itérés de ces champs de vecteurs pour montrer qu'ils engendrent bien tout l'espace tangent à C et qu'on peut donc appliquer le théorème de Chow à C et à PC .

Proposition 5.5. Soient $c, c' \in \text{Im}(\mathcal{H})$. Soit $x = (u, q) \in C$. Alors :

$$[X_c, X_{c'}](x) = \left(0, \frac{2(\Re(cuc')) + u \cdot (c \times c')}{|u|^4} uq \right). \quad (138)$$

Démonstration. On a $[X_c, X_{c'}](x) = d_x X_c(X_{c'}(x)) - d_x X_{c'}(X_c(x))$.

L'application $f: \text{Im}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{|x|^2}$ a pour différentielle $d_u f(h) = \frac{-2\langle u, h \rangle}{|u|^4}$ (on peut effectuer le calcul dans \mathbb{R}^3 , auquel est isomorphe $\text{Im}(\mathcal{H})$). On en déduit (par linéarité et composition de différentielles) que pour $(h_1, h_2) \in \text{Im}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{H}$:

$$d_x X_c(h_1, h_2) = \left(0, -\frac{h_1 c q}{|u|^2} + \frac{2\langle u, h_1 \rangle u c q}{|u|^4} - \frac{u c h_2}{|u|^2} \right), \quad (139)$$

d'où

$$d_x X_c(X_{c'}(x)) = \left(0, -\frac{c' c q}{|u|^2} + \frac{2\langle u, c' \rangle u c q}{|u|^4} + \frac{u c u c' q}{|u|^4} \right) \quad (140)$$

et

$$[X_c, X_{c'}](x) = \left(0, \frac{(-c' c + c c') q}{|u|^2} + \frac{2u(\langle u, c' \rangle c - \langle u, c \rangle c') q}{|u|^4} + \frac{u(c u c' - c' u c) q}{|u|^4} \right). \quad (141)$$

Or, comme $c, c', u \in \text{Im}(\mathcal{H})$, on a

$$\begin{aligned} c u c' - c' u c &= c u c' + \bar{c}' \bar{u} \bar{c} \\ &= c u c' + \bar{c}' \bar{c} \bar{u} \\ &= c u c' + \overline{c u c'} \\ &= 2\Re(c u c'). \end{aligned}$$

En écrivant

$$\frac{(-c' c + c c') q}{|u|^2} = u \frac{(-\bar{u} c' c + \bar{u} c c') q}{|u|^4} = u \frac{(u c' c - u c c') q}{|u|^4}, \quad (142)$$

il ne reste plus qu'à calculer $u c' c - u c c' + 2(\langle u, c' \rangle c - \langle u, c \rangle c') = u c' c - u c c' + 2((u \cdot c') c - (u \cdot c) c')$.

Or

$$u c' c - u c c' = u(c' c - c c') = u(c' \times c - c \times c') = -2u(c \times c'), \quad (143)$$

et

$$(u \cdot c') c - (u \cdot c) c' = u \times (c \times c') \quad (144)$$

d'après une propriété classique du produit vectoriel dans \mathbb{R}^3 , qui correspond bien à notre produit-croix dans $\text{Im}(\mathcal{H})$. D'où

$$u c' c - u c c' + 2((u \cdot c') c - (u \cdot c) c') = -2u(c \times c') + 2u \times (c \times c') = 2u \cdot (c \times c'). \quad (145)$$

Finalement, on a donc

$$[X_c, X_{c'}](x) = \left(0, \frac{2(\Re(c u c') + u \cdot (c \times c'))}{|u|^4} u q \right) \quad (146)$$

□

Corollaire 5.1. *Le sous-faisceau d'ordre 2 associé à D' est une distribution de rang 4, qui s'exprime en tout $x \in C$:*

$$D_x^2 = \text{Ann}_x^\perp. \quad (147)$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, en un point $x = (u, q) \in C$ donné, tous les crochets de la forme $[X_c, X_{c'}](x)$ sont selon la direction $(0, uq)$, qui n'est pas dans D'_x . On en déduit que D'_x est de dimension 4 (puisque D'_x est de dimension 3). On sait déjà que $D'_x \subset Ann_x^\perp$, car $Ann_x \subset Ann_x^\perp$. Montrons que $(0, uq) \in Ann_x^\perp$.

Un vecteur de Ann_x est de la forme $(c, -\frac{ucq}{|u|^2})$ pour un certain $c \in \text{Im}(\mathcal{H})$. On a :

$$\begin{aligned} (0, uq) \cdot (c, -\frac{ucq}{|u|^2}) &= -\frac{1}{2} \left((0, uq)(c, -\frac{ucq}{|u|^2}) - (c, -\frac{ucq}{|u|^2})(0, uq) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{ucq\bar{u}q}{|u|^2} - \frac{uq\bar{uc}q}{|u|^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{ucq\bar{q}\bar{u}}{|u|^2} - \frac{uq\bar{q}\bar{c}\bar{u}}{|u|^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(|q|^2 \frac{u(c + \bar{c})\bar{u}}{|u|^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $c \in \text{Im}(\mathcal{H})$ donc $c + \bar{c} = 0$.

Donc $(0, uq)$ est orthogonal à $(c, -\frac{ucq}{|u|^2})$ et $(0, uq) \in Ann_x^\perp$. □

Remarque 5.5. Cette nouvelle distribution peut s'interpréter dans notre système de boule qui roule comme les transformations infinitésimales qui consistent à rouler autour d'un grand cercle ou tourner autour d'elle-même sans se déplacer (puisque la coordonnée dans $\text{Im}(\mathcal{H})$, qui correspond au déplacement du point de contact sur la boule fixe, est nulle).

Proposition 5.6. Soient $c, c', c'' \in \text{Im}(\mathcal{H})$. Soit $x = (u, q) \in C$. Alors :

$$[X_c'', [X_c, X_{c'}]](x) = \left(0, \frac{12(\Re(cuc') + u \cdot (c \times c')) - 2(\Re(cc''c') - c'' \cdot (c \times c'))}{|u|^6} uq - 4 \frac{\Re(cuc') + u \cdot (c \times c')}{|u|^4} c''q \right). \quad (148)$$

Démonstration. Rappelons que

$$X_{c''} = \left(c'', -\frac{uc''q}{|u|^2} \right)$$

et

$$[X_c, X_{c'}](x) = \left(0, \frac{2(\Re(cuc') + u \cdot (c \times c'))}{|u|^4} uq \right).$$

On a

$$d_x X_{c''}([X_c, X_{c'}](x)) = \left(0, -2 \frac{(\Re(cuc') + u \cdot (c \times c'))}{|u|^6} uc''uq \right).$$

L'application $f: \text{Im}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{|x|^4}$ a pour différentielle $d_x f(h) = \frac{-4\langle u, h \rangle}{|u|^6}$. On en déduit que pour $(h_1, h_2) \in \text{Im}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{H}$:

$$d_x [X_c, X_{c'}](h_1, h_2) = \left(0, 2 \frac{(\Re(cuc') + u \cdot (c \times c'))}{|u|^4} \left(-4 \frac{\langle u, h_1 \rangle}{|u|^2} uq + h_1 q + u h_2 \right) + 2 \frac{(\Re(ch_1c') + h_1 \cdot (c \times c'))}{|u|^4} uq \right),$$

d'où

$$d_x [X_c, X_{c'}](X_{c''}(x)) = \left(0, 2 \frac{(\Re(cuc') + u \cdot (c \times c'))}{|u|^4} \left(-4 \frac{u \cdot c''}{|u|^2} uq + c''q - \frac{u^2 c''q}{|u|^2} \right) + 2 \frac{(\Re(cc''c') + c'' \cdot (c \times c'))}{|u|^4} uq \right)$$

et

$$[X_c, X_{c'}](x) = \left(0, \frac{(-c'c + cc')q}{|u|^2} + \frac{2u(\langle u, c' \rangle c - \langle u, c \rangle c')q}{|u|^4} + \frac{u(cuc' - c'uc)q}{|u|^4} \right).$$

Or $u^2 = -|u|^2$ car $u \in \text{Im}(\mathcal{H})$ et

$$\begin{aligned} uc''u &= u(-c'' \cdot u + c'' \times u) \\ &= (-c'' \cdot u)u - u \cdot (c'' \times u) + u \times (c'' \times u) \\ &= -2(u \cdot c'')u + |u|^2 c'', \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} [X_c'', [X_c, X_{c'}]](x) &= \left(0, \left(12 \frac{(\Re(cuc') + u \cdot (c \times c'))(u \cdot c'')}{|u|^6} + 2 \frac{(\Re(cc''c') + c'' \cdot (c \times c'))}{|u|^4} \right) uq - 4 \frac{(\Re(cuc') + u \cdot (c \times c'))}{|u|^4} c''q \right) \\ &= \left(0, \frac{12(\Re(cuc') + u \cdot (c \times c')) - 2(\Re(cc''c') - c'' \cdot (c \times c'))}{|u|^6} uq - 4 \frac{\Re(cuc') + u \cdot (c \times c')}{|u|^4} c''q \right). \end{aligned}$$

□

Corollaire 5.2. *La distribution D' est génératrice par crochets et $D'^3 = TC$. Son vecteur de croissance est $(3, 4, 6)$.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, on voit que pour un point $x = (u, q) \in C$, le préfaisceau $[D', D'^2]$ est engendré par $(0, uq)$ et par les vecteurs de la forme $(0, cq)$ pour $c \in \text{Im}(\mathcal{H})$. Donc $[D', D'^2]$ est de dimension 3 et $D'^3 = D'^2 + [D', D'^2]$ est de dimension 6 (car $(0, uq) \in D'^2$), ce qui correspond à la dimension de TM . D'après le corollaire 5.1 et la proposition précédente, le vecteur de croissance est $(3, 4, 6)$. □

Appliquons enfin le théorème de Chow à notre système.

Corollaire 5.3. *Deux points arbitraires de PC sont reliés par un chemin qui suit la distribution.*

Démonstration. Le calcul précédent montre que D' est génératrice par crochets, donc D l'est également, et on peut appliquer le théorème de Chow (PC est évidemment connexe). On sait également que le vecteur de croissance de D est $(2, 3, 5)$. □

6 Bibliographie

1. *G_2 and the rolling ball*, J. C. Baez, J. Huerta, Transactions of the American Mathematical Society
2. *Octonions, Jordan Algebras and Exceptional Groups*, T. A. Springer, F. D. Veldkamp, Springer
3. *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, R. Montgomery, American Mathematical Society
4. *Natural operations in differential geometry*, I. Kolar, P. W. Michor, J. Slovák, Springer
5. Extrait du cours *Algèbre 1*, Olivier Biquard