FIMFA: Examen du lundi 27 mai 2013, Analyse complexe, durée 3h.

Les notes de cours ou les calculatrices ne sont pas autorisées.

Question de cours et développement, 1.

Dans cet exercice, U désignera le disque unité dans la plan complexe.

1) Rappeler la preuve de la partie suivante du lemme de Schwarz: (*"Si F est une application analytique définie sur le disque unité U telle que $F(U) \subset U$ et $F(0) = 0$ alors $|F'(0)| \leq 1$"*).

2) Soit $\alpha \in U$. Donner un exemple d'application conforme ϕ_α de U dans U telle que $\phi_\alpha(0) = \alpha$ et $\phi_\alpha(\alpha) = 0$. Y en-a-t-il d'autres? Que peut-on dire de ϕ_α^{-1}? Que valent $|\phi'_\alpha(0)|$ et $|\phi'_\alpha(\alpha)|$?

3) On se donne une application analytique G sur U telle que $G(U) \subset U$.
a) En appliquant le résultat rappelé dans la question 1 à une application F de U dans U bien choisie (de sorte de $F(0) = 0$), montrer pour tout $\alpha \in U$,

$$|G'(\alpha)| \leq (1 - |G(\alpha)|^2)/(1 - |\alpha|^2)$$

b) On suppose qu'il existe α_0 dans U telle que $|G'(\alpha_0)| = |1 - |G(\alpha_0)|^2|/|1 - |\alpha_0|^2|$. Que peut-on alors dire de G?

Question de cours et développement 2.

1) Rappeler l'énoncé du théorème de Rouché qui permet dans certains cas de comparer le nombre de zéros (comptés avec leur multiplicité) de deux fonctions analytiques f et g dans un domaine D.

2) On admettra le résultat très facile suivant (ce n'est pas de l'analyse complexe!): *Pour tout entier pair $n \geq 0$, il existe deux réels réels x_n et x_{n+1} avec $n\pi < x_n < n\pi + \pi/2 < x_{n+1} < n\pi + \pi$ tels que $x_n \sin x_n = x_{n+1} \sin x_{n+1} = 1$.*
a) Montrer que sur le bord du carré $(-n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2)^2$ (lorsque n est un entier pair assez grand), on a $|z \sin z| > 1$. En déduire le nombre de zéros (comptés avec leur multiplicité) de la fonction $z \sin z - 1$ à l'intérieur de ce carré.
b) En déduire qu'il n'y a pas de nombre complexe z avec $\Im(z) \neq 0$ tel que $z \sin z = 1$.
c) Que peut-on conclure quant au produit $\prod_{n \geq 0}(1 - z^2/x_n^2)$? Que vaut $\sum_{n \geq 0} x_n^{-2}$?

Question de cours et développement, 3.

1) Rappeler:

- (a) Comment on définit la fonction ζ de Riemann sur $\{s \in \mathbb{C} \ : \ \Re(s) > 1\}$.
- (b) Pourquoi ζ ne s'annule pas sur $\{s \in \mathbb{C} \ : \ \Re(s) > 1\}$.
- (c) Pourquoi $\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} dt/(e^t - 1)$ pour tout s réel avec $s > 1$.
- (d) Comment, en représentant cette intégrale sous forme d'intégrale de chemin bien choisie, on en déduit que la fonction ζ admet un prolongement analytique à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

2) Pour tout q avec $\Re(q) > 0$, on définit pour tout s avec $\Re(s) > 1$ la fonction

$$\zeta_q(s) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(q+n)^s}.$$

a) En adaptant les étapes c) et d) ci-dessus, montrer que ζ_q se prolonge en une fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
b) Montrer que $\zeta_{1/2}$ ne s'annule pas sur $\{s \in \mathbb{C} \ : \ \Re(s) > 1\}$.

Question de cours et développement, 4.

1) Rappeler (sans démonstration) quels sont les zéros de la fonction entière $1/\Gamma$, leur multiplicité, ainsi que (sans préciser les constantes) la factorisation canonique de la fonction $1/\Gamma$.

2) Décrire toutes les fonctions entières F qui vérifient simultanément les trois conditions suivantes:

- (a) La fonction F s'annule en chaque point $n+im$ où n et m sont des entiers positifs ou nuls, et ce sont tous des zéros simples.
- (b) La fonction F ne s'annule en aucun autre point de $\mathbb{C}$.
- (c) Il existe $C > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|F(z)| \leq C \exp(C|z|^{5/2})$.

3) Soit F une fonction entière vérifiant les propriétés énoncées dans la question 2. Que peut-on dire de la fonction $F(z)/F(z-i)$ et de ses zéros? Que peut-on dire de la fonction $\Gamma(1-z)F(z)/F(z-i)$?

4) On remplace maintenant dans la question 2, la condition (a) par "*F s'annule en chaque point $n+im$ où n et m sont des entiers tels que $m \geq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, et ce sont tous des zéros simples*". On suppose que F est une fonction vérifiant cette nouvelle condition, ainsi que (b) et (c). Que peut-on alors dire de $F(z)/F(z-i)$?

(Petite) question de cours subsidiaire, 5. (notée au plus sur 1,5 points).

1)
a) Décrire une application conforme du demi-plan supérieur dans le disque unité.
b) Décrire une application conforme du demi-plan supérieur dans le plan privé de la demi-droite $\Delta_0 := \{x \ : \ x \geq 0\}$, puis dans le plan privé de la demi-droite $\Delta_1 := \{x \ : \ x \geq 1\}$.
c) Quel est l'image par $z \mapsto 1/z$ de $\mathbb{C} \setminus [0,1]$?
d) Quelle est l'image par $z \mapsto 1/(2z)$ de $\mathbb{C} \setminus [-1/2, 1/2]$?

2) On définit Ω comme le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.
En utilisant les questions précédentes, décrire
a) Une application conforme de Ω dans $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$.
b) Une application conforme de Ω dans le demi-plan supérieur.
c) Une application conforme de Ω dans le disque unité.

Question subsidiaire, hors barème (suite de la question 2).

Où sont les zéros de la fonction $z \sin z + 1$?