Année 2017–2018 **FIMFA**

Examen de Probabilité (3 heures - sans document)

Questions de cours.
1) Donnez la définition de la loi d'une variable aléatoire.
2) Enoncez la loi du $0-1$ de Kolmogorov.
3) Enoncez le théorème de Paul Lévy.

Exercice 1. 1) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles qui converge en loi vers une constante déterministe a.
a) Montrez que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers a.
b) Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels. Montrez que la suite $(X_n+b_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une constante déterministe si et seulement si la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite finie.
2) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi de densité

$$f(x) = C\frac{|x|}{(1+x^2)^3}$$

où C est une constante. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n = X_1+\cdots+X_n$.
a) Déterminez C.
b) Montrez que, si $\alpha > 1/2$, alors S_n/n^α converge en probabilité vers 0.
c) Que peut–on dire dans le cas $0<\alpha<1/2$?

Problème 1. Rappelons la formule de Stirling: $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$. Soient $p\in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

$$\forall n\geq 1 \qquad P(X_n=-1)=1-p, \quad P(X_n=1)=p\,.$$

Posons alors

$$\forall n\geq 1 \qquad S_n = X_1+\cdots+X_n\,,$$

et définissons

$$U=\liminf_{n\to\infty} S_n\,, \qquad V=\limsup_{n\to\infty} S_n\,.$$

1) Quelle est la loi de S_n? Donnez son espérance et sa variance.
2) a) Donnez un équivalent de $P(S_{2n}=0)$ lorsque n tend vers l'infini.
b) Dans le cas non symétrique où $p\neq 1/2$, en déduire que, presque sûrement, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ visite 0 un nombre fini de fois.
3) Montrez que V est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.
4) a) L'événement $\{\,V\leq 100\,\}$ est–il un événement asymptotique pour $(X_n)_{n\geq 1}$?
b) Montrez que $P(V=+\infty)$ vaut 0 ou 1.
5) a) Soit k un entier. Que vaut $\lim_{n\to\infty} P(S_n=k)$? Montrez que pour tout a positif, $\lim_{n\to\infty} P(|S_n|\leq a)=0$.
b) En déduire: $P(\exists a>0 \quad \forall n\geq 1 \quad |S_n|\leq a) \;=\; 0\,.$
6) Montrez alors que: $\forall b>0 \quad P(-b\leq U\leq V\leq b) \;=\; 0\,.$
7) Conclure finalement que exactement l'une des 3 probabilités suivantes vaut 1:

$$P(U=V=+\infty)\,, \quad P(U=V=-\infty)\,, \quad P(U=-\infty, V=+\infty)\,,$$

et préciser laquelle selon la valeur de p.
8) Dans le cas symétrique $p=1/2$, montrez que, avec probabilité 1, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ visite 0 un nombre infini de fois.

Statistics: the mathematical theory of ignorance.
In N. Rose Mathematical Maxims and Minims, 1988.

Exercice 2. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites indépendantes de variables aléatoires réelles indépendantes, qui suivent toutes la loi normale centrée réduite. Posons

$$\forall n \geq 1 \qquad Z_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}\,.$$

1) Quelle est la loi de Z_n pour $n \geq 1$?
2) Montrez que $(Z_1 + \cdots + Z_n)/n$ converge en probabilité, et presque sûrement.
3) Montrez que $\liminf_{n\to\infty} \sqrt{n} Z_n = 0$ presque sûrement.

Problème 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées telle que $E(\exp(\lambda|X_1|)) < \infty$ pour tout réel λ et $E(X_1) > 0$. Considérons la marche aléatoire associée:

$$\forall n \geq 1 \qquad S_n = X_1 + \cdots + X_n\,.$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur finie. Nous nous intéressons au nombre $N(I)$ de visites de la marche $(S_n)_{n\geq 1}$ dans I, défini par

$$N(I) \;=\; \mathrm{card}\,\{\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : S_n \in I \,\}\,.$$

1) A l'aide de la loi des grands nombres, montrez que $P(\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 1$.
2) Montrez que $N(I)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, puis que $N(I)$ est fini presque sûrement.
3) Dans le cas où la loi de X_1 est la loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$, rappelez (sans calculs) la loi de $N(]0,t])$, pour $t > 0$, ainsi que son espérance et sa variance.
4) Montrez que

$$E(N(I)) \;=\; \sum_{n\geq 1} P(S_n \in I)\,.$$

Nous supposons désormais que X_1 **est à valeurs dans** $\mathbb{Z}$, et que $P(X_1 = 0) > 0$, $P(X_1 = 1) > 0$. Notons f la fonction caractéristique de X_1.
5) Montrez que $|f(u)| < 1$ pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
6) Calculez la fonction caractéristique de S_n et sa limite lorsque n tend vers l'infini. Que peut–on en conclure?
7) Montrez que

$$P(S_n \in I) \;=\; \sum_{k\in I\cap\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-iuk} (f(u))^n \, du\,.$$

8) A l'aide des résultats précédents, montrez que

$$E(N(I)) \;=\; \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} \sum_{k\in I\cap\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-iuk}}{1 - rf(u)} \, du\,.$$

9) Nous considérons pour finir le cas où X_1 est à valeurs dans $\{\,-1, +1\,\}$. Donnez une formule pour le nombre moyen de passages en 0 de la marche aléatoire.

The excitement that a gambler feels when making a bet is equal to the amount he might win times the probability of winning it.
Pascal, Blaise (1623-1662)