Examen, 2012-2013, 3h

Sans document, téléphone, ordinateur ou calculatrice.

Exercice 1. Soit X et Y des espaces métriques, avec X connexe, et $f : Y \to X$ une application continue.

On dit que f est propre si la préimage $f^{-1}(K)$ de tout compact $K \subset X$ est compacte.

On dit que f est un homéomorphisme local si pour tout point $y \in Y$ il existe un voisinage ouvert V de y dans Y et un voisinage ouvert U de $f(y)$ dans X tels que la restriction de f à V est un homéomorphisme sur U.

On suppose que f est un homéomorphisme local propre.

1. Montrer que f est surjective.
2. Si, de plus, f est injective, montrer que c'est un homéomorphisme global.
3. On revient maintenant au cas général et f n'est plus supposée injective. Montrer que Chaque point $x \in X$ admet un nombre fini $n(x)$ de préimages par f.
4. Montrer que la fonction $n(x)$ est semi-continue inférieurement sur X.
5. Montrer que la fonction $n(x)$ est constante.
6. Montrer que f est un revêtement, c'est à dire que pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage U de x tel que $f^{-1}(U)$ est la réunion d'un nombre fini d'ouverts disjoint V_i tels que la restriction de f à chacun de ces ouverts V_i est un homéomorphisme sur U.
7. Supposons maintenant que X n'est pas réduit à un point, fixons un point particulier $y_0 \in Y$, et posons $Y_0 = Y - \{y_0\}$. Montrer que la restriction f_0 de f à Y_0 est un homéomorphisme local. Est-ce un revêtement? f_0 Est-elle propre?

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert, et soit $F : H \to H$ une application C^1. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $\langle F(y) - F(x), y - x\rangle \geq a\|y - x\|^2$ pour tous x, y dans H, et on veut montrer que F est un difféomorphisme de H.

1. Montrer que F est un difféomorphisme local.
2. Dans les cas où H est de dimension finie, conclure en utilisant l'exercice 1. Pourquoi ne s'applique-t-il pas au cas général?
3. Soit $y(t) : \mathbb{R} \to H$ une courbe C^1 telle que $y(0)$ est dans l'image de F. Montrer qu'il existe une courbe $x(t) \in C^1(\mathbb{R}, H)$, telle que $F(x(t)) = y(t)$. Conclure.

Exercice 3. Soit B un espace de Banach, et soit $L \in \mathcal{L}(B, B)$. Étant donne un couple $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times B$ tel que $Lv = \lambda v$ et $v \neq 0$, on considère le quotient $E = B/\mathbb{R}v$ et l'image G de $L - \lambda I$.

1. Montrer que L engendre une application $\tilde{L} \in \mathcal{L}(E, E)$ telle que $\tilde{L} \circ \pi = \pi \circ L$, où $\pi : B \to E$ est la projection.
2. On dit que v est une valeur propre non-dégénérée de L si $\tilde{L} - \lambda I$ est un isomorphisme de E. Montrer que ceci est vrai si et seulement si G est un supplémentaire fermé de $\mathbb{R}v$ tel que l'application $\mathbb{R} \times G \ni (s, g) \longmapsto sv + (L - \lambda I)g \in B$ est un isomorphisme de Banach entre $\mathbb{R} \times G$ et B.
3. Si v est un vecteur propre non dégénérée de valeur propre λ, montrer qu'il existe un voisinage U de L dans $\mathcal{L}(E, E)$ et des fonctions C^1
$$\lambda(l) : U \to \mathbb{R} \quad , \quad v(l) : U \to B$$
telles que $l(v(l)) = \lambda(l)v(l)$. On pourra chercher $v(l)$ sous la forme $v + w(l)$, $w(l) \in G$, en considérant la fonction $F(l, t, w) = l(v + w) - t(v + w) : \mathcal{L} \times \mathbb{R} \times G \to B$.
4. Soit $M(d)$ l'ensemble des matrices carrées $d \times d$, et soit $L \in M(d)$ une matrice diagonalisable à valeurs propres réelles simples. Montrer qu'il existe un voisinage U de L dans $M(d)$ et des applications C^1 $P(l) : U \to M(d)$ à valeurs inversibles et $D(l) : U \to M(d)$, à valeurs diagonales, telles que
$$l = P(l)D(l)P^{-1}(l)$$
pour tout $l \in U$.

Exercice 4. On veut montrer qu'un espace de Banach B est reflexif si et seulement si son dual B' l'est. On considère pour ceci l'injection canonique $J : B \to B''$, son adjoint J^*, et l'injection canonique $J' : B' \to B'''$.

1. Montrer que $J^* \circ J' = Id$.
2. Conclure.