Examen de logique, 26 janvier 2016
Salle Henri Cartan
Vous n'avez pas le droit aux documents

Tous les exercices supposeront l'axiome du choix (AC).
Dans chaque exercice, vous pouvez supposer les résultats des questions précédentes pour prouver une question.

Exercice 1. (1) Soit κ un cardinal limite[1]. On note $2^{<\kappa} = \sup\{2^\lambda \mid \lambda < \kappa \text{ cardinal}\}$. Montrer que $(2^{<\kappa})^{\mathrm{cof}(\kappa)} = 2^\kappa$. (On pourra, pour une fonction $f : \mathrm{cof}(\kappa) \longrightarrow \kappa$ strictement croissante et cofinale, considérer la partition $(f(\alpha) \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} f(\beta))_{\alpha<\mathrm{cof}(\kappa)}$ de κ.)

(2) Soit κ un cardinal infini singulier. On suppose qu'il existe un cardinal μ tel qu'on ait $2^\lambda = \mu$ pour tout cardinal $\lambda < \kappa$ assez grand. Montrer que $2^\kappa = \mu$. (On pourra prendre λ tel que $\mathrm{cof}(\kappa) \leqslant \lambda < \kappa$ et utiliser la question précédente.)

Exercice 2. On dit que deux ensembles $A, B \subseteq \mathbb{N}$ sont *récursivement séparables* s'il existe un ensemble $C \subseteq \mathbb{N}$ récursif tel que $A \subseteq C$ et $B \cap C = \emptyset$.

On notera $\phi \in \mathcal{F}_2^*$ une fonction récursive universelle ; on rappelle qu'il s'agit d'une fonction récursive partielle à deux variables, telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}_1^*$ récursive partielle à une variable, il existe $i \in \mathbb{N}$ telle que $f = \phi(i, \cdot)$.

(1) Soient $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \phi(x,x) = 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \phi(x,x) = 1\}$. Montrer que A et B sont deux ensembles récursivement énumérables disjoints, et qu'ils ne sont pas récursivement séparables.
(2) Soient $P, Q \subseteq \mathbb{N}$ deux ensembles récursivement énumérables. Montrer qu'il existe $P_0 \subseteq P$ et $Q_0 \subseteq Q$ récursivement énumérables tels que $P_0 \cup Q_0 = P \cup Q$ et $P_0 \cap Q_0 = \varnothing$. (On pourra énumérer simultanément les éléments de P et de Q et dire qu'un élément est dans P_0 s'il a été énuméré pour la première fois en tant qu'élément de P.)
(3) En déduire que si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$ disjoints et de complémentaires récursivement énumérables, alors ils sont récursivement séparables.

Exercice 3. Nous considérons l'anneau $\mathbb{C}[t]$, dans le langage $\mathcal{L}_{div} = \{+, -, \times, 0, 1, |\}$, où $+, -, \times, 0, 1$ ont leur signification usuelle, et $|$ est interprété par $x|y$ ssi x divise y. Donc $|$ est définissable dans le langage des anneaux par la formule $x|y := \exists u\, u \times x = y$.

(1) Donnez une $\mathcal{L}_{div}$-formule ψ qui définit $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}[t]$.
(2) Montrez que la $\mathcal{L}_{div}(t)$-formule ci-dessous définit $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}[t]$:
Entiers(x) : $\exists y\, (y \neq 0 \wedge t|y \wedge \forall u\, [(\psi(u-t) \wedge u|y) \to ((u+1)|y \vee u = t + x)])$.
(3) Peut-on trouver une $\mathcal{L}_{div}$-formule (sans paramètres) qui définisse $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}[t]$?

[1] c'est-à-dire, $\kappa = \sup\{\lambda \mid \lambda < \kappa \text{ cardinal}\}$.

(4) Montrez que plus généralement, si T est une théorie dans un langage $\mathcal{L}$ contenant $+$ et $\times$, et s'il existe un modèle M de T, et un uplet $\bar{a}$ de M, une formule $\varphi(x, \bar{y})$ tels que l'ensemble $\{b \in M \mid M \models \varphi(b, \bar{a})\}$ est isomorphe à $(\mathbb{N}, +, \times)$, alors T est indécidable. [Vous pourrez admettre que la théorie de $(\mathbb{N}, +, \times)$ a les mêmes propriétés d'indécidabilité que celle de $(\mathbb{N}, +, \times, 0, S)$]

Exercice 4. Soient $\mathcal{L}$ un langage, et T une $\mathcal{L}$-théorie.

(1) Soit A une $\mathcal{L}$-structure, modèle de $T_\forall$, où $T_\forall$ est l'ensemble des énoncés universels[2] vrais dans tous les modèles de T. Montrez que A se plonge dans un modèle de T.

(2) Soient $A \subseteq B$ des $\mathcal{L}$-structures. Nous supposons que $A \prec_1 B$, c'est-à-dire, que tout $\mathcal{L}(A)$-énoncé existentiel[3] vrai dans B est vrai dans A. Montrez qu'il existe un modèle A_1 de $\mathrm{Th}(A)$, et un plongement $f : B \to A_1$ tel que $f(A) \prec A_1$ ($f(A)$ est une sous-structure élémentaire de A_1).
Nous admettrons que la structure A_1 ci-dessus puisse être trouvée contenant B, et telle que $A \prec A_1$.

(3) Supposons que si $M \subset N$ sont des modèles de T, alors $M \prec_1 N$. Soient $M \subset N$ des modèles de T, et M_1 contenant N donné par (2). Montrez que $N \prec_1 M_1$.

(4) Sous les hypothèses du (3), montrez que en fait $M \prec N$. [Rappel : Si $(M_i)_{i\in\omega}$ est une chaîne de $\mathcal{L}$-structures satisfaisant $M_i \prec M_{i+1}$ pour tout i, alors aussi $M_i \prec \bigcup_{j\in\omega} M_j$].

(5) Déduisez-en que si T satisfait les hypothèses de (3), alors toute formule φ est équivalente, modulo T, à une formule universelle.

Exercice 5. On travaille dans ZFC + AF. On considère une collection transitive S, qui est modèle de ZF, et qui contient tous les ordinaux et tous les ensembles d'ordinaux. Le but de cet exercice est de montrer que S est l'univers tout entier.

On s'autorisera à utiliser, sans démonstration, le fait que les notions suivantes sont définissa - bles par des formules Δ_0 : $x \subseteq y$, "x est un ensemble transitif", $w = (u, v)$, "f est une fonction", "x est le domaine de la fonction f", "y est l'image de la fonction f", et "u appartient au domaine de la fonction f, et $f(u) = v$". (Ces résultats ont en grande partie été montrés en cours et en TD.)

(1) Pourquoi l'axiome de fondation est-il nécessaire pour montrer que S est l'univers tout entier ? (Pour répondre à cette question, on pourra admettre que ZFC + $\neg$AF est consistante).

(2) Montrer qu'il suffit de montrer que tout ensemble transitif est dans S.

(3) Rappeler pourquoi la formule $\mathrm{On}(x)$ est absolue pour S. Montrer que les notions suivantes sont absolues pour S :

   (a) "f est une fonction et x est l'image réciproque de y par f" (on rappelle que *l'image réciproque de* y par f est l'ensemble des $u \in \mathrm{dom}(f)$ tels que $f(u) \in y$) ;

[2] de la forme $\forall \bar{y}\, \psi(\bar{y})$, où $\psi(\bar{y})$ est une $\mathcal{L}$-formule sans quantificateurs, $\bar{y}$ un uplet de variables.
[3] de la forme $\exists \bar{y}\, \psi(\bar{y})$, où $\psi(\bar{y})$ est une $\mathcal{L}(A)$-formule sans quantificateurs.

(b) $\mathrm{On}(\alpha) \wedge \mathrm{On}(\beta) \wedge$ "f est un isomorphisme d'ensembles ordonnés de $\alpha \times \alpha$ (muni de l'ordre lexicographique) sur β" (attention, ici $\alpha \times \alpha$ désigne le produit cartésien ensembliste et pas le produit ordinal).

(4) Soit α un ordinal et $\mathcal{R} \subseteq \alpha \times \alpha$. Montrer que $\mathcal{R} \in S$. (On pourra utiliser la question précédente).

(5) On fixe maintenant un ensemble transitif x et on veut montrer que $x \in S$, ce qui, comme on l'a montré à la question (2), suffit à conclure. Montrer qu'il existe un ordinal α et une relation $\mathcal{R} \subseteq \alpha \times \alpha$ tels que $(x, \in)$ et $(\alpha, \mathcal{R})$ soient isomorphes. Montrer que S satisfait "$\mathcal{R}$ est une relation bien-fondée et extensionnelle sur α". (On rappelle qu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble a est *extensionnelle* si la structure $(a, \mathcal{R})$ satisfait l'axiome d'extensionnalité.)

(6) Montrer qu'il existe y, $\pi \in S$ tels que $S \models$ "y est transitif et π est un isomorphisme de $(\alpha, \mathcal{R})$ sur $(y, \in)$".

(7) Montrer que la notion "π est un isomorphisme de $(\alpha, \mathcal{R})$ sur $(y, \in)$" est absolue pour S.

(8) Montrer que $x = y$ et conclure.