École Normale Supérieure Département de Mathématiques et Applications

Examen d'algèbre 1

Durée : 3h. Aucun document n'est autorisé. On accordera une grande importance à la qualité de la rédaction.

Exercice 1. Classifier, à isomorphisme près, les groupes finis d'ordre 845.

Exercice 2. Soit V un espace vectoriel complexe de dimension 2. Soit $\mathrm{E} = \mathrm{End}\,\mathrm{V}$. On considère la forme quadratique sur E donnée par le déterminant, $\det : \mathrm{E} \to \mathbb{C}$.

1. Montrer que det est non dégénérée. On note son groupe orthogonal $\mathrm{O(E)}$.

2. Montrer que les vecteurs isotropes de E sont exactement les vecteurs de la forme $\alpha \otimes v$, pour $\alpha \in \mathrm{V}^*$ et $v \in \mathrm{V}$. ($\alpha \otimes v$ désigne l'endomorphisme $x \mapsto \alpha(x)v$).

3. Soit P le plan de E engendré par deux vecteurs isotropes $\alpha \otimes v$ et $\beta \otimes w$. Montrer que P est non isotrope si et seulement si (α, β) est une base de V^* et (v, w) est une base de V.

4. On considère l'action d'un couple $(a, b) \in \mathrm{GL(V)} \times \mathrm{GL(V)}$ sur E donnée par $(a, b) \cdot u = a \circ u \circ b^{-1}$, d'où un morphisme $\Phi : \mathrm{GL(V)} \times \mathrm{GL(V)} \to \mathrm{GL(E)}$. Déterminer le sous-groupe $\mathrm{G} = \Phi^{-1}\mathrm{O(E)}$. Montrer qu'on obtient ainsi un morphisme $\Psi = \Phi|_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \to \mathrm{SO(E)}$, et calculer son noyau.

5. Montrer que Ψ est surjectif.

6. En déduire un isomorphisme $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{PSO}(4, \mathbb{C})$.

7. À votre avis, que se passe-t-il si on remplace le corps $\mathbb{C}$ par le corps $\mathbb{R}$? on ne demande aucune démonstration.

Exercice 3. Soit G un groupe fini. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, muni d'une base $(e_x)_{x \in \mathrm{G}}$ indexée par les éléments de G. Pour $g \in \mathrm{G}$ on définit un endomorphisme de V par $r(g)(e_x) = e_{gxg^{-1}}$.
Montrer que r est une représentation de G.
Montrer que la somme des éléments d'une ligne du tableau de caractères de G est un entier naturel (on pourra considérer des produits scalaires avec le caractère de r).

Exercice 4. Soit G un groupe fini. Pour $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathrm{G}$, on définit

$$[x_1, ..., x_n] = x_1 x_2 \cdots x_n x_1^{-1} x_2^{-1} \cdots x_n^{-1}.$$

Pour $g \in \mathrm{G}$ on note $\mathrm{N}_n(g) = \mathrm{card}\{(x_1, ..., x_n) \in \mathrm{G}^n, [x_1, ..., x_n] = g\}$. Le but de l'exercice est d'établir la formule suivante pour $\mathrm{N}_n(g)$, en fonction des caractères des représentations irréductibles complexes de G :

$$\mathrm{N}_n(g) = \sum_{\substack{\chi \text{ caractère} \\ \text{irréductible}}} a_n(\chi)\chi(g), \qquad \text{avec } a_n(\chi) = \begin{cases} \frac{|\mathrm{G}|^{n-1}}{(\deg\chi)^{n-1}}, & n \text{ pair}, \\ \frac{|\mathrm{G}|^{n-1}}{(\deg\chi)^{n-2}}, & n \text{ impair}. \end{cases} \qquad (*)$$

1. Expliquer pourquoi une telle formule doit exister pour certains coefficients $a_n(\chi)$. Montrer la formule

$$a_n(\chi) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{x_1,\dots,x_n \in \mathrm{G}} \chi([x_1, \dots, x_n]).$$

2. Dans la suite, χ désigne un caractère de G, associé à une représentation irréductible ρ. Montrer les formules, pour tout $y \in \mathrm{G}$:

$$\sum_{x\in\mathrm{G}} \chi(x)\rho(x^{-1}) = \frac{|\mathrm{G}|}{\deg\rho} 1_{\mathrm{V}},$$

$$\sum_{x\in\mathrm{G}} \rho(xyx^{-1}) = \frac{|\mathrm{G}|}{\deg\rho} \chi(y) 1_{\mathrm{V}},$$

$$\sum_{x\in\mathrm{G}} \chi(xy)\chi(x^{-1}y^{-1}) = |\mathrm{G}|.$$

3. Montrer la formule (*) pour $n = 2$, puis pour $n = 3$.

4. Montrer l'égalité

$$\sum_{x_1,x_2\in\mathrm{G}} \rho(x_1x_2\cdots x_nx_1^{-1}x_2^{-1}) = (\frac{|\mathrm{G}|}{\deg\rho})^2 \rho(x_3\cdots x_n).$$

Conclure.