Examen

Lorsque la réponse à une question est donnée, on se contentera de poser le calcul et d'expliquer la méthode.

Exercice 1. Soit $I = [0,1]$. Pour une fonction $u(x)$, on considère l'opérateur $Au = -\partial_{xx} u$ associé aux conditions aux limites de Dirichlet $u(0) = u(1) = 0$.

1. Exhiber une base Hilbertienne pour cet opérateur, c'est à dire des fonctions $e_j(x)$, $j \in \mathbb{N}^*$ et des réels positifs λ_j tels que

$$Ae_j(x) = \lambda_j e_j(x), \quad \text{et} \quad (e_j, e_\ell)_{L^2} = \delta_{j\ell} := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = \ell \\ 0 & \text{si} \quad j \neq \ell. \end{cases}$$

Ici, $(f,g)_{L^2} = \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$ est le produit scalaire dans L^2.

Réponse: $e_j(x) = \sqrt{2}\sin(j\pi x)$

Dans la suite, pour une fonction $f(x)$ satisfaisant $f(0) = f(1) = 0$, on notera

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \hat{f}_j e_j(x), \quad \hat{f}_j = (f, e_j)_{L^2},$$

Pour $s \geq 0$, on définit l'opérateur A^s par la formule

$$A^s f := (-\partial_{xx})^s f = \sum_{j \in \mathbb{N}^*} \lambda_j^s \hat{f}_j e_j(x).$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour deux fonctions $\varphi(x)$ et $\gamma(x)$ données, on considère l'équation

$$\partial_{tt} u - \Delta u + \lambda u^3 = 0, \tag{0.1}$$

associée aux conditions au bord

$$\forall\, x \in (0,1), \quad \begin{cases} u(0,x) &= \varphi(x), \\ \partial_t u(t,0) &= \gamma(x), \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall\, t \geq 0, \quad u(t,0) = u(t,1) = 0$$

2. On introduit les variables $p(t,x) = A^{-1/4}\partial_t u(t,x)$ et $q(t,x) = A^{1/4}u(t,x)$. Montrer que ce changement de variable peut-être qualifié de symplectique. Ecrire le système satisfait par les fonctions q et p, et montrer qu'il s'écrit sous forme Hamiltonienne. Trouver son énergie associée.

On définit la grille $\{x_j\}_{j=1}^N$ des points $x_j = j/(N+1)$, $j = 0, \ldots, N$. On pose u_j une approximation de $u(x_j)$, et $u_0 = u_{N+1} = 0$. On considère l'approximation aux différences finies

$$-\partial_{xx} u(x_j) \simeq \frac{2u_j - u_{j-1} - u_{j+1}}{h^2}, \quad h = \frac{1}{N+1}.$$

On note A_h est la matrice discrète associée, de taille N, agissant sur le vecteur $u = (u_j)_{j=1}^N$.

3. Montrer que pour $j = 1, \ldots, N$ les vecteurs $w_j = ((w_j)_k)_{k=1}^N$ avec $(w_j)_k = e_j(x_k)$, $k = 1, \ldots, N$ sont des vecteurs propres de la matrice A_h. Calculer les valeurs propres associées

Réponse: $\Lambda_k = \frac{2}{h^2}(1 - \cos\frac{k\pi}{N+1})$.

4. Montrer que $(w_j)_{j=1}^N$ est une base orthonormale pour le produit scalaire

$$(u, v)_h = h \sum_{j=1}^{N} u_j v_j.$$

On considère maintenant l'équation (0.1) que l'on semi-discrétise discrétise par l'équation

$$\partial_{tt} u_j = -(A_h u)_j - \lambda u_j^3, \quad j = 1, \ldots, N,$$

puis qu'on discrétise complètement par

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = -\tau^2 (A_h u^n)_j - \tau^2 \lambda (u_j^n)^3.$$

5. Montrer que ce schéma peut-être qualifié de schéma de splitting symplectique. Quel algorithme du même type est envisageable?

6. Définir une notion de stabilité (linéaire) pour ce schéma, et donner une condition de stabilité sur h et τ.

Exercice 2. On définit les x_j et h comme dans l'exercice précédent. Soit le sous-espace vectoriel de $H^1(0,1)$ défini par

$$V_h = \{v \in C^1([0,1]), \quad \forall\, 0 \leq j \leq n, \quad v_{|[x_j, x_{j+1}]} \text{ est polynôme d'ordre } 3\}.$$

1. Quelle est la dimension de V_h ?

2. Donner une formule de représentation de toute fonction $v_h \in V_h$ en fonction d'une base que l'on explicitera (on se contentera de faire un dessin correspondant à ces fonctions de base, et l'on ne cherchera pas l'expression du polynôme correspondant).

3. Expliquer comment résoudre l'équation des poutres

$$\begin{cases} u'''' = f \text{ dans } (0,1), \\ u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

par la méthode des éléments finis.

Exercice 3. On considére un domaine Ω polygonal de $\mathbb{R}^2$, et un maillage triangulaire de ce domaine. On note $\mathcal{T}$ ce maillage, $\mathcal{T} = \bigcup_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \mathcal{K}$ (chaque $\mathcal{K}$ est appelée maille ou volume de contrôle). On se donne aussi une famille de points $(x_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}}$, avec $x_{\mathcal{K}} \in \mathring{\mathcal{K}}$. On suppose de plus que ce maillage est orthogonal au sens où si $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ sont deux mailles adjacentes, alors $[x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}}]$ est orthogonal à l'arête commune notée $\mathcal{K}|\mathcal{L}$ de $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$. On notera $\mathrm{d}(\mathcal{K},\mathcal{L})$ la distance entre $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{L}}$.

On veut résoudre

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{0.2}$$

1. Montrer qu'un bilan sur un volume de contrôle $\mathcal{K}$ donne

$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma=\text{arêtes de } \mathcal{K}} \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma},$$

où l'on explicitera $f_{\mathcal{K}}$ et $\overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}$.

2. On notera $u_{\mathcal{K}}$ une approximation de $u(x_{\mathcal{K}})$, et $u^{\mathcal{T}}$ le vecteur $u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}}$. Proposer une approximation $u^{\mathcal{T}} \mapsto F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}})$ qui approche le flux réel $\overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}$ (on distinguera les arêtes intérieures des arêtes extérieures). Ecrire le schéma correspondant pour la résolution numérique de (0.2).

3. Analyser ce schéma (existence/unicité d'une solution, principe du maximum, etc..).