ALGEBRE 2-MAI 09

(documents interdits)

QUELQUES REPRESENTATIONS DE S_3

On donne la présentation de S_3 suivante : S_3 est le groupe engendré par les éléments σ, τ modulo les relations $\sigma^3 = 1$, $\tau^2 = 1$, $\tau\sigma\tau = \sigma^2$. Soit $A : S_3 \to \mathbb{C}^\times$ la signature et $U : S_3 \to \mathbb{C}^\times,\ \sigma, \tau \mapsto 1$ le morphisme unité.

a. Vérifier que l'application

$$S :\ \tau \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix},$$

dans une base fixée $B = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{C}^2$, définit une représentation de S_3. Démontrer que S, U et A sont les représentations irréductibles de S_3 sur $\mathbb{C}$ (à isomorphisme près).

b. Soit R une représentation de S_3. Justifier l'existence de $u, a, s \in \mathbb{N}$ tels que $R = U^{\oplus u} \oplus A^{\oplus a} \oplus S^{\oplus s}$, où l'exposant donne le nombre d'itérations de la somme directe d'une représentation avec elle-même.

c. Soit $1, \omega, \omega^2$ les valeurs propres de $S(\sigma)$. Dans la décomposition de R ci-dessus, exprimer les entiers u, a, s en fonction des valeurs propres de $R(\sigma)$ et de $R(\tau)$.

d. Soit T une application linéaire de $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ de matrice dans la base B

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}.$$

Donner la matrice de $T \otimes T$ dans la base $B^2 = (e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2)$. Si T est diagonalisable, montrer qu'il en va de même pour $T \otimes T$ et donner ses valeurs propres avec multiplicité en fonction de celles de T.

e. Donner les matrices de $(S \otimes S)(\sigma)$, $(S \otimes S)(\tau)$ dans la base B^2.

f. En déduire que $S \otimes S$ se décompose de la façon suivante : $S \otimes S = U \oplus A \oplus S$.

g. Que peut-on dire de $S^{\otimes n} = S \otimes S \otimes \ldots S$ (n fois) où $n \in \mathbb{N}^*$? (on pourra montrer que 1 et -1 sont valeurs propres de multiplicité 2^{n-1} de $S^{\otimes n}(\tau)$ et que ω et ω^2 sont valeurs propres de multiplicité $(2^n \pm 1)/3$ de $S^{\otimes n}(\sigma)$, où ω est une valeur propre de $S(\sigma)$).

ALGEBRES DE CLIFFORD

Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et Q une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur V. Soit $T(V)$ l'algèbre tensorielle sur V et $C(Q) = T(V)/I(Q)$ où $I(Q)$ est l'idéal bilatère engendré par les éléments $v \otimes v - Q(v, v)1$, $v \in V$. On notera le produit dans $C(Q)$ par le symbol $(v, w) \mapsto v \cdot w$. Soit

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k \geqslant 0} \Lambda^k(V)$$

l'algèbre extérieure. Soit

$$\mathfrak{so}(V) = \{A \in \mathrm{End}(V); Q(Av, w) + Q(v, Aw) = 0,\ \forall v, w \in V\}.$$

a. Démontrer que si $(e_1, e_2, \dots e_n)$ est une base de V alors 1 et les tenseurs purs $e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdots \cdot e_{i_k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, forment une base de $C(Q)$.

b. Pour tous $v, w \in V$ on note $v \wedge w$ l'image du tenseur pur $v \otimes w$ dans $\Lambda^2(V)$. Soit $\phi_{v\wedge w} \in \mathrm{End}(V)$ l'application définie par

$$\phi_{v\wedge w}(x) = 2(Q(w,x)v - Q(v,x)w).$$

Démontrer qu'il existe un unique isomorphisme d'espace vectoriel

$$\phi : \Lambda^2(V) \to \mathfrak{so}(V),\ v \wedge w \mapsto \phi_{v\wedge w}.$$

c. Démontrer qu'il existe une unique application linéaire $\psi : \Lambda^2(V) \to C(Q)$ telle que $\psi(v \wedge w) = v \cdot w - Q(v,w)1$.

d. Démontrer que l'application $\psi \circ \phi^{-1} : \mathfrak{so}(V) \to C(Q)$ est un morphisme d'algèbres de Lie où l'algèbre associative $C(Q)$ est munie du commutateur.

e. (Plus difficile) Supposons que $n = 2m$, m un entier positif, et soit $W \subset V$ un sous-espace Lagrangien, i.e., un sous-espace vectoriel de dimension m tel que $Q(v,w) = 0$ pour tous $v, w \in W$. Construire un morphisme d'algèbre $C(Q) \to \mathrm{End}(\Lambda(W))$. En déduire une représentation de $\mathfrak{so}(V)$ sur $\Lambda(W)$ (on pourra se ramener au cas où la matrice de Q est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ensuite écrire $V = W \oplus W'$ où W' est aussi Lagrangien et décrire l'image des éléments de W, W').

NB. Cette représentation est irréductible, c'est la représentation spinorielle. Il y a un résultat analogue si $n = 2m + 1$.