1. Soit V un espace vectoriel hermitien complexe de dimension finie n, de base $(e_1, \ldots, e_n)$. On ne suppose pas que cette base est orthonormale. On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de V, supposé linéaire en la deuxième variable. Pour $1 \leq i \leq n$, soit s_i une transformation unitaire telle que $s_i(e_i) = c_i e_i$ avec $c_i \neq 1$ et de sous-espace de vecteurs invariants l'orthogonal de e_i. On appelle W le sous-groupe de $GL(V)$ engendré par les s_i.

(i) Soit $x \in V$. Exprimer $s_i(x)$ comme combinaison linéaire de x et de e_i.

(ii) Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que tout élément de $\bigwedge^k(V)$ invariant par W est nul. (On pourra procéder par récurrence sur n en considérant le sous-espace V' de base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$, et en décomposant V comme somme directe de V' et de son supplémentaire orthogonal.)

(ii) On suppose que W est fini. Montrer que pour tout élément A de $\mathrm{End}(V)$ on a :

$*\sum_{w \in W} \det(A - w) = \mathrm{card}(W) \cdot \det(A)$

$*\sum_{w \in W} \det(\mathrm{id} - Aw) = \mathrm{card}(W)$

En déduire que pour tout A de $\mathrm{End}(V)$ il existe $w \in W$ tel que Aw n'ait aucun point fixe non nul.

2. (i) Montrer que si un sous-groupe transitif du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ contient un $(n-1)$-cycle et une transposition, alors ce groupe est $\mathfrak{S}_n$.

(ii) Déterminer le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ du polynôme
$P(X) = X^6 - 12X^4 + 15X^3 - 6X^2 + 15X + 12.$

3. Soit $K \subseteq L$ une extension galoisienne finie. On considère L comme un K-espace vectoriel et, pour tout $x \in L$, l'application K-linéaire de L dans L donnée par la multiplication par x. Montrer que le déterminant de cette application linéaire est le produit de tous les conjugués de x (comptés avec leur multiplicité).

En déduire que si K est un corps fini ou bien le corps $\mathbb{C}(t)$, il existe pour tout entier naturel d un polynôme homogène de degré d en d variables sur K dont le seul zéro est le zéro trivial (l'origine).

4. (a) Soient $k \subseteq K$ deux corps algébriquement clos, $P_1, \ldots, P_r$ une famille d'éléments de $k[X_1, \ldots, X_n]$. On suppose que les P_i ont un zéro commun dans K^n. Montrer qu'ils en ont un dans k^n.

(b) Montrer que si $P \in k[X_1, \ldots, X_n]$ est irréductible, il l'est aussi dans $K[X_1, \ldots, X_n]$. (Étant donné un nombre fini d'éléments de $K[X_1, \ldots, X_n]$, on pourra considérer une base du sous-k-espace vectoriel de K engendré par les coefficients de ces polynômes.)

(c) (i) Soient $x_1, \ldots, x_k$ des nombres complexes qui sont algébriques sur $\mathbb{Q}$. Montrer qu'ils sont contenus dans une extension galoisienne finie K de $\mathbb{Q}$, et qu'ils engendrent avec leurs conjugués dans K une $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$-algèbre entière, où N est un entier convenable.

(ii) Soit N un entier et A une $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$-algèbre entière ; montrer que pour tout nombre premier p ne divisant pas N, pA est un idéal strict de A.

(d) Soient $P_1, \ldots, P_r \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Les P_i ont un zéro commun dans $\mathbb{C}^n$.

(ii) Il existe une extension finie K de $\mathbb{Q}$ telle que les P_i ont un zéro commun dans K^n.

(iii) Pour tout nombre premier p assez grand, il existe un corps fini F de caractéristique p tel que les P_i réduits modulo p ont un zéro commun dans F^n.

5. Soit V un espace vectoriel réel euclidien de dimension n, G un sous-groupe fini du groupe orthogonal $O(V)$ engendré par des réflexions. Une fois fixée une base de V, G agit naturellement dans l'algèbre des polynômes $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Soit $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ une famille de polynômes homogènes algébriquement indépendants qui engendrent la sous-algèbre $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]^G$ des invariants. On appelle $J \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ le déterminant jacobien de l'application

$$\phi\colon (X_1, \ldots, X_n) \mapsto (P_1(X_1, \ldots, X_n),\ \ldots\ P_n(X_1, \ldots, X_n))$$

On dit qu'un élément $Q \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ est anti-invariant si :
pour tout $w \in G$, $w(Q) = \det(w) \cdot Q$.

(i) Montrer que J est anti-invariant.

(ii) Pour chaque réflexion $s \in G$, soit H_s l'hyperplan des points fixes de s et l_s une forme linéaire non nulle de noyau H_s. Montrer qu'il existe un réel non nul λ tel que : $J = \lambda \prod_s l_s$, où le produit porte sur l'ensemble des réflexions de G.

(On pourra montrer que J s'annule sur chacun des hyperplans H_s.)

(iii) Montrer qu'un élément $Q \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ est anti-invariant si et seulement si Q est le produit de J par un élément de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]^G$.