Avertissement : Pour obtenir une très bonne note, il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions.

1. Déterminer le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ des polynômes suivants :
(a) $t^8 + 1$;
(b) $32t^5 + 16t^4 - 32t^3 - 12t^2 + 6t + 1 = 32\prod_{i=1}^{5}(t - \cos(\frac{2i\pi}{11}))$;
(c) $t^5 - 70t^4 - 49t^3 - 70t^2 + 98t + 105$.

2. Soient $n \geq 1$ un entier et R un anneau commutatif. Soient L le module libre R^{2n} et A une matrice de format $2n \times 2n$ à coefficients dans R qui est antisymétrique, c'est-à-dire que l'on a $a_{ii} = 0$ et $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tous $1 \leq i, j \leq 2n$. On définit l'élément $\omega(A)$ de $\bigwedge^{2n}(L)$ par

$$\omega(A) = \sum_{i<j} a_{ij}\, e_i \wedge e_j$$

(a) Supposons que $n = 2$. Expliciter un polynôme Pf en les variables X_{ij}, $1 \leq i < j \leq 4$, à coefficients entiers tel qu'on ait

$$\omega(A)^2 = 2\ \mathrm{Pf}(A)\, e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

(b) Montrer qu'il existe un unique polynôme Pf, le *pfaffien*, à coefficients entiers en les variables X_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$, tel qu'on ait

$$\omega(A)^n = n!\ \mathrm{Pf}(A)\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n}$$

quels que soient R et A.

(c) Soit $f\colon R^{2n} \to R^{2n}$ une application R-linéaire de matrice B dans la base canonique. Montrer qu'on a

$$\omega(B\, A\, {}^tB) = \textstyle\bigwedge^2(f)\, (\omega(A))$$

En déduire qu'on a

$$\mathrm{Pf}(B\, A\, {}^tB) = \det(B)\, \mathrm{Pf}(A)$$

quels que soient R, A et B.

(d) Supposons que R est un corps et que A est inversible. Rappelons qu'il existe alors une matrice inversible B telle que $A = B\, J\, {}^tB$, où

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$$

Montrer que l'on a

$$\det(A) = \mathrm{Pf}(A)^2$$

(e) Montrer que l'on a $\det = \mathrm{Pf}^2$, pour une matrice antisymétrique, dans l'anneau des polynômes à coefficients entiers en les variables X_{ij}, $1 \leq i, j \leq 2n$.

3. Soit A un anneau (commutatif ou non commutatif). Un A-module (à gauche) P est *projectif* s'il existe un A-module Q tel que $P \oplus Q$ est libre.

(a) Observer que tout module libre est projectif. Donner un exemple d'anneau A et de module P qui est projectif mais n'est pas libre.

(b) Montrer qu'on a équivalence entre

(i) P est projectif ;

(ii) pour tout morphisme surjectif de A-modules $f\colon M \to P$, il existe un morphisme $g\colon P \to M$ tel que $fg = \mathrm{id}_P$.

(c) Montrer qu'un A-module P est projectif et de type fini ssi il existe un A-module Q tel que $P \oplus Q$ est libre de type fini.

(d) Supposons que A est un anneau commutatif et local, c'est-à-dire qu'il admet un unique idéal maximal. Notons $\mathfrak{m}$ cet idéal et k le corps $A/\mathfrak{m}$. Montrer que tout A-module projectif et de type fini est libre. Indication : on pourra construire une base de P en relevant une base de l'espace vectoriel $P/\mathfrak{m}P$.

4. Soient K un corps et A une K-algèbre de dimension finie (non nécessairement commutative). L'algèbre A est *séparable* si l'application de multiplication $\mu\colon A \otimes_K A \to A$ admet une section σ qui est A-linéaire à gauche et à droite, c'est-à-dire que σ est une application K-linéaire de A dans $A \otimes_K A$ telle que $\mu\sigma = \mathrm{id}_A$ et $a\sigma(b) = \sigma(ab) = \sigma(a)b$ pour tous a et b dans A.

(a) Montrer que A est séparable si et seulement si il existe un élément ρ dans $A \otimes_K A$ tel que $\mu(\rho) = 1$ et $a\rho = \rho a$ pour tous a dans A.

(b) Montrer que $\mathbb{M}_n(K)$ est séparable pour tout entier $n \geq 1$. Indication : essayer $\rho = \sum_{i=1}^n E_{i1} \otimes E_{1i}$.

(c) Montrer qu'un produit de deux algèbres est séparable si et seulement si chacun des facteurs l'est.

(d) Montrer qu'une algèbre semi-simple de dimension finie sur un corps algébriquement clos est séparable.

(e) Supposons que A est séparable et que B est une K-algèbre quelconque. Soit

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} a'_i \otimes a''_i$$

un élément comme dans (a). Soient M et M' des $A \otimes_K B$-modules et $p\colon M \to M'$ un morphisme B-linéaire. Montrer que l'application $\overline{p}\colon M \to M'$ qui envoie un élément m de M sur

$$\sum_{i=1}^{n} a'_i\, p\,(a''_i m)$$

est $A \otimes_K B$-linéaire. Montrer que si M' est un sous-module de M et que la restriction de p à M' est l'identité, alors la restriction de $\overline{p}$ à M' est l'identité.

(f) Montrer que si A est séparable et que B est une K-algèbre semi-simple, alors $A \otimes_K B$ est semi-simple.

(g) Montrer que A est semi-simple ssi A^{op} l'est. Indication : l'espace vectoriel DA des formes linéaires $f\colon A \to K$ devient un A-module pour l'action donnée par $(af)(b) = f(ba)$ et les sous-modules de DA sont en bijection naturelle avec les sous-modules du A^{op}-module libre A^{op}.

(h) Montrer que A est séparable si et seulement si $A \otimes_K B$ est semi-simple pour toute K-algèbre semi-simple B si et seulement si $A \otimes_K A^{\mathrm{op}}$ est semi-simple.