FIMFA 2015–16

Examen Processus Stochastiques

(3 heures, sans document et sans calculatrice)

Cette épreuve comporte 2 questions de cours, et 2 problèmes indépendants.

Questions de cours:
1) Enoncer le théorème des trois séries.
2) Enoncer le théorème de convergence pour les chaînes de Markov.

Problème: *Quelques considérations sur la marche aléatoire dans* $\mathbb{Z}$
Soit p un nombre réel dans $]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de v.a. indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X_n = -1) = 1-p\,, \quad P(X_n = +1) = p\,.$$

On pose

$$S_0 = 0\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \qquad S_n \;=\; X_1 + \cdots + X_n\,.$$

1) Quelle est la loi de S_n pour n fixé? Que valent $E(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$?
2) Donnez un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de $P(S_{2n}=0)$.
3) Dans cette question nous supposons que $p \neq 1/2$.
a) La marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ passe–t–elle une infinité de fois par 0?
b) Donnez un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4) a) Calculez la fonction caractéristique f_{S_n} de S_n.
b) Calculez la limite de f_{S_n} lorsque n tend vers l'infini.
c) Que concluez–vous du résultat de 4)b)?
Dans toute la fin du problème, on étudie le cas symétrique $p = 1/2$.
5) a) Soit $p \geq 1$ un entier impair. Calculez $E(S_n^p)$.
b) Soit $p \geq 1$ un entier. Montrez que $n^p \;\leq\; E(S_n^{2p})$.
6) Rappelez le principe de réflexion.
7) Evaluez la probabilité de l'événement

$$A_n \;=\; \{\, S_2 \neq 0,\, S_4 \neq 0,\, \ldots,\, S_{2n-2} \neq 0,\, S_{2n} = 0\,\}\,.$$

8) En déduire une expression de la probabilité de l'événement

$$\{\, \exists k \in \{1\cdots n\} \quad S_{2k} = 0\,\}\,.$$

9) En déduire la probabilité pour que la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ repasse par 0.
10) En déduire la probabilité pour que la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ repasse par 1, puis par un entier fixé k.
11) Peut–on parler de la quantité suivante:

$$P(\text{la marche } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ visite tous les points de } \mathbb{Z})\,?$$

Que pouvez–vous en dire sans faire de calculs? Et en utilisant la question 10)?
12) Même question avec:

$$P(\text{la marche } (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ visite une infinité de fois tous les points de } \mathbb{Z})\,.$$

The 50-50-90 rule: Anytime you have a 50-50 chance of getting something right, there's a 90% probability you'll get it wrong.
Andy Rooney

Problème: On considère la probabilité de transition Q sur $\mathbb{Z}$ définie par:

- si $x \geq 1$, $Q(x, x-1) = 1/2$, $Q(x, x+1) = Q(x, x+2) = 1/4$
- si $x \geq 1$ et si $y - x \notin \{-1, 1, 2\}$, alors $Q(x, y) = 0$
- $Q(0, 1) = Q(0, -1) = 1/2$
- si $x \leq -1$, alors $Q(x, y) = Q(-x, -y)$ pour $y \in \mathbb{Z}$.

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ de matrice de transition Q. Notons P_x la loi de la chaîne de Markov partant de $X_0 = x$ et E_x l'espérance sous P_x.

1) Montrer que

$$P_x\big(\forall n \geq 1 \quad |X_{n+1} - X_n| \geq 1\big) \;=\; 1\,.$$

2) Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, calculer en fonction de X_n

$$E_x\big(\exp(-\varepsilon |X_{n+1}|) \mid \mathcal{F}_n\big)\,.$$

3) Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$(\exp(\alpha n - \varepsilon |X_n|))_{n \geq 0}$$

soit une P_x-surmartingale pour tout x dans $\mathbb{Z}$.

4) Montrer que $\exp(\alpha n - \varepsilon |X_n|)$ converge p.s. sous la loi P_x.

5) En déduire que pour tout x dans $\mathbb{Z}$

$$P_x\big(\liminf_{n \to \infty} |X_n| = +\infty\big) \;=\; 1\,.$$

6) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{Z}$

$$P_x\big(\big\{\lim_{n \to \infty} X_n = -\infty\big\} \cup \big\{\lim_{n \to \infty} X_n = +\infty\big\}\big) \;=\; 1\,.$$

7) Si f est une fonction de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{Z} \qquad Q(f)(x) = E_x(f(X_1))\,.$$

Déterminer les réels β tels que la fonction $f(x) = \exp(\beta x)$ vérifie

$$\forall x \geq 1 \qquad Q(f)(x) = f(x)\,.$$

8) Soit $w : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$w(x) = 1_{x \geq 0} \exp(-\alpha_0 x) + 1_{x < 0}\big(2 - \exp(\alpha_0 x)\big)\,.$$

Montrer qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que l'on ait $Q(w)(x) = w(x)$ pour tout x dans $\mathbb{Z}$.

9) Calculer $P_x(\lim_{n \to \infty} X_n = -\infty)$.

10) Soient $a \in \mathbb{N}$ et $T = \inf\{n \geq 0 : X_n \leq a\}$. Soit $x > a$. Montrer que $(w(X_{n \wedge T}))_{n \geq 0}$ est une martingale sous P_x.

11) En déduire $P_x(T < \infty)$.

12) On dit qu'une fonction s est Q-excessive si $Q(s) \leq s$. Donner la valeur de

$$\inf\{s(x) : s \text{ fonction } Q-\text{excessive et positive},\ s(a) = 1\}\,.$$

I found maths very easy, but I still enjoyed discovering things.
You have to have the necessary information.
For example, what's the difference between the mean and the median?
Probability fascinated me.
You have to think very carefully about things, which is the way my mind works anyway.
Daniel Tammet