FIMFA 2013–14

Processus Stochastiques

Examen (3 heures)

Sans document et sans calculatrice.

Cette épreuve comporte 2 questions de cours, 3 exercices et 1 problème indépendants.

Questions de cours:

1) Enoncer le théorème des trois séries.

2) Enoncer le théorème de convergence pour les chaînes de Markov.

Exercice 1: Soit p un nombre réel dans $]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de v.a. indépendantes qui suivent toutes la loi suivante:

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad P(X_n=-1)=1-p\,,\quad P(X_n=+1)=p\,.$$

On pose

$$S_0=0\,,\qquad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\qquad S_n\;=\;X_1+\cdots+X_n\,.$$

1) Quelle est la loi de S_n pour n fixé? Que valent $E(S_n)$ et $\mathrm{Var}(S_n)$?

2) Que pouvez–vous dire du processus $(S_n)_{n\geq 0}$?

3) Quelle est, en fonction de p, la probabilité que $(S_n)_{n\geq 0}$ visite 0 une infinité de fois? Donner les grandes lignes d'une preuve du résultat énoncé.

Exercice 2: Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs entières.

1) Supposons que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X.

a) Montrer que $P(X\in\mathbb{Z})=1$.

b) Montrer que $P(X_n=j)$ converge vers $P(X=j)$ pour tout $j\in\mathbb{Z}$.

2) Soit X une variable aléatoire à valeurs entières. Supposons que

$$\forall j\in\mathbb{Z}\qquad \lim_{n\to\infty}P(X_n=j)\;=\;P(X=j)\,.$$

Montrer qu'alors la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

Exercice 3: Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. qui sont centrées et de variance 1. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels telle que $\sum_{n\geq 1}a_n^2$ converge. Etudier la convergence presque sûre et dans L^2 de la série

$$\sum_{n\geq 1}a_nX_1\cdots X_n\,.$$

TSVP

It is not certain that everything is uncertain.
Pascal, Blaise (1623-1662), Pensees.

Problème: Soit p un nombre réel dans $]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite infinie de v.a. indépendantes qui suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X_n = -1) = 1-p\,, \quad P(X_n = +1) = p\,.$$

On pose

$$S_0 = 0\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \qquad S_n \;=\; X_1 + \cdots + X_n\,.$$

1) Montrez que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.
2) La chaîne $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est–elle irréductible?
3) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle une martingale, une sous–martingale, une surmartingale?
On pose

$$\forall x \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad f(x,n) \;=\; P(\exists k \in \{0\cdots n\} \quad S_k = x)\,.$$

4) Que vaut $f(0,n)$ pour $n \in \mathbb{N}$? Et $f(x,0)$ pour $x \in \mathbb{Z}$?
5) Enoncez la propriété de Markov.
6) Montrez que

$$\forall x \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \quad \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \qquad f(x,n) \;=\; (1-p)\,f(x+1,n-1) \,+\, p\,f(x-1,n-1)\,.$$

7) Montrez que la limite

$$f(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} f(x,n)$$

existe pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et interprétez la valeur de $f(x)$.
8) Montrez que $f(x)$ vérifie une équation fonctionnelle que l'on précisera.
9) Montrez que

$$E\big(\max_{0\le k\le n} S_k\big) \;=\; \sum_{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} f(x,n)\,.$$

10) En déduire que

$$E\big(\sup_{n\ge 0} S_n\big) \;=\; \sum_{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} f(x)\,.$$

11) Dans cette question, on considère le cas $p > 1/2$.
  a) Montrez que $P(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 1$.
  b) En déduire la valeur de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{N}$.
  c) En déduire que la chaîne $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est transiente.

12) Dans cette question, on considère le cas $p = 1/2$.
  a) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a $f(x) = f(-x)$.
  b) A l'aide de 8), donnez la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.
  c) Montrez que $P(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = P(\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty) = 1$.
  d) En déduire que la chaîne $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente.

13) Dans cette question, on considère le cas $p < 1/2$.
  a) Montrez que $P(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 0$.
  b) A l'aide de 8), donnez l'expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{N}$.
  c) Montrez que $\sup_{n\ge 0} S_n$ est dans L^1 et calculez son espérance.

14) Le processus $(|S_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est–il une chaîne de Markov?

God not only plays dice.
He also sometimes throws the dice where they cannot be seen.
Stephen Williams Hawking