FIMFA 2014–15

Examen Processus Stochastiques (3 heures)

Cette épreuve, à faire sans document et sans calculatrice, comporte 2 questions de cours et 2 problèmes indépendants.

Questions de cours:
1) Donnez la définition d'une martingale et d'une sous–martingale.
2) Enoncez le théorème limite central vectoriel.

Problème 1. On rappelle la formule de Stirling: $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$. Soient $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

$$\forall n \geq 1 \qquad P(X_n = -1) = 1 - p, \quad P(X_n = 1) = p\,.$$

Posons alors

$$S_0 = 0\,, \qquad \forall n \geq 1 \qquad S_n = X_1 + \cdots + X_n\,, \qquad M_n = \max_{0\leq k\leq n} S_k\,.$$

1) Quelle est la loi de S_n? Donnez son espérance et sa variance.
2) a) Donnez un équivalent de $P(S_{2n} = 0)$ lorsque n tend vers l'infini.
b) Dans le cas non symétrique où $p \neq 1/2$, montrez que, presque sûrement, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ visite 0 un nombre fini de fois.
3) Montrez que M_n est une variable aléatoire.
4) Calculez les lois de M_1, M_2, M_3, puis de $M_1 - S_1$, $M_2 - S_2$, $M_3 - S_3$.
5) Montrez que la limite suivante existe avec probabilité 1:

$$M^* = \lim_{n\to\infty} M_n\,.$$

6) a) L'événement $\{\, M^* \leq 7 \,\}$ est–il un événement asymptotique pour $(X_n)_{n\geq 1}$?
b) Montrez que $P(M^* = +\infty)$ vaut 0 ou 1.
7) Montrez que si $p > 1/2$, alors $P(M^* = +\infty) = 1$.
8) Dans cette question, nous supposons que $p < 1/2$.
a) Montrez que $P(M^* = +\infty) = 0$.
b) Montrez qu'il existe un entier m_0 tel que $P(M^* = m_0) > 0$.
c) Montrez alors que $P(M^* = m_0 + 1) > 0$ et que $P(M^* = \max\{m_0 - 1, 0\}) > 0$.
d) En déduire que, pour tout entier $m \geq 0$, $P(M^* = m) > 0$.
Dans toute la suite, **nous supposons que** $p = 1/2$.
9) a) Montrez que: $\forall a > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P(S_n \leq a) = 1/2$.
b) En déduire: $\forall a > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P(M_n \leq a) \leq 1/2$.
c) Montrez finalement que $P(M^* = +\infty) = 1$.
10) Montrez que

$$\forall n \geq 1 \quad \forall a \geq 0 \qquad P(M_n \geq a) = P(M_n \geq a,\, S_n = a) + 2P(S_n > a)\,.$$

11) En déduire qu'il existe $c > 0$ telle que $E(M_n) \leq c\,E(|S_n|)$ pour $n \geq 1$.
12) Montrez finalement que $\lim_{n\to\infty} E(|S_n|) = +\infty$.

Mathematics consists of proving the most obvious thing in the least obvious way.
George Polyá (1887, 1985)

Problème 2. Dans tout le problème, on fixe un entier $n \geq 1$ et on dispose $n+1$ points numérotés de 0 à n sur un cercle (les points 0 et n sont situés côte à côte). Une particule saute d'un point à un autre de la façon suivante. A chaque étape et quel que soit le point où se trouve la particule, elle a une probabilité 1/2 de se déplacer vers chacun des deux points adjacents.

1) Soit E un espace fini et soit P une matrice de transition sur E, qui est bistochastique, i.e., elle vérifie

$$\forall y \in E \qquad \sum_{x \in E} P(x,y) = 1\,.$$

Montrer que P admet une mesure de probabilité invariante, que l'on précisera.

2) Posons $X_0 = 0$ et pour $k \geq 1$, soit X_k le numéro du point occupé par la particule après le k–ième saut. Montrer que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov.

3) Quelle est la matrice de transition P de la chaîne $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

4) Cette matrice est-elle récurrente?

5) Cette matrice est-elle périodique?

6) Lorsque la chaîne est apériodique, quelle est la limite de $P(X_k = j)$ quand k tend vers l'infini?

7) Soit Q la matrice extraite de P définie par

$$Q = (P_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n-1\}}\,.$$

Montrer que l'inverse de la matrice $I - Q$ (où I est la matrice identité) est la matrice M donnée par

$$\forall i,j \in \{1,\ldots,n-1\} \qquad M_{ij} = \frac{2}{n}\mathrm{Min}(i,j)(n - \mathrm{Max}(i,j))\,.$$

8) Pour tout k différent de 0 ou n, on note A_{kn} la probabilité pour que partant du point k, le point n soit atteint avant le point 0. On définit les vecteurs suivants:

$$A = (A_{kn})_{k\in\{1,\ldots,n-1\}}\,, \qquad R = (P_{kn})_{k\in\{1,\ldots,n-1\}}\,.$$

Montrer que l'on a la relation $(I-Q)A = R$.

9) En déduire la valeur de A_{kn} pour $k \in \{1,\ldots,n-1\}$.

10) Quelle est la probabilité pour qu'à son premier retour en 0, la particule ait fait un tour complet du cercle? (c'est-à-dire qu'elle revienne par le point n si elle est partie par le point 1, ou vice versa).
Indication: Considérer un état fictif, et se ramener à une chaîne à $n+2$ états.

11) Deux joueurs Paul et Pierre effectuent une suite de parties de pile ou face équilibrées. Après chaque partie, le perdant donne un Euro au vainqueur. Le jeu cesse lorsque l'un des joueurs est ruiné. La fortune initiale de Paul est a, celle de Pierre est b. Quelle est la probabilité pour que Paul ruine Pierre?

[On the Gaussian curve, remarked to Poincaré:]
Experimentalists think that it is a mathematical theorem while the mathematicians believe it to be an experimental fact.
Gabriel Lippman (1845-1921)