Examen Algèbre 2

Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir la note maximale.

Exercice 1. Soit $K = \mathbf{Q}(i\sqrt{11})$.

a) Montrer que la normalisation O_K de $\mathbf{Z}$ dans K est égale à $O_K = \mathbf{Z}[\frac{1+i\sqrt{11}}{2}]$.
b) Déterminer O_K^*.
c) Montrer que l'anneau O_K est factoriel.
d) Trouver toutes les solutions $x, y \in \mathbf{Z}$ de l'équation $y^2 + 11 = 4x^5$.

Exercice 2. Soit $K \supset \mathbf{F}_2$ un corps, soient $\alpha_i \in K$ ($i \in \mathbf{Z}$) des éléments de K tels que $\alpha_0 = 0 \neq \alpha_1$, $\forall i \in \mathbf{Z} \quad \alpha_i = \alpha_{i+1}^2 - \alpha_{i+1} = (\varphi - 1)(\alpha_{i+1}) \quad (\varphi(a) = a^2)$.
(a) Montrer : $\alpha_i \in \mathbf{F}_{2^n} \iff (\varphi^n - 1)(\alpha_i) = 0 \quad (n \geq 1)$.
(b) $\forall j \geq 0 \ \ \forall i \in \mathbf{Z} \qquad (\varphi^{2^j} - 1)(\alpha_i) = \alpha_{i-2^j}$.
(c) Pour tout $i \in \mathbf{Z}$, déterminer $n_i = \min\{n \geq 1 \mid \alpha_i \in \mathbf{F}_{2^n}\}$.
(d) On considère les polynômes $P_n(X) \in \mathbf{F}_2[X]$ $(n \geq 1)$ suivants : $P_1(X) = X^2 - X$, $P_{n+1}(X) = P_n(X^2 - X) = P_n(X)^2 - P_n(X)$. Montrer : si $n = 2^m$ est une puissance de 2, alors on a $P_n(X) = \prod_{\beta \in \mathbf{F}_{2^n}} (X - \beta)$.
(e) Que se passe-t-il si l'on remplace partout 2 par un nombre premier p quelconque ?

Exercice 3. Soit L/K une extension galoisienne, où $\mathrm{car}(K) \neq 2$, soit $\alpha \in L^*$. On note $H = \mathrm{Gal}(L/K)$.
(a) Montrer : l'extension $L(\sqrt{\alpha})/K$ est galoisienne $\iff \forall h \in H \quad h(\alpha)/\alpha \in L^{*2}$.
(b) Si c'est le cas, on note $G = \mathrm{Gal}(L(\sqrt{\alpha})/K)$. Montrer : $G \supset \mathrm{Gal}(L(\sqrt{\alpha})/L) = \{1, c\}$, où $c^2 = 1$, $\forall g \in G \quad gc = cg$ et $[c = 1 \iff \alpha \in L^{*2}]$.
(c) Si H est un groupe abélien d'ordre impair $|H| = 2k + 1$, montrer que le groupe G est abélien.
(d) On considère le cas particulier suivant : $K = \mathbf{Q}$, $L = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $\alpha = (a+\sqrt{2})(b+\sqrt{3})$, où $a, b \in \mathbf{Q}^*$. Montrer : si $b^2 - 3 \notin \mathbf{Q}^{*2} \cup 2\mathbf{Q}^{*2}$, alors $N_{L/\mathbf{Q}(\sqrt{2})}(\alpha) \notin \mathbf{Q}(\sqrt{2})^{*2}$ et $\alpha \notin L^{*2}$.
(e) Montrer : si $a^2 - 2, b^2 - 3 \in \mathbf{Q}^{*2} \cup 2\mathbf{Q}^{*2} \cup 3\mathbf{Q}^{*2} \cup 6\mathbf{Q}^{*2}$, alors $\forall h \in H \quad h(\alpha)/\alpha \in L^{*2}$.
(f) Montrer : si $a^2 - 2 \in 2\mathbf{Q}^{*2}$ et $b^2 - 3 \in 6\mathbf{Q}^{*2}$ (exemple : $a = 2$, $b = 3$), alors on a $(gh)(\sqrt{\alpha}) = -(hg)(\sqrt{\alpha})$, où $g, h \in G$, $g(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$, $g(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, $h(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $h(\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$. En particulier, le groupe G n'est pas abélien.

Exercice 4. Soit $a \in \mathbf{Z}$, $3 \nmid a$. Montrer : $a \in \mathbf{Z}_3^{*3} \iff a \equiv \pm 1 \pmod 9$.

Si vous citez un résultat du cours ou des TD, vous devrez donner un énoncé précis.

You can write in English