SÉPARATION D'ÉCHELLES EN MÉCANIQUE DES FLUIDES
EXAMEN DU JEUDI 19 MAI 2016
DURÉE 4 HEURES – DOCUMENTS NON AUTORISÉS

Questions de cours.

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant faiblement dans $L^2([0,1])$. Décrire deux types de comportement de la suite (u_n) qui empêchent la convergence forte.

2) Donner deux exemples de phénomènes physiques impliquant des petites échelles.

3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^2([0,1])$. Donner une condition suffisante de compacité forte.

Exercice 1.

On se propose ici d'étudier le rôle des bords latéraux sur la circulation océanique à grande échelle. On considère pour cela un modèle simplifié de couche mince, c'est-à-dire un modèle bidimensionnel où on néglige les mouvements et les inhomogénéités verticales. Pour simplifier, on suppose que le mouvement est stationnaire, de petite amplitude et qu'on peut aussi négliger les termes de convection.

La vitesse horizontale du fluide $u = u(t, x_1, x_2)$ vérifie alors

$$\begin{cases} \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0, \\ -\beta x_2 u_2 + \partial_1 p - \nu(\partial_{11}^2 + \partial_{22}^2)u_1 = \tau_1\,, \\ \beta x_2 u_1 + \partial_2 p - \nu(\partial_{11}^2 + \partial_{22}^2)u_2 = \tau_2\,, \end{cases}$$

où la première équation traduit l'incompressibilité du fluide, et les équations suivantes traduisent l'équilibre entre la force de Coriolis, la pression, la viscosité et le forçage par le vent τ (supposé donné).

Ce système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2 est complété par une condition de non glissement

$$u_1 = u_2 = 0 \text{ sur le bord du domaine } \partial\Omega\,.$$

On considèrera ici une géométrie simple $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

1) Comme u est à divergence nulle, on peut introduire la fonction de courant ψ telle que $u_1 = \partial_2\psi, \quad u_2 = -\partial_1\psi$. Montrer que ψ satisfait l'équation de Munk

$$\beta\partial_1\psi - \nu\Delta^2\psi = \sigma \tag{1}$$

où on note $\Delta = \partial_{11}^2 + \partial_{22}^2$, et où on donnera l'expression de σ en fonction de τ.

Montrer qu'on peut choisir ψ telle que

$$\psi \text{ et sa dérivée normale s'annulent sur le bord du domaine } \partial\Omega\,. \tag{2}$$

2) En multipliant l'équation par e^{x_1}, montrer l'identité

$$\frac{\beta}{2}\int e^{x_1}\psi^2 dx_1 dx_2 + \nu\int e^{x_1}\psi\Delta^2\psi dx_1 dx_2 = -\int e^{x_1}\sigma\psi dx_1 dx_2\,.$$

En intégrant par parties le second terme, montrer qu'on a

$$\nu\int e^{x_1}\psi\Delta^2\psi dx_1 dx_2 = \nu\int e^{x_1}(\Delta\psi)^2 dx_1 dx_2 + R$$

où le reste peut être majoré par

$$|R| \leq \frac{\nu}{2} \int e^{x_1} (\Delta\psi)^2 dx_1 dx_2 + C\nu \int e^{x_1} \psi^2 dx_1 dx_2 \,.$$

En déduire que si $\nu \leq \beta/(4C)$, on a

$$\frac{\beta}{4} \int e^{x_1} \psi^2 dx_1 dx_2 + \frac{\nu}{2} \int e^{x_1} \psi \Delta^2 \psi dx_1 dx_2 \leq \sqrt{e} \|\sigma\|_{L^2(\Omega)} \left(\int e^{x_1} \psi^2 dx_1 dx_2 \right)^{1/2} ,$$

de sorte que ψ est bornée dans L^2 indépendamment de ν.

3) On s'intéresse à la limite non visqueuse, c'est-à-dire au comportement de la solution ψ_ν de (1)(2) quand ν tend vers 0. La borne précédente montre qu'à extraction près

$$\psi_\nu \rightharpoonup \bar{\psi}$$

faiblement dans $L^2(\Omega)$.

Montrer que $\bar{\psi}$ vérifie l'équation de Sverdrup

$$\beta \partial_1 \bar{\psi} = \sigma \,.$$

Combien de conditions aux limites peut-on imposer pour la solution de cette équation?

4) Comme l'équation de Sverdrup n'est pas compatible avec les conditions de non glissement, on va introduire des correcteurs de couche limite. Montrer que, près des bords $x_1 = 0$ et $x_1 = 1$, l'équation de couche limite s'écrit

$$\beta \partial_1 \psi - \nu \partial_1^4 \psi = 0 \,. \tag{3}$$

En déduire que la taille de la couche limite est d'ordre $(\nu/\beta)^{1/3}$. On introduit alors la variable $Z = (\nu/\beta)^{-1/3} x_1$ pour la couche limite Ouest et $Z = (\nu/\beta)^{-1/3}(1 - x_1)$ pour la couche limite Est.

Ecrire l'équation de couche limite (3) dans les variables adimensionnées et la résoudre explicitement (on pourra introduire les profils exponentiels $\exp(-\lambda Z)$).

Montrer qu'il y a une disymétrie entre l'Est et l'Ouest. En déduire que la condition de bord pour l'équation de Sverdrup doit être imposée à l'Est.

5) Que se passe-t-il près des bords Nord $x_2 = 1$ et Sud $x_2 = 0$? (On pourra essayer de déterminer la taille et l'équation de la couche limite).