FIMFA 2013/2014
Vendredi 17 janvier 2014

ANALYSE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DURÉE 3 HEURES – DOCUMENTS AUTORISÉS

Le but de ce problème est de résoudre et d'étudier les propriétés qualitatives des solutions de l'équation de Schrödinger cubique

$$(NLS) \qquad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \varepsilon |u|^2 u = 0, \\ u_{|t=0} = u_0. \end{cases}$$

La fonction inconnue u dépend de la variable de temps $t \in \mathbb{R}$ et de la variable spatiale $x \in \mathbb{R}^d$, et est *à valeurs complexes.* Le paramètre ε vaut -1 ou 1. Dans le cas $\varepsilon = -1$, on dit que l'équation de Schrödinger est défocalisante et dans le cas $\varepsilon = 1$, on dit qu'elle est focalisante.

Première partie: étude de l'équation de Schrödinger linéaire.

Dans cette partie on s'intéresse à l'équation de Schrödinger linéaire suivante :

$$(LS) \qquad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = f, \\ u_{|t=0} = u_0\,. \end{cases}$$

a) Dans le cas $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$, montrer que (LS) admet une unique solution classique dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$ donnée par la formule

$$u(t) = S_t * u_0 - i \int_0^t \big(S_{t-\tau} * f(\tau) \big)\, d\tau \tag{1}$$

où la convolution agit sur les variables spatiales uniquement, avec

$$S_t(x) := \frac{1}{(4\pi i t)^{d/2}} e^{i\frac{|x|^2}{4t}} \text{ pour } t \neq 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

b) Montrer que si $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ alors la formule (1) définit encore une solution au sens des distributions de (LS), et que cette solution est unique dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$.

c) Dans le cas $u_0 \in H^s$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; H^s)$ pour un $s \in \mathbb{R}$, montrer que la solution appartient à $\mathcal{C}(\mathbb{R}; H^s)$ et que l'on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq \|u_0\|_{H^s} + \int_0^{|t]} \|f\|_{H^s}\, d\tau. \tag{2}$$

Vérifier aussi que si $u_0 \in L^2$ et $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; L^2)$ alors pour tout $t \geq 0$, on a

$$\|u(t)\|^2_{L^2} = \|u_0\|^2_{L^2} + 2\,\mathcal{I}m \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(\tau, x) \bar{u}(\tau, x)\, dx\, d\tau.$$

d) On suppose que $u_0 \in H^1$, $xu_0 \in L^2$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; H^1)$ et $xf \in L^1_{loc}(\mathbb{R}; L^2)$. Quelle est l'identité vérifiée par $\|xu(t)\|^2_{L^2}$?

Deuxième partie : existence locale de solutions régulières pour (NLS)**.**

Dans la suite du problème, on suppose que la dimension spatiale d vaut 2.

Pour $u_0 \in H^s$ avec $s > 1$, et $T > 0$, on définit la fonctionnelle Φ par

$$\Phi(v)(t) = S_t * u_0 + i\varepsilon \int_0^t S_{t-\tau} * (|v|^2 v)(\tau)\, d\tau \quad \text{pour} \quad t \in [-T, T].$$

a) Montrer l'existence d'une constante c ne dépendant que de s et telle que si $T \leq c/\|u_0\|_{H^s}^2$ alors Φ envoie la boule fermée $\overline{B}(0, 2\|u_0\|_{H^s})$ de $\mathcal{C}([-T,T]; H^s)$ dans elle-même, et est k-contractante (avec $k < 1$) sur $\overline{B}(0, 2\|u_0\|_{H^s})$.
En déduire que (NLS) admet une solution $u \in \mathcal{C}([-T,T]; H^s)$ au sens des distributions sur l'intervalle de temps $[-T, T]$.

b) Montrer l'unicité de la solution dans $\mathcal{C}([-T,T]; H^s)$ pour (NLS).

c) Montrer que si u est une solution de (NLS) dans $\mathcal{C}([-T,T]; H^s)$ alors il existe une constante C telle que pour tout $t \in [-T, T]$, on a

$$\|u(t)\|_{H^s} \leq \|u_0\|_{H^s} e^{C \int_0^{|t|} \|u\|_{L^\infty}^2 \, d\tau}.$$

En déduire que le temps d'existence est indépendant de s c'est-à-dire que si $u_0 \in H^s$ et $1 < s' < s$ alors l'intervalle maximal d'existence pour une solution u de (NLS) à régularité H^s est le même que celui correspondant à la régularité $H^{s'}$.

d) On associe à toute solution $u \in \mathcal{C}(]T_1, T_2[; H^1)$ de (NLS) son énergie E et sa masse M définies à l'instant t par

$$E(t) := \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 - \frac{\varepsilon}{4}\|u(t)\|_{L^4}^4 \quad \text{et} \quad M(t) = \|u(t)\|_{L^2}^2.$$

Vérifier que la masse et l'énergie sont constantes pour une solution u dans $\mathcal{C}(]T_1, T_2[; H^s)$ avec $s > 1$.

Troisième partie : existence de solutions globales dans le cas défocalisant.

Dans toute cette partie, on suppose que $d = 2$ et $\varepsilon = -1$.

a) Soit u une solution H^s de (NLS) définie sur un intervalle $]T_1, T_2[$. En utilisant la conservation de l'énergie et de la masse, montrer que $\|u(t)\|_{H^1}$ peut être bornée pour tout $t \in [T_1, T_2]$ par une constante K ne dépendant que de $\|u_0\|_{H^1}$.
En déduire que dans le cas défocalisant, toute solution H^s avec $s > 1$ peut être prolongée en une solution globale.

b) (question difficile) On admet qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction $f \in H^s$ avec $s > 1$

$$\|f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{H^1} \sqrt{\log\left(e + \frac{\|f\|_{H^s}}{\|f\|_{H^1}}\right)}.$$

Montrer que, sous la seule hypothèse $u_0 \in H^1$, l'équation (NLS) admet une solution globale d'énergie finie.

Quatrième partie : étude du cas focalisant.

Dans cette partie, on suppose que $d = 2$ et $\varepsilon = 1$.

On fixe une donnée initiale $u_0 \in H^s$ avec $s > 1$.

a) Montrer que si $\|u_0\|_{L^2}$ est assez petit alors (NLS) admet une solution globale $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; H^s)$.

b) On suppose de plus que $xu_0 \in L^2$. Montrer que tant que la solution u est définie dans H^s alors xu reste dans L^2, et que l'on a

$$\|xu(t)\|_{L^2}^2 = I_0 + P_0 t + 4Et$$

où I_0 et P_0 ne dépendent que de la donnée initiale, et E est l' énergie de la solution définie dans la deuxième partie. Comment choisir u_0 pour que (NLS) n'admette pas de solution globale dans H^s ?