ALGEBRE-06/2010

(documents interdits)

I

Soit A un anneau commutatif unitaire et M un A-module libre de rang fini r. On rappelle que l'algèbre extérieure sur M est une A-algèbre graduée notée $\wedge(M) = \bigoplus_{k\geqslant 0} \wedge^k M$, et que le produit dans $\wedge(M)$ est désigné par le symbol $\wedge$. D'autre part le A-module dual de M est le A-module $M^* = Hom_A(M, A)$, muni de l'action de A définie par

$$(af)(m) = a(f(m)), \quad a \in A, \quad f \in M^*, \quad m \in M.$$

Fixons une base (e_i) de M et la base duale (e_i^*) de M^*. On rappelle qu'une base de $\wedge^k(M)$ est formée des éléments $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

I.1. Soit $\varphi : M^* \to M$ un morphisme de A-modules. On dit que φ est alterné si le morphisme transposé φ^* de φ est égal à $-\varphi$, et si on $x(\varphi(x)) = 0$ pour tout $x \in M^*$. Démontrer que ces deux conditions sont équivalentes si 2 est inversible dans l'anneau A.

I.2. Démontrer qu'il y a une bijection entre les éléments de $\wedge^2 M$ et les morphismes alterné $\varphi : M^* \to M$ donnée par $\alpha \mapsto \varphi_\alpha$, où $\varphi_\alpha(x) = x(\alpha) \in M$ (on expliquera la signification de l'expression $x(\alpha)$).

I.3. Soit φ un morphisme alterné $M^* \to M$. On définit le déterminant $det(\varphi)$ de φ comme étant le déterminant de la matrice de φ relative aux bases (e_i) et (e_i^*). Démontrer que $det(\varphi)$ est uniquement déterminé modulo un carré de A. Démontrer que $det(\varphi) = 0$ si r est impair.

I.4. Supposons que $r = 2s$ est pair. Soit φ un morphisme alterné $M^* \to M$. Soit α l'élément correspondant de $\wedge^2 M$. Posons

$$\alpha^{(s)} = \alpha \wedge \alpha \wedge \cdots \wedge \alpha \quad (s \text{ fois}).$$

On peut choisir la base (e_i) telle que

$$\alpha^{(s)} = u\, e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_r, \quad u \in A.$$

On appelle u le Pfaffian de φ, et on note $u = Pfaff(\varphi)$. Démontrer que

$$det(\varphi) = Pfaff(\varphi)^2$$

(on pourra d'abord considérer le cas où $\alpha = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4 + \cdots + e_{r-1} \wedge e_{2r}$, puis on pourra se ramener à ce cas en considérant une matrice alternée "générale" via un argument de densité).

II

Soit A un anneau commutatif, unitaire qui est un anneau local (i.e., A a un unique idéal maximal) noethérien. Notons I l'idéal maximal de A et $k = A/I$ le corps résiduel. Soient M et N deux A-modules de type fini, N étant en outre supposé libre sur A. Soit $f : M \to N$ un homomorphisme de A-modules tel que l'homomorphisme

$$g = f \otimes \mathrm{id} : M \otimes_A k \to N \otimes_A k$$

soit un isomorphisme.

II.1. Montrer que f est surjectif (utiliser le lemme de Nakayama).

II.2. Montrer qu'il y a une décomposition de A-modules $M = M' \oplus \mathrm{Ker}\,(f)$ telle que f induit un isomorphisme $M' \to N$.

II.3. Démontrer que si T est un A-module de type fini tel que $T \otimes_A k = \{0\}$ alors $T = \{0\}$. En déduire que f est un isomorphisme.

Rédiger ce troisième exercice sur une copie différente.

III

Soient K une extension finie de $\mathbb{Q}$ et $\overline{\mathbb{Q}}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ contenant K. On note A la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans K. On note $\mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbb{Q}})$ l'ensemble des morphismes de corps de K dans $\overline{\mathbb{Q}}$. Pour $x \in K$, on pose $\mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(x) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbb{Q}})} \sigma(x)$.

1. Montrer que A est un anneau intégralement clos.
2. Soit B la forme bilinéaire sur K définie par $B(x, y) = \mathrm{Tr}_{K/\mathbb{Q}}(xy)$. Montrer qu'il existe $(x_i)_{1\leq i\leq r}$ une base de K sur $\mathbb{Q}$ contenue dans A puis que la matrice $(\sigma(x_i))_{1\leq i\leq r, \sigma\in \mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbb{Q}})}$ est inversible. En déduire que $(\mathrm{Tr}(x_i x_j))_{1\leq i,j\leq r}$ est inversible puis que A est contenu dans un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini (on pourra, pour ce dernier point, considérer la base duale de $(x_i)_{1\leq i\leq r}$ pour la forme B).
3. Montrer que A est un anneau noethérien.
4. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier non nul de A. Montrer que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ engendré par un nombre premier p. Montrer que $A/\mathfrak{p}$ est un corps fini de caractéristique p. En déduire la dimension de Krull de A.
5. Soient $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ des idéaux maximaux de A deux à deux distincts. Montrer que $\cap_{i\geq 2}\mathfrak{p}_i$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{p}_1$. En déduire qu'il existe $x \in \mathfrak{p}_1 \cap \bigcap_{i\geq 2}(1 + \mathfrak{p}_i)$.
6. Supposons que K soit une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$. Montrer que A est stable par $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Montrer que $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ agit transitivement sur les idéaux maximaux de A contenant (p). (Indication : on pourra commencer par raisonner par l'absurde en choisissant $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ et en considérant $\prod_{\sigma\in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})} \sigma(x)$ pour un $x \in \mathfrak{p}$ n'appartenant à aucun conjugué de $\mathfrak{q}$ sous $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$)
7. Si $K = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, montrer que $A = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$.