FIMFA 2012/2013
Lundi 3 juin 2013

ANALYSE FONCTIONNELLE
DURÉE 3 HEURES – NOTES DE COURS AUTORISÉES

1. Solution fondamentale de l'opérateur des ondes

On note Q l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, x > |y|\}$ et S la distribution correspondant à sa fonction caractéristique $\mathbf{1}_Q$.

(1) Montrer que $T = \partial_x S - \partial_y S$ est la distribution $\varphi \mapsto 2\int_0^\infty \varphi(y,y)dy$.
(2) Montrer que $\partial_x T + \partial_y T = 2\delta_0$.
(3) En dénduire une solution fondamentale de l'opérateur différentiel $\partial_x^2 - \partial_y^2$.

2. Compacité par compensation

Soient deux suites (u^n), (v^n) de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ telles que

$$u_j^n \rightharpoonup u_j, \qquad v_j^n \rightharpoonup v_j \text{ faiblement dans } L^2(\mathbf{R}^d)\,.$$

(1) Donner un exemple où la propriété suivante est mise en défaut

$$\sum_{j=1}^d u_j^n v_j^n \to \sum_{j=1}^d u_j v_j \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d)\,. \tag{$*$}$$

(2) On suppose que

$$\sum_{j=1}^d \partial_j v_j^n \text{ est bornée dans } L^2(\mathbf{R}^d)\,. \tag{$H1$}$$

Montrer que $\sum_j \partial_j v_j^n \to \sum_j \partial_j v_j$ faiblement dans $L^2(\mathbf{R}^d)$.
(3) On suppose

$$\text{il existe des fonctions } \varphi^n \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d) \text{ telles que } u_j^n = \partial_j \varphi^n\,. \tag{$H2$}$$

Montrer qu'il existe φ telle que $\varphi^n \to \varphi$ dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^d)$ (modulo des constantes additives).
(4) Montrer que $(H1)$ et $(H2)$ entraînent la convergence du produit scalaire $(*)$.
(5) (difficile) Obtenir le même résultat en remplaçant $(H2)$ par

$$(\partial_i u_j^n - \partial_j u_i^n) \text{ bornée dans } L^2(\mathbf{R}^d) \text{ pour tout } i,j \in \{1,\dots,d\}.$$

3. Principe du maximum et résolution d'EDP elliptique avec dérive

I. Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbf{R}^d$ tel que $\partial\Omega$ soit borné. On se donne une fonction positive $a_0 \in L^\infty(\Omega)$, et une matrice $d \times d$ à coefficients $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ tels que

$$\forall p \in \mathbf{R}^d, \quad \sum_{i,j} a_{ij}(x) p_i p_j \geq \beta |p|^2 \text{ avec } \beta > 0\,.$$

(1) Soit $u \in H^1(\Omega)$ et $c \in \mathbf{R}$. Montrer que

$$\nabla u = 0 \text{ presque partout sur } \{u = c\}\,.$$

Montrer que u_+ et $u_- \equiv u_+ - u$ appartiennent à $H^1(\Omega)$ et calculer leurs dérivées L^2.

(2) Soit $u \in H^1(\Omega)$. Ici et dans toute la suite, on note γu la trace de u sur $\partial\Omega$. Montrer que

$$\gamma(u_-) = (\gamma u)_-$$

et en déduire que si $\gamma(u) \geq 0$ alors $u_- \in H^1_0(\Omega)$.

(3) Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ une solution faible de l'équation

$$-\sum_{i,j} \partial_j (a_{ij} \partial_i u) + a_0 u = f \text{ dans } \Omega\,. \tag{$*$}$$

En utilisant u_- comme fonction test dans $(*)$, montrer que si $f \geq 0$ et $\gamma u \geq 0$ alors $u \geq 0$ dans Ω.

II. Dans toute la suite, on considère une solution faible $u \in H^1(\Omega)$ de l'équation avec dérive

$$-\sum_{i,j} \partial_j (a_{ij} \partial_i u) + \sum_i a_i \partial_i u + a_0 u = f \geq 0 \text{ dans } \Omega \tag{$**$}$$

où a_0 et a_{ij} satisfont les mêmes hypothèses que précédemment, et $a_i \in L^\infty(\Omega)$. On veut montrer que le principe du maximum est encore satisfait dans ce cas.

(1) Soit u une solution faible de $(**)$ telle que $\gamma u \geq 0$. Pour $k < 0$, on pose $v_k = (u-k)_-$. Montrer que

$$\|\nabla v_k\|_{L^2} \leq C \|\mathbf{1}_{A_k} v_k\|_{L^2} \text{ avec } A_k = \{\nabla u \neq 0, \quad u < k\}\,.$$

(2) En utilisant l'injection de Sobolev, en déduire qu'il existe $q > 2$ tel que

$$\|v_k\|_{L^q} \leq C \|\mathbf{1}_{A_k} v_k\|_{L^2} \leq C \|v_k\|_{L^q} |A_k|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}}\,.$$

(3) (question difficile) Soit $m = \inf u$. On suppose $m < 0$. Montrer que si $k > m$, on a $|A_k| \geq \alpha > 0$. En déduire une contradiction en faisant tendre $k \to m^+$. (On pourra utiliser la question 1.)

III. On se propose maintenant d'utiliser l'estimation a priori obtenue dans la partie II pour montrer l'existence et l'unicité de la solution faible de l'équation $(**)$ telle que $\gamma u = 0$.

(1) Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que la forme bilinéaire

$$a(u, \varphi) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j} a_{ij} \partial_i u d_j \varphi + \sum_i a_i \partial_i u \varphi + (a_0 + \lambda) u \varphi \right)$$

soit continue et coercive sur $H^1(\Omega)$.

(2) En déduire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$, il existe un unique $u_f \in H^1_0$ solution de l'équation

$$-\sum_{i,j} \partial_j (a_{ij} \partial_i u) + \sum_i a_i \partial_i u + (a_0 + \lambda) u = f \text{ dans } \Omega\,.$$

On notera T l'opérateur qui à f associe u_f.

(3) Montrer que u est solution de $(**)$ avec $\gamma u = 0$ si et seulement si

$$u = T(f + \lambda u)\,.$$

En utilisant le principe du maximum, montrer que $(I - \lambda T)$ est injective.

(4) Conclure.