Corrigé rapide de l'examen d'Algèbre 1

I. 1° On considère le sous-groupe libre $\mathbb{Z}e_1 \subset \mathbb{Z}^n$. Il est de rang 1. D'après le cours, il existe une base $(f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{Z}^n$, un entier d_1, tels que $(d_1 f_1)$ soit une base de $\mathbb{Z}e_1$. Les seuls générateurs de $\mathbb{Z}e_1$ sont $\pm e_1$, donc $d_1 f_1 = \pm e_1$. Quitte à changer f_1 en $-f_1$, on peut donc supposer $d_1 f_1 = e_1$. Puisque f_1 est à coefficients entiers, d_1 divise les coefficients de e_1, donc $d_1 = 1$. Par conséquent $f_1 = e_1$.

2° $\mathbb{Z}^{n-1}$.

II. 1° Pour tout $x \in \mathrm{V}$, on a $\mathrm{B}(x, x) = \sum x_i^2 = \sum x_i = 0$, donc B est alternée.

Notons e_i le i-ème vecteur la base standard de $\mathbb{F}_2^6$, alors $(f_i = e_i + e_{i+1})_{1 \le i \le 5}$ est une base de V. Si $x \in \ker \mathrm{B}$, alors pour tout i on a $\mathrm{B}(x, f_i) = x_i + x_{i+1} = 0$, donc $x_{i+1} = x_i$. Donc le noyau est de dimension 1, engendré par le vecteur $\upsilon = (1, 1, \dots, 1)$.

2° Par conséquent, B induit une forme alternée non dégénérée sur $\mathrm{W} = \mathrm{V}/\mathbb{F}_2\upsilon$.

Soit $\varphi : \mathrm{S}_6 \to \mathrm{GL(V)}$ la représentation de permutation. Si $s \in \mathrm{S}_6$, alors $\varphi(s)$ préserve le vecteur υ, donc induit une transformation $\psi(s)$ de W. En outre, $\varphi(s)$ préserve manifestement la forme B, donc $\psi(s)$ préserve la forme symplectique de W. On obtient ainsi un morphisme de groupes

$$\psi : \mathrm{S}_6 \longrightarrow \mathrm{Sp(W)}.$$

Si $s \in \ker \psi$, alors puisque $\varphi(s)$ préserve υ, on a $\varphi(s) = 1$. Donc $\varphi(s)(e_i + e_j) = e_i + e_j$, qui implique $s\{i, j\} = \{i, j\}$, pour tous $i \neq j$. On déduit $s = 1$.

3° Soit $t_0 = (12)$. Alors $\psi(t_0)(f_2) = e_1 + e_3 = f_1 + f_2$, et $\psi(t_0)(f_i) = f_i$ pour $i \neq 2$. Donc $\psi(t_0)$ est une transvection.

Une transposition générale s'écrit $t = s t_0 s^{-1}$, donc $\psi(t) = \psi(s)\psi(t_0)\psi(s)^{-1}$ est encore une transvection.

4° Pour chaque droite $d \subset \mathrm{W}$, il y a exactement une transvection (automatiquement symplectique) de droite d. Donc il y a 15 transvections dans Sp(W), qui sont exactement les images par ψ des 15 transpositions de S_6. Puisque les transvections symplectiques engendrent Sp(W), on déduit que ψ est surjectif, donc un isomorphisme.

Autre démonstration. Il suffit de vérifier que $|\mathrm{S}_6| = |\mathrm{Sp}_2(\mathbb{F}_2)|$.

III. Les préliminaires sont quasiment une question de cours. Dans le 3°, si $\mathrm{V}^* \simeq \mathrm{V}$ alors il existe un morphisme G-invariant $\mathrm{V}^* \to \mathrm{V}$, donc un vecteur invariant de $\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}$; dans l'autre sens, si on dispose d'un vecteur G-invariant dans $\mathrm{V} \otimes \mathrm{V} \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{V}^*, \mathrm{V})$, par le lemme de Schur, ce morphisme de représentations est nécessairement un isomorphisme, donc $\mathrm{V}^* \simeq \mathrm{V}$. Toujours par le lemme de Schur, cet isomorphisme est unique (à multiplication près par un scalaire), donc $(\mathrm{V} \otimes \mathrm{V})^{\mathrm{G}}$ est de dimension 1.

IIIA. 1° $\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) = \bar{\chi}_V(g)$. Donc V et V^* sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractère, c'est-à-dire $\chi_V = \bar{\chi}_V$.

2° Si $u \in \mathrm{End}(V)$, alors $\Lambda^2 u(e_i \wedge e_j) = u(e_i) \wedge u(e_j) = \sum_{k<l}(u_{ik}u_{jl} - u_{il}u_{jk})e_k \wedge e_l$, donc $\mathrm{Tr}\,\Lambda^2 u = \sum_{i<j} u_{ii}u_{jj} - u_{ij}u_{ji} = \frac{1}{2}\sum_{ij} u_{ii}u_{jj} - u_{ij}u_{ji} = \frac{1}{2}((\mathrm{Tr}\,u)^2 - \mathrm{Tr}(u^2))$.

3° La fonction r_n sur G est centrale, donc se décompose sur la base des caractères irréductibles, avec coefficients

$$v_n(\chi) = \langle r_n, \chi\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_g r_n(g^{-1})\chi(g) = \frac{1}{|G|}\sum_g \sum_{h, h^n = g} \chi(h^n) = \frac{1}{|G|}\sum_h \chi(h^n).$$

On a utilisé implicitement la propriété $r_n(g) = r_n(g^{-1})$.

4° En particulier, $v_2(\chi_V) = \frac{1}{|G|}\sum \chi_V(g^2) = \frac{1}{|G|}\sum \chi_V(g)^2 - 2\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \langle \bar{\chi}_V, \chi_V\rangle - 2\langle 1, \chi_{\Lambda^2 V}\rangle$. Si χ_V n'est pas réel, alors V et V^* étant deux représentations irréductibles distinctes, leurs caractères χ_V et $\bar{\chi}_V$ sont orthogonaux ; en outre $V \otimes V$ ne contient pas la représentation triviale, et donc $\Lambda^2 V \subset V \otimes V$ non plus, donc leurs caractères 1 et $\chi_{\Lambda^2 V}$ sont orthogonaux. Donc $v_2(\chi_V) = 0$.

5° En revanche, si χ_V est réel, alors $\langle \chi_V, \chi_V\rangle = 1$, et $V \otimes V$ contient exactement une fois la représentation triviale. Si elle se trouve dans $\Lambda^2 V$, alors $\langle 1, \chi_{\Lambda^2 V}\rangle = 1$, sinon $\langle 1, \chi_{\Lambda^2 V}\rangle = 0$. D'où $v_2(\chi_V) = -1$ ou 1 suivant que la représentation triviale se trouve dans $\Lambda^2 V$ ou dans $S^2 V$.

IIIB. 1° Puisque χ_V est réel, $V^* \simeq V$ donc $V^* \otimes V^* \simeq V \otimes V$. Soit $B \in (V^* \otimes V^*)^G = \mathrm{Hom}(V, V^*)^G$. Un élément de $V^* \otimes V^*$ est une forme bilinéaire. Comme élément de $\mathrm{Hom}(V, V^*)$, B est inversible, donc la forme bilinéaire est non dégénérée. Elle est unique à multiplication près par un scalaire, puisque $V^* \otimes V^*$ ne contient qu'une fois la représentation triviale. Un élément de $S^2 V^*$ correspond à une forme symétrique, un élément de $\Lambda^2 V^*$ à une forme alternée.

2° Si $V = V_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$, alors $V_{\mathbb{R}}$ admet un produit scalaire réel invariant sous G. Sur la complexification V, le produit scalaire se complexifie en une forme bilinéaire complexe symétrique, G-invariante, donnant donc un élément G-invariant $B \in S^2 V^* = S^2 V$. Donc $v_2(\chi_V) = 1$.

3° L'existence est du cours. L'unicité : si on a h_1 et h_2 produits scalaires hermitiens G-invariants, alors $h_2(x, y) = h_1(x, u(y))$ pour un endomorphisme G-invariant de V, donc u est une homothétie.

4-5° Si $v_2(\chi) = 1$ alors $B \in S^2 V^*$ donc est une forme bilinéaire symétrique. Il est clair que u est semi-linéaire, et donc u^2 est linéaire ; comme il est G-invariant, c'est une homothétie. Quitte à multiplier u par un scalaire, on peut supposer $u^2 = 1$. Alors, puisque u est G-invariant, ses espaces propres $V_{\mathbb{R}} = \{x \in V, u(x) = x\}$ et $iV_{\mathbb{R}} = \{x \in V, u(x) = -x\}$ sont préservés par l'action de G. En particulier, $V_{\mathbb{R}}$ est une représentation réelle de G, et $V = V_{\mathbb{R}} \oplus iV_{\mathbb{R}}$.