Examen Algèbre 2

Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir la note maximale.

Exercice 1. Montrer qu'il existe un nombre infini d'extensions galoisiennes $L/\mathbf{Q}$ ($L \subset \mathbf{C}$) dont le groupe de Galois est isomorphe à $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ (resp. au groupe diédral à 8 éléments D_8).

Exercice 2. On considère les trois corps suivants : $L_a = \mathbf{Q}(\sqrt{2+\sqrt{a}})$ pour $a \in \{2,3,5\}$.

(a) Déterminer si $L_a/\mathbf{Q}$ est une extension galoisienne.

(b) Si c'est le cas, déterminer le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L_a/\mathbf{Q})$.

(c) Le corps L_a sécrit-il sous la forme $L_a = \mathbf{Q}(\sqrt{b_1}, \ldots, \sqrt{b_n})$ ($b_j \in \mathbf{Q}^*$)? Si c'est le cas, trouver les valeurs de b_j.

Exercice 3. Soit $n > 2$ un entier tel que $n \not\equiv 2 \pmod 4$; on note $\zeta_n = e^{2\pi i/n}$.

(a) Soit $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_n)/\mathbf{Q})$. Déterminer la structure du groupe $G/2G$.

(b) Déterminer le nombre de sous-corps $F \subset \mathbf{Q}(\zeta_n)$ tels que $[F : \mathbf{Q}] = 2$.

(c) Si $n = p^r$ est une puissance d'un nombre premier, expliciter les corps F. [*On pourra calculer le discriminant du polynôme minimal de ζ_p.*]

(d) Expliciter les corps F en général.

Exercice 4. Soient X, Y, Z des variables.

(a) Montrer que l'anneau $A = \mathbf{R}[Y,Z]/(Y^2 + Z^2)$ est intègre.

(b) Montrer qu'il existe un morphisme de $\mathbf{R}$-algèbres $\alpha : \mathbf{R}(X) \longrightarrow \mathrm{Frac}(A)$ tel que $\alpha(X) = \overline{Y}$ (l'image de Y dans A) et un morphisme de $\mathbf{R}$-algèbres $\beta : \mathrm{Frac}(A) \longrightarrow \mathbf{C}(X)$ tel que $\beta(\alpha(X)) = X$.

(c) Déterminer le sous-anneau $B = \beta(A) \subset \mathbf{C}(X)$ et sa fermeture intégrale $\widetilde{B}$ (= sa normalisation) dans $\mathbf{C}(X)$.

Exercice 5. Soient $\mathbf{Q} \subset K \subset L$ des extensions de corps de degré fini. On note $O_L = \{\alpha \in L \mid \alpha \text{ entier sur } \mathbf{Z}\}$ (et idem pour O_K).

(a) Montrer que l'on a, pour tout $\beta \in O_L$, $\mathrm{Tr}_{L/K}(\beta) \in O_K$ et $N_{L/K}(\beta) \in O_K$.

(b) Si $L = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, où $d \in \mathbf{Z}$ est en entier $d \neq 0, 1$ sans facteur carré, expliciter O_L.

Si vous citez un résultat du cours ou des TD, vous devrez donner un énoncé précis.

You can write in English