Examen de Géométrie Différentielle

Durée 3h. Pas de calculatrice, document, téléphone, etc. On peut admettre une question pour traiter les suivantes.

I (Une inégalité isopérimétrique)

Soit $vol = dx \wedge dy \wedge dz$ la forme volume de $\mathbb{R}^3$ à coefficients constants. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface compacte ; l'intérieur de S est un domaine $N \subset \mathbb{R}^3$ dont le bord est $\partial N = S$. Pour $p \in S$ on note $\nu(p)$ la normale sortante en p à S. Soit la 2-forme d'aire $\sigma \in \Omega^2(S)$ définie par $\sigma(X, Y) = vol(\nu(p), X, Y)$ si $X, Y \in T_pS$. L'aire de S est $\int_S \sigma$.

1. Soit $\alpha = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$. Calculer $d\alpha$.
2. Montrer que si (V_1, V_2) est une base orthonormée directe de T_pS, alors

$$\alpha(V_1, V_2) \leqslant \|p\|\sigma(V_1, V_2).$$

3. En déduire que si N est contenu dans la boule de centre 0 et de rayon R, alors

$$\text{volume}(N) \leqslant \frac{R}{3}\text{aire}(\partial N).$$

II

On considère le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, et on notera (x, y) les coordonnées sur $\mathbb{R}^2$.

1. Démontrer qu'une base de la cohomologie du tore $\mathbb{T}^2$ est donnée par les classes de cohomologie des formes 1, dx, dy, $dx \wedge dy$.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Soient les transformations $f_n, g_n, h_n : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ définies par $f_n(x, y) = (nx, y)$, $g_n(x, y) = (nx, -y)$ et $h_n(x, y) = (-ny, x)$. On veut savoir lesquelles de ces applications sont homotopes.
Calculer les degrés de f_n, g_n et h_n. Que peut-on en déduire ?
3. Calculer les endomorphismes de $H^1(\mathbb{T}^2)$ induits par f_n, g_n et h_n.
4. Quelles sont les applications homotopes parmi les f_n, g_n et h_n ?

III (Plongement de Plücker)

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 4. Le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Soit $A(E)$ l'espace des endomorphismes antisymétriques de E, c'est-à-dire des $u \in \mathrm{End}(E)$ satisfaisant $\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$ pour tous $x, y \in E$.
a. À l'endomorphisme u on associe la forme bilinéaire $\Phi(u)$ définie par $\Phi(u)(x, y) = \langle x, u(y) \rangle$ pour tous $x, y \in E$. Montrer qu'on obtient ainsi un isomorphisme $\Phi : A(E) \to \Lambda^2 E^*$.
b. En déduire que pour tout $\omega \in \Lambda^2 E^*$ il existe une base orthonormée (e_1, e_2, e_3, e_4) de E telle que $\omega = ae^1 \wedge e^2 + be^3 \wedge e^4$ pour deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ (les (e^i) étant la base duale de (e_i)).
c. Soit $\omega \in \Lambda^2 E^*$. On dit que ω est décomposable s'il existe $\alpha, \beta \in E^*$ tels que $\omega = \alpha \wedge \beta$. Montrer que ω est décomposable si et seulement si $\omega \wedge \omega = 0$.
2. a. Soit $P \subset E^*$ un plan. Soit (α, β) une base de P. Montrer que la droite $\mathbb{R}(\alpha \wedge \beta) \subset \Lambda^2 E^*$ dépend uniquement de P. On note donc $f(P) = \mathbb{R}(\alpha \wedge \beta)$, on obtient ainsi une application $f : G_2(E^*) \to P(\Lambda^2 E^*)$, où $G_2(E^*)$ est la grassmannienne des 2-plans de E^* et $P(\Lambda^2 E^*)$ est l'espace projectif des droites de $\Lambda^2 E^*$ (il donc difféomorphe à $\mathbb{R}P^5$).

b. Montrer que f est injective.

c. Montrer que f est un plongement. On rappelle que la grassmannienne est une variété compacte, dont des cartes sont obtenues de la manière suivante : soit $P_0 \in G_2(E^*)$, soit Q un supplémentaire de P_0 dans E^*, et $U_Q \subset G_2(E^*)$ l'espace des supplémentaires de Q dans E^*, alors une carte sur l'ouvert $U_Q \ni P_0$ est obtenue par l'application $\phi : \mathrm{Hom}(P_0, Q) \to U_Q$ définie par : $\phi(u) =$ graphe de u.

3. a. En choisissant une orientation sur E, on identifie $\Lambda^4 E^* = \mathbb{R}$. Montrer qu'alors $q(\omega) = \omega \wedge \omega$ définit une forme quadratique sur $\Lambda^2 E^*$, de signature (3,3). En déduire que dans une base bien choisie $(\omega_i)_{i=1,\dots,6}$ de $\Lambda^2 E^*$, l'équation $q(\omega) = 0$ s'écrit (en posant $\omega = \sum_1^6 a_i \omega_i$)

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_4^2 + a_5^2 + a_6^2.$$

b. Montrer que $f(G_2(E^*))$ est la projection dans $P(\Lambda^2 E^*)$ de $\{\omega \in \Lambda^2 E^* - \{0\}, q(\omega) = 0\}$. En déduire que $G_2(E^*)$ est difféomorphe à un quotient $(S^2 \times S^2)/\mathbb{Z}_2$.

IV (Théorème de Borsuk-Ulam complexe)

Soit S^{2n-1} la sphère unité de $\mathbb{C}^n$, munie de l'action de S^1 donnée par

$$e^{i\theta} \cdot (z_1, \dots, z_n) = (e^{i\theta} z_1, \dots, e^{i\theta} z_n),$$

où $z_j = x_j + i y_j \in \mathbb{C}$.

1. a. Montrer que le champ de vecteurs X sur S^{2n-1} défini par $X(z_1, \dots, z_n) = (iz_1, \dots, iz_n)$ engendre l'action de S^1, c'est-à-dire que son flot est $\phi_t(z_1, \dots, z_n) = e^{it} \cdot (z_1, \dots, z_n)$.

b. On rappelle que le quotient S^{2n-1}/S^1 est l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^{n-1}$ des droites complexes de $\mathbb{C}^n$. On note p la projection $p : S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$. Expliquer pourquoi $T_{p(z)}\mathbb{C}P^{n-1} = T_z S^{2n-1}/\mathbb{R}X(z)$ pour tout $z \in S^{2n-1}$. Déduire les identifications

$$T^*_{p(z)}\mathbb{C}P^{n-1} = \{\alpha \in T^*_z S^{2n-1}, \alpha(X) = 0\},$$
$$\Lambda^k T^*_{p(z)}\mathbb{C}P^{n-1} = \{\alpha \in \Lambda^k T^*_z S^{2n-1}, i(X)\alpha = 0\}.$$

2. Soit $\alpha \in \Omega^k(S^{2n-1})$.

a. Montrer que si $\mathscr{L}_X \alpha = 0$ alors pour tout t on a $\phi_t^* \alpha = \alpha$.

b. Montrer que si $i(X)\alpha = 0$ et $\mathscr{L}_X \alpha = 0$, alors il existe une forme $\beta \in \Omega^k(\mathbb{C}P^{n-1})$ telle que $\alpha = p^*\beta$. On dit que α *descend* sur $\mathbb{C}P^{n-1}$.

3. a. (Cours) Justifier brièvement l'identité $\mathscr{L}_X \alpha = d(i(X)\alpha) + i(X)(d\alpha)$ pour toute forme différentielle α sur S^{2n-1}.

b. Soit α une 1-forme sur S^{2n-1} telle que $i(X)\alpha = 1$ et $\mathscr{L}_X \alpha = 0$. Montrer qu'il existe $\omega \in \Omega^2(\mathbb{C}P^{n-1})$ telle que $d\alpha = p^*\omega$.

c. Montrer que $d\omega = 0$ et que sa classe de cohomologie $[\omega] \in H^2(\mathbb{C}P^{n-1})$ ne dépend pas du choix de α.

4. On donne les nombres de Betti $b_{2i+1}(\mathbb{C}P^{n-1}) = 0$ et $b_{2i}(\mathbb{C}P^{n-1}) = 1$.

a. Montrer que les hypothèses de la question 3b sont satisfaites par la forme $\alpha_n = \sum_1^n x_j dy_j - y_j dx_j$ sur S^{2n-1}. La forme $d\alpha_n$ descend donc en une 2-forme fermée ω_n sur $\mathbb{C}P^{n-1}$.

b. *(Question avec un calcul difficile, il est conseillé de l'admettre)* Montrer que ω_n^{n-1} est une forme volume sur $\mathbb{C}P^{n-1}$. En déduire que $[\omega_n]$ est un générateur de $H^2(\mathbb{C}P^{n-1}) = \mathbb{R}$, et $[\omega_n]^{n-1}$ un générateur de $H^{2n-2}(\mathbb{C}P^{n-1}) = \mathbb{R}$.

5. Soit $f : S^{2n-1} \to S^{2k-1}$ telle que $f(e^{i\theta} \cdot z) = e^{i\theta} \cdot f(z)$ pour tout θ et tout $z \in S^{2n-1}$.

a. Montrer que f passe au quotient et induit une application $F : \mathbb{C}P^{n-1} \to \mathbb{C}P^{k-1}$.

b. Montrer que $F^*([\omega_k]) = [\omega_n]$ et $F^*([\omega_k])^{n-1} \neq 0$.

c. En utilisant $[\omega_k]^k = 0$, montrer que nécessairement $k \geqslant n$.