Examen de Géométrie Différentielle, 4 juin 2014

Durèe : 3 heures. Calculatrices et documents interdits.

1. OUI/NON

Répondre par OUI/NON aux questions suivantes ET justifier :

1) Le produit extérieur de deux formes exactes est-il exact ?

2) Étant donnée une distribution de sous-espaces sur une variété, l'ensemble des points accessibles à partir d'un point fixé est-il toujours fermé ?

3) Une surface convexe (i.e. dont la courbure est partout > 0) de $\mathbb{R}^3$ peut-elle être difféomorphe à un tore ?

4) Le quotient d'une variété orientable par un groupe discret est-il toujours orientable ?

5) La sphère S^2 peut-elle être munie d'une structure de groupe de Lie ?

6) Le champ de plans dans $\mathbb{R}^3$, donnée par le noyau de $dz - xdy$, est-elle intégrable ?

Solution :

1) OUI. $d(\alpha \wedge d\beta) = d\alpha \wedge d\beta$

2) NON. Penser à un champ de vecteurs de pente irrationnelle sur un tore

3) NON. D'après Gauss-Bonnet $\int_M K(x) d\sigma_M = \chi(M)$ et $\chi(T^2) = 0$.

4) NON. $\mathbb{R}P^2$ nest pas orientable mais est le quotient de S^2 par $\pm \mathrm{Id}$

5) NON. Un groupe de Lie est toujours parallélisable, mais d'après le théorème de la sphère chevelue, S^2 ne l'est pas

6) NON. La distribution est engendrée par $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$ dont le crochet de Lie est $\frac{\partial}{\partial z}$ qui n'est pas dans le champ de plans.

2. Courbure et isométrie locale des surfaces

Soient M_1, M_2 deux surfaces plongées dans $\mathbb{R}^3$. Soient x_1, x_2 des points de M_1, M_2. On dit que M_1 et M_2 sont **localement isométriques près de** x_1, x_2 si et seulement s'il existe V_1, V_2 voisinages de x_1, x_2 dans M_1, M_2 et un difféomorphisme $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ tels que $\varphi(x_1) = x_2$ et $\langle d\varphi(x)\xi, d\varphi(x)\eta\rangle = \langle \xi, \eta\rangle$ pour tous $x \in V_1, \xi, \eta \in T_xM_1$. Ici, $\langle \bullet, \bullet \rangle$ dénote le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

On dit que M est **plate** en x, si elle est localement isométrique près de x à un plan $\mathbb{R}^2$. Dans tout l'exercice on se fixe M une surface orientée.

1– Montrer qu'au voisinage d'un point quelconque x de M, il existe deux champs de vecteurs X_1, X_2 tels que $|X_1|^2 = |X_2|^2 = 1, \langle X_1, X_2\rangle = 0$. Montrer qu'il existe aussi deux formes θ_1, θ_2 de degré 1 telles que $\theta_j(X_i) = \delta_i^j$.

2– On note $N(x)$ la normale orientée à M en x. On considère X_1, X_2 et N comme des applications de M dans $\mathbb{R}^3$ et on prend leur différentielle extérieure dX_1, dX_2 et dN, vues comme des formes de degré 1 à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

ATTENTION : si Z est une fonction à valeurs vectorielles et si τ est une forme différentielle, on note $Z \otimes \tau$ la forme différentielle à valeurs vectorielles $X \mapsto Z\tau(X)$, où X est un champ de vecteurs.

En utilisant le fait que l'application $x \mapsto (X_1(x), X_2(x), N(x))$ est à valeurs dans $SO(3)$, montrer qu'il existe des 1-formes ω, α, β sur M, telles que

$$dX_1 = X_2 \otimes \omega + N \otimes \alpha,$$

$$dX_2 = -X_1 \otimes \omega + N \otimes \beta,$$

$$dN = -X_1 \otimes \alpha - X_2 \otimes \beta.$$

3– Montrer que ω est l'unique forme telle que $d\theta_1 = \omega \wedge \theta_2$ et $d\theta_2 = -\omega \wedge \theta_1$. On pourra montrer que ω est défini par $\omega(X_2) = -\theta_2([X_1, X_2]), \omega(X_1) = -\theta_1([X_1, X_2])$.

4– On pose $\alpha_2(x)(\xi, \eta) = \det(x, \xi, \eta)$ la forme volume usuelle sur S^2. Déduire de ce qui prècede que $N^*(\alpha_2) = \alpha \wedge \beta$ puis que $\alpha \wedge \beta = K(x)\theta_1 \wedge \theta_2$.

5– Montrer que $d\omega = -\alpha \wedge \beta$.

6– Conclure que $K(x)$ ne dépend que de la métrique sur M, i.e. si M_1 et M_2 sont localement isométriques près de x_1 et x_2, alors $K(x_1) = K(x_2)$ (Theorema Egregium de Gauss).

7– Montrer que si on peut trouver θ_1, θ_2 tels que $d\theta_1 = d\theta_2 = 0$ alors les champs correspondants X_1, X_2 commutent, et il existe une isométrie locale $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$.

8– Montrer que si $K(x) = 0$ au voisinage de x_0, alors ω s'écrit localement sous la forme df pour une certaine fonction f. Montrer que si on note $R(t)$ la matrice de la rotation d'angle t du plan, on a, posant

$$\begin{pmatrix} \theta_1' \\ \theta_2' \end{pmatrix} = R(f) \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix},$$

que $d\theta_1' = d\theta_2' = 0$. Conclure que si $K(x)$ s'annule au voisinage de x_0, alors M est plate en x_0.

Solution :

1– En effet le procédé d'orthonormalisation de Schmidt fournit X_1, X_2 en partant de n'importe quel couple de vecteurs linéairement indépendants (qui existent toujours localement). Par dualité on obtient les θ_i.

2– L'application $R : x \mapsto (X_1(x), X_2(x), N(x))$ est une application de M dans $SO(3)$. Sa différentielle est donc donnée par $dR(x) : T_xM \longrightarrow T_{R(x)}SO(R)$ et on peut écrire $A(x) = R(x)^{-1}dR(x)$ et telle que pour chaque $Z \in T_xM$, on a que $A(x)Z$ appartient à l'algèbre de Lie de $SO(3)$ c'est-à-dire à $\mathcal{A}(3)$ espace des matrices antisymétriques. L'application $A(x)$ est donc une matrice antisymétrique à coefficients des 1-formes. Si on écrit cette matrice sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega & \alpha \\ -\omega & 0 & \beta \\ -\alpha & -\beta & 0 \end{pmatrix}$$

on obtient la formule annoncée.

3– Comme il s'agit de deux formes, il suffit pour montrer que deux formes coincident, de montrer qu'elles prennent la même valeur sur (X_1, X_2). En effet, $d\theta_1(X_1, X_2) = X_1 \cdot \theta_1(X_2) - X_2 \cdot \theta_1(X_1) - \theta_1([X_1, X_2])$ Comme $\theta_1(X_1) = 1, \theta_1(X_2) = 0$ il reste $d\theta_1(X_1, X_2) = -\theta_1([X_1, X_2])$. Or $\theta_1(Y) = \langle X_1, Y\rangle$. Par aillleurs dans $\mathbb{R}^3$ on peut uti-Vérifier
liser la formule $[X_1, X_2] = -dX_1(X_2)+dX_2(X_1)$, donc $d\theta_1(X_1, X_2) = \langle X_1, [X_1, X_2]\rangle =$les
$\langle X_1, dX_1(X_2) - dX_2(X_1)\langle$ qui d'après la formule précédente vaut $\omega(X_1)$. De mêmesignes
pour θ_2. Maintenant on vérifie que $\omega(X_1) = (\omega \wedge \theta_2)(X_1, X_2)$ et de même, $-\omega(X_2) = (\omega \wedge \theta_1)(X_1, X_2)$. On en déduit que $d\theta_1 = \omega \wedge \theta_1, d\theta_2 = -\omega \wedge \theta_1$ et cela détermine ω vu que cela détermine $\omega(X_1)$ et $\omega(X_2)$.

4– Rappelons que $\alpha_2(x, \xi, \eta) = \det(x, \xi, \eta)$. Donc ici on doit calculer $(N^*\alpha_2)(X_1, X_2) = \det(N(x), dN(x)X_1, dN(x)X_2)$. Or $dN(x)X_1 = -X_1 \otimes \alpha(X_1) - X_2 \otimes \beta(X_1)$ et $dN(x)X_2 = -X_1 \otimes \alpha(X_2) - X_2 \otimes \beta(X_2)$. Donc

$$\begin{gathered} \det(N(x), dN(x)X_1, dN(x)X_2) = \\ \det(N(x), -X_1 \otimes \alpha(X_1) - X_2 \otimes \beta(X_1), -X_1 \otimes \alpha(X_2) - X_2 \otimes \beta(X_2)) = \\ -\alpha(X_1)\beta(X_2) + \alpha(X_2)\beta(X_1) = \\ -(\alpha \wedge \beta)(X_1, X_2) \end{gathered}$$

5– On a $ddX_1 = 0$. Mais $d(dX_1) = X_2 \otimes d\omega = dX_2 \wedge \omega + \alpha \wedge dN + N \otimes d\alpha$. En replaçant dX_2, dN par leur expressions $dX_2 = -X_1 \otimes \omega + N \otimes \beta$, et $dN = -X_1 \otimes \alpha - X_2 \otimes \beta$ et en prenant la composante sur X_2, on trouve la formule.

6– En effet, étant donné un plongement de M :

- d'une part K ne dépend pas du choix de θ_1, θ_2, vu qu'il ne dépend que de l'application N.

- on peut donc partir de n'importe quel couple (X_1, X_2) orthonormé pour calculer ω puis $d\omega = K(x)\theta_1 \wedge \theta_2 = K(x)\sigma_M$.

Soit alors $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2$ une isométrie. Alors $d\varphi$ envoie (X_1, X_2) défini sur M_1 en (Y_1, Y_2) défini sur M_2, et donc ω_1 sur ω_2, et enfin K_1 sur K_2.

7– Vu que $d\theta_1(X_1, X_2) = -\theta_1([X_1, X_2])$ et $d\theta_2(X_1, X_2) = -\theta_2([X_1, X_2])$, l'annulation de $d\theta_1, d\theta_2$ entraîne que $[X_1, X_2] = 0$. Alors l'application

$$F : (s, t) \mapsto \varphi_1^s \circ \varphi_2^t(x_0)$$

(où φ_j^t est le flot de X_j) est une application de $\mathbb{R}^2$ dans M. On a

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s,t) = X_1(F(s,t)), \frac{\partial F}{\partial t}(s,t) = X_2(F(s,t))$$

donc

$$\left|\frac{\partial F}{\partial s}(s,t)\right|^2 = 1, \left|\frac{\partial F}{\partial t}(s,t)\right|^2 = 1, \left\langle \frac{\partial F}{\partial s}(s,t), \frac{\partial F}{\partial t}(s,t)\right\rangle = 0$$

et F est une isométrie.

8– Si $K = 0$, on a $d\omega = 0$ et par le Lemme de Poincaré, ω est localement de la forme df pour une fonction $f \in C^\infty(M)$. Maintenant si θ_1', θ_2' sont donné par la formule on a

$$\begin{pmatrix} d\theta_1' \\ d\theta_2' \end{pmatrix} =$$
$$R(f)\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{pmatrix} + dR(f)\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

Or $R(f)dR(f) = \begin{pmatrix} 0 & df \\ -df & 0 \end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{pmatrix} d\theta_1' \\ d\theta_2' \end{pmatrix} =$$
$$R(f)\left[\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & df \\ -df & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}\right] =$$
$$R(f)\left[\begin{pmatrix} d\theta_1 \\ d\theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}\right] = 0$$

3. Enlacement et invariants des noeuds

On appelle noeud un plongement γ de S^1 dans $\mathbb{R}^3$. On dit que deux noeuds γ_0, γ_1 sont isotopes s'il existe une famille continue (pour la topologie C^1) γ_t de noeuds reliant γ_0 à γ_1 (la continuité C^1 signifiant que $(t,s) \mapsto \gamma_t'(s)$ est continue).

Soient γ_1, τ_1 deux noeuds ne s'intersectant pas, i.e. $\forall t, t' \in S^1 \times S^1, \gamma_1(t) \neq \tau_1(t')$. Étant données deux paires de noeuds (γ_1, τ_1) et (γ_2, τ_2) ne s'intersectant pas, on dit que ces paires sont isotopes si et seulement s'il existe une famille continue γ_t, τ_t de noeuds ne s'intersectant pas reliant γ_1, τ_1 et γ_2, τ_2. On dira parfois pour abréger « paire de noeuds »au lieu de « paire de noeuds ne s'intersectant pas ».

Pour une paire de noeuds (γ, τ) ne s'intersectant pas, on définit alors l'application du tore T^2 dans S^2 par

$$F : (t, t') \mapsto \frac{\gamma(t) - \tau(t')}{\|\gamma(t) - \tau(t')\|}$$

1– Soit α_2 la forme différentielle sur S^2 donnée par

$$\alpha_2 = \frac{1}{4\pi}(x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2)$$

On rappelle que $\int_{S^2} \alpha_2 = 1$.
On pose $lk(\gamma_1, \tau_1) = \int_{T^2} F^*(\alpha_2)$.
Montrer que $lk(\gamma, \tau) = lk(\tau, \gamma)$ et que si deux paires de noeuds γ_1, τ_1 et γ_2, τ_2 ne s'intersectant pas sont isotopes, alors $lk(\gamma_1, \tau_1) = lk(\gamma_2, \tau_2)$.

2– Montrer que $lk(\gamma, \tau)$ est un entier.

3– Montrer que cet entier est nul si (γ, τ) est isotope à une paire (γ_2, τ_2) telle que γ_2 et τ_2 sont séparés par un plan. On dit alors que γ et τ sont séparables par isotopie.

4– On appelle diagramme de la paire de noeud la représentation de la projection des noeuds dans le plan, en tenant compte des passages dessus/dessous. Dans les dessins qui suivent, γ est en bleu et τ en rouge (on ne s'occupera pas des signes pour le moment).

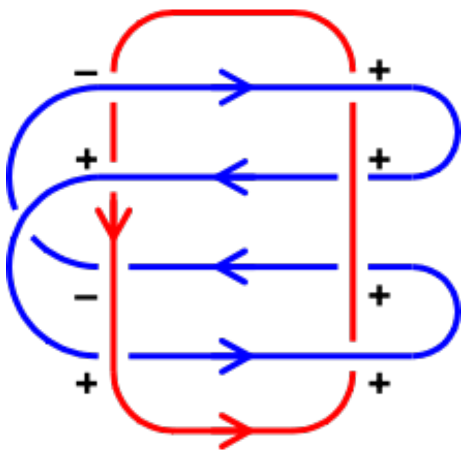

FIGURE 1. Exemple de paire de noeuds (Wikipedia commons)

Montrer que quitte à modifier très peu la direction de projection, on peut supposer que les courbes projetées sont immergées dans le plan. On admet que l'on peut supposer de plus que les points d'intersection sont transverses (i.e. en ces points les vecteurs vitesses des deux courbes ne sont pas colinéaires).

5– On note n_i le nombre de cas où on a un croisement comme dans le i-ème dessin ci-dessous. Montrer que $lk(\gamma, \tau) = \frac{n_1+n_2-n_3-n_4}{2}$

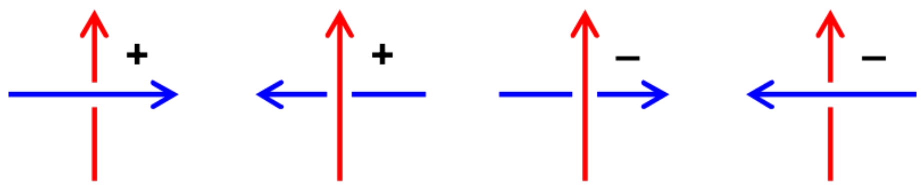

FIGURE 2. Croisements correspondant à n_1, n_2, n_3, n_4 respectivement

6– On admet le fait suivant : si $f : D^n \to \mathbb{R}^n$ envoie S^{n-1} dans S^{n-1} et est telle que 0 est valeur régulière de f, avec $f^{-1}(0) = \{0\}$, alors $\deg(f_{S^{n-1}}) = \mathrm{sign}(\det(df(0)))$.

On fixe (γ, τ) une paire de noeuds ne s'intersectant pas. On suppose que γ est le bord d'une surface orientable Σ et que si $x_0 \in \tau \cap \Sigma$, alors $T_{x_0}\gamma \cap T_{x_0}\Sigma = \{0\}$. Montrer que $lk(\gamma, \tau)$ est égal au nombre de points d'intersection de τ avec Σ, comptés avec un signe que l'on précisera.

Indication : prolonger l'application F définie de T^2 dans S^2 en une application G définie de $\Sigma \times S^1$ dans $\mathbb{R}^3$ et considérer la préimage de 0 par G.

7– (difficile) Montrer qu'il existe (γ, τ) une paire de noeuds non séparables par isotopie, mais telle que $lk(\gamma, \tau) = 0$. (On pourra admettre "à vue" qu'ils ne sont pas séparables par isotopie)

Solution :

1– Notons que $lk(\gamma, \tau)$ n'est que le degré de F. Le premier résultat est une conséquence de ce que si on échange γ et τ on change le signe de F et on échange t et t'. Or l'application de T^2 dans lui-même donnée par $(t, t') \mapsto (t', t)$ est de degré -1. Or $\deg(-F) = -\deg(F)$ vu que l'application antipodale de S^2 est de degré -1. Donc si $G(t, t') = -F(t', t)$ on a $\deg(G) = \deg(F)$ et $lk(\gamma, \tau) = lk(\tau, \gamma)$. Maintenant une isotopie de la paire de noeuds, γ_s, τ_s induit une isotopie F_s de F. Le résultat s'ensuit par invariance du degré par isotopie.

2– Le degré d'une application est un entier.

3– Si on peut isotoper γ, τ afin qu'ils soient séparés par un plans, on peut supposer que par exemple l'un est contenu dans $x_1 > 0$ et l'autre dans $x_1 < 0$. Et que chaque noeud est contenu dans $B(0, 1)$ et donc on peut translater chacun des noeuds dans $x_1 > r$ et $x_1 < -r$ avec r arbitrairement grand. Mais alors la composante de $\gamma(t) - \tau(t')$ sur l'axe x_1 est non nulle et donc F n'est pas surjective et $\deg(F) = 0$.

4– La projection est une immersion si et seulement si la direction v de projection n'est tangente à aucune des courbes. On doit donc trouver un vecteur de S^2 qui ne soit dans l'image ni de $\gamma' : S^1 \longrightarrow S^2$ ni de $\tau' : S^1 \longrightarrow S^2$. D'après le théorème de Sard, l'image de ces cercles est de mesure nulle, donc leur rúnion aussi, et on peut donc trouver un point dans le compluémentaire.

5– Soit e_1, e_2 une base du plan de projection et e_3 un générateur de l'orthogonal. Les points d'intersection correspondent à $F^{-1}(\pm(e_3))$. Regardons par exemple pour $(t_0, t_0') \in F^{-1}(e_3)$. Quitte à reparamétrer, on peut supposer $t_0 = t_0' = 0$. Dans le premier cas, $\gamma(t) = te_1 + e_3$ et $\tau(t') = t'e_2$ alors $F(t,t') = \frac{te_1 - t'e_2 + e_3}{|te_1 - t'e_2 + e_3|}$ dont la différentielle en $t = t' = 0$ préserve l'orientation alors que dans le deuxième cas elle la renverse.

6– On note $N(x) = \frac{x}{|x|}$ et on pose $\widetilde{F}(t,t') = \gamma(t) - \tau(t')$ et donc $F = N \circ \widetilde{F}$. On étend $\widetilde{F}$ en une application $\widetilde{G} : \Sigma \times S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Alors $\widetilde{G}(z_0, \theta_0) = 0$ si et seulement si $z = \gamma(\theta)$. Alors, posant $\beta_2 = N^*(\alpha_2)$, on a $\deg(F) = \int (\widetilde{F})^*(\beta_2)$. La formule de Stokes montre que si les (z_i, θ_i) sont les solutions de $\widetilde{G}(z,\theta) = 0$, $\deg(F) = \sum_j \deg(N \circ \widetilde{G}_{|S_i})$ où S_i est une petite sphère (de dimension 2) dans $\Sigma \times S^1$ centrée en (z_i, θ_i). En effet si les D_i sont les petits disques bordés par les sphères, et U leur union, on a

$$0 = \int_{\Sigma \times S^1 \setminus U} \widetilde{G}^*(d\beta_2) = \int_{\partial \Sigma \times S^1} (\widetilde{G})^* \beta_2 - \int_{\partial U} (\widetilde{G})^* \beta_2$$

Le premier terme est $\int_{T^2} \widetilde{F}^*(\beta_2) = lk(\gamma, \tau)$, le second $\sum_j \deg(N \circ \widetilde{G}_{|S_i})$. Il suffit donc de montrer que $\deg(N \circ \widetilde{G}_{|S_i}) = \pm 1$ suivant l'orientation de $\tau'(\theta_i)$ et $T_{z_i}\Sigma$. Mais d'après le résultat admis, on a $\deg(N \circ \widetilde{G}_{|S_i}) = \mathrm{sign}(det(d\widetilde{G}(z_i, \theta_i))$ dont le signe est négatif si $\tau'(\theta_i)$ est du côté de la normale extérieure à Σ et positif sinon.

7– Voici un exemple appelé enlacement de Whitehead :

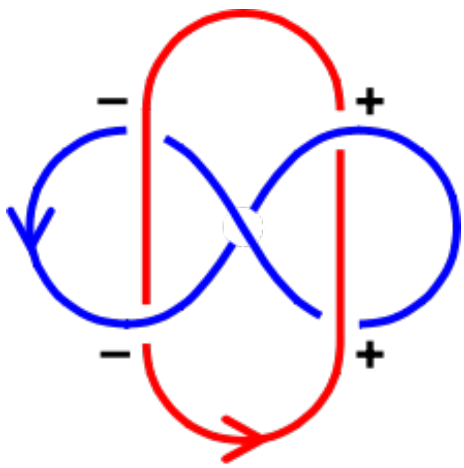

FIGURE 3. Entrelacement de Whitehead

4. Encore des noeuds

Cet exercice est indépendant du précédent, mais utilise certaines définitions et résultats qui sont rappelés.

On admettra que si γ est un noeud et τ un noeud qui ne l'intersecte pas, le nombre $lk(\gamma,\tau) = \int_{T^2} F^*(\alpha_2)$ défini dans l'exercice précédent est un entier qui est donné par la formule de la question 5. En particulier pour tout noeud γ, il existe un noeud τ tel que $lk(\gamma,\tau) \neq 0$.

1– Soit γ un noeud. Utiliser la suite de Mayer-Vietoris pour calculer $H^*(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma)$. On admettra (ce qui résulte d'une version précise du théorème du voisinage tubulaire) que tout noeud a un voisinage difféomorphe à $S^1 \times D^2$, dont le bord est donc difféomorphe à T^2.

2– Soit γ un noeud, et $H : (\mathbb{R}^3 \setminus \gamma) \times S^1 \longrightarrow S^2$ l'application

$$H(z,t) = \frac{z - \gamma(t)}{\|z - \gamma(t)\|}$$

On note $z = (z_1, z_2, z_3)$ pour z dans $\mathbb{R}^3 \setminus \gamma$. On pose $H^*(\alpha_2) = \sum_{j<k} A_{j,k}(t,z)dz_j \wedge dz_k + \sum_j B_j(z,t)dz_j \wedge dt$, et $L_\gamma = \sum_{j=1}^3 (\int_{S^1} B_j(z,t)dt)dz_j$. Montrer que L_γ est fermée et vérifie $lk(\tau,\gamma) = \int_{S^1} \tau^*(L_\gamma)$ si τ est un noeud n'intersectant pas γ.

3– Montrer que L_γ n'est pas exacte. En déduire que $H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma) = \mathbb{R}L_\gamma$ (on note de la même façon L_γ et sa classe dans $H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma)$).

4– Calculer aussi $H^*(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma \cup \tau)$ pour γ, τ une paire de noeuds disjoints. Montrer que $H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma \cup \tau) = \mathbb{R}L_\gamma \oplus \mathbb{R}L_\tau$.

5– Montrer que si γ, τ sont une paire de noeuds, $L_\gamma \wedge L_\tau$ est une forme de degré 2 représentant une classe dans $H^2(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma \cup \tau)$ et que cette classe est nulle si et seulement si $lk(\gamma,\tau) = 0$.

Solution :

1– On écrit la suite de Mayer-Vietoris pour $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3 \setminus \gamma) \cup U_\gamma$ où U_γ est le voisinage de γ difféomorphe à $S^1 \times D^2$. On notera que $(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma) \cap U_\gamma$ est difféomorphe à $S^1 \times (D^2 \setminus \{0\})$ dont l'homologie est celle du tore.

$$H^j(\mathbb{R}^3) \longrightarrow H^j(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma) \oplus H^j(U_\gamma) \longrightarrow H^j(T^2) \longrightarrow H^{j+1}(\mathbb{R}^3)$$

Pour $j = 1$ on obtient

$$0 \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma) \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow 0$$

et donc $H^j(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma) = \mathbb{R}$ pour $j = 2$ on aura

$$0 \longrightarrow H^2(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma) \longrightarrow H^2(T^2) \longrightarrow 0$$

et donc $H^2(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma) = \mathbb{R}$.

2– En effet, $dH^*(\alpha_2) = 0$ s'écrit

$$\sum_{j<k} \frac{\partial A_{j,k}}{\partial t} dt \wedge dz_j \wedge dz_k + \left(\frac{\partial B_j}{\partial z_k} - \frac{\partial B_k}{\partial z_j} \right) dt \wedge dz_j \wedge dz_k$$

Lorsqu'on intègre par rapport à S^1, comme $\int_{S^1} \frac{\partial A_{j,k}}{\partial t} dt = 0$ on trouve

$$\sum_{j<k} \left(\int_{S^1} \left(\frac{\partial B_j}{\partial z_k} - \frac{\partial B_k}{\partial z_j} \right) dt \right) dz_j \wedge dz_k = 0$$

ce qui signifie que L_γ est fermée.

On pouvait aussi remarquer que

$$dL_\gamma = d \int_{S^1} i_{\frac{\partial}{\partial t}} H^*(\alpha_2) = \int_{S^1} di_{\frac{\partial}{\partial t}} H^*(\alpha_2) = \int_{S^1} L_{\frac{\partial}{\partial t}} H^*(\alpha_2) - di_{\frac{\partial}{\partial t}} dH^*(\alpha_2)$$

Comme $dH^*(\alpha_2) = H^*(d\alpha_2) = 0$ et que $\int_{S^1} L_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega = \int_{S^1} \frac{d}{dt} \rho_t^*(\omega)$, où $\rho_t(\theta) = \theta + t$ on en déduit que $\int_{S^1} L_{\frac{\partial}{\partial t}} \omega = 0$ et donc que $\int_{S^1} di_{\frac{\partial}{\partial t}} H^*(\alpha_2) = 0$, ce qui signifie que $dL_\gamma = 0$.

3– Si L_γ était exacte, on aurait $\int_{S^1} \tau^*(L_\gamma) = 0$, donc $lk(\tau, \gamma) = 0$ mais on peut aisément construire pour chaque γ un

4– C'est encore Mayer-Vietoris en utilisant que $(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma) \cap (\mathbb{R}^3 \setminus \tau) = \mathbb{R}^3 \setminus (\gamma \cup \tau)$

$$H^j(\mathbb{R}^3) \longrightarrow H^j(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma) \oplus H^j(\mathbb{R}^3 \setminus \tau) \longrightarrow H^j(\mathbb{R}^3 \setminus (\gamma \cup \tau)) \longrightarrow H^{j+1}(\mathbb{R}^3)$$

d'où immédiatement $H^j(\mathbb{R}^3 \setminus (\gamma \cup \tau))$ vaut $\mathbb{R}$ si $j = 0$, $\mathbb{R}^2$ si $j = 1, 2$ et 0 sinon.

Pour montrer que L_γ, L_τ sont des générateurs, il suffit de montrer qu'ils sont linéairement indépendants.

Si T_γ^2 est le bord du voisinage de γ identifié à $S^1 \times D^2$, on a sur T_γ^2 une courbe p_γ bord du disque $\{1\} \times D^2$ et une courbe m_γ image de $S^1 \times \{1\}$. Notons que ces courbes ne sont pas uniquement définies et dépendent a priori du difféomorphisme. Cependant on peut quitte à ajouter à m_γ un multiple de p_γ supposer que $lk(p_\gamma, \gamma) = 1, lk(m_\gamma, \gamma) = 0$. On a $lk(p_\gamma, \tau) = 0$ vu que p_γ borde un disque disjoint de τ (on utilise la question 6). Donc on a $\int_{p_\gamma} L_\gamma = 1$ et $\int_{p_\gamma} L_\tau = 0$ et $\int_{p_\tau} L_\gamma = 0$ et $\int_{p_\tau} L_\tau = 1$ Cela entraîne bien sûr que L_γ, L_τ sont linéairement indépendants.

5– Mais on a aussi

$$H^j(\mathbb{R}^3) \longrightarrow H^j(\mathbb{R}^3 \setminus (\gamma \cup \tau)) \oplus H^j(U_\gamma \cup U_\tau) \longrightarrow H^j(T_\gamma^2 \cup T_\tau^2) \longrightarrow H^{j+1}(\mathbb{R}^3)$$

Donc l'application $H^j(\mathbb{R}^3 \setminus (\gamma \cup \tau)) \longrightarrow H^j(T_\gamma^2 \cup T_\tau^2) = H^j(T_\gamma^2) \oplus H^j(T_\tau^2)$ induite par les inclusions $T_\gamma^2 \cup T_\tau^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (\gamma \cup \tau)$ est injective et respecte la multiplication, le produit sur $H^j(T_\gamma^2) \oplus H^j(T_\tau^2)$ étant la somme directe des produits sur chaque facteur (i.e. $(x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) = (x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2)$) est donnée par

$$R : \omega \longrightarrow \left(\int_{m_\gamma} \omega, \int_{p_\gamma} \omega, \int_{m_\tau} \omega, \int_{p_\tau} \omega \right)$$

Maintenant comme $\int_{S^1} \tau^*(L_\gamma) = lk(\tau, \gamma)$, on a $\int_{m_\gamma} L_\gamma = 0$ et $\int_{p_\gamma} L_\gamma = 1$. Par ailleurs si τ est un autre noeud, on a $lk(m_\gamma, \tau) = lk(\gamma, \tau)$ vu que m_γ et γ sont isotopes, par une isotopie qui évite τ. Et $lk(p_\gamma, \tau) = 0$ vu que p_γ borde un disque disjoint de τ (on utilise la question 6). Donc $\int_{m_\gamma}(L_\tau) = lk(\gamma, \tau)$ et $\int_{p_\gamma}(L_\tau) = 0$.

Donc $R(L_\gamma) = (0, 1, lk(\tau, \gamma), 0)$ et $R(L_\tau) = (lk(\gamma, \tau), 0, 0, 1)$ Donc en projection sur $H^1(T^2_\gamma)$, L_γ est envoyé sur $(0, 1)$ et L_τ sur $(lk(\gamma, \tau), 0)$ et comme dans ces coordonnées le produit extérieur est donné par le déterminant, et le même résultat est vrai en projection sur $H^1(T^2_\tau)$ on en déduit que $L_\gamma \wedge L_\tau$ est non nul si et seulement si $lk(\gamma, \tau) \neq 0$.