Examen d'Analyse Fonctionnelle
DMA, Année 2017-2018

5 juin 2018 (3 heures)

Exercice 1. *Un théorème dû à Hörmander*

Soit d un entier supérieur ou égal à 1 et p un réel dans $[1,\infty[$. Pour $h \in \mathbb{R}^d$, la translation τ_h est l'application linéaire continue

$$\tau_h : \begin{array}{rcl} L^p(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & L^p(\mathbb{R}^d) \\ f & \longmapsto & f(\cdot - h)\,. \end{array}$$

1. Montrer que pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$,

$$\|\tau_h f + f\|_{L^p} \xrightarrow{|h|\to+\infty} 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p}\,.$$

Indication : On pourra commencer par traiter le cas où le support de f est compact.

2. Soit q un réel dans $[1,p[$, on considère une application linéaire T bornée de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans $L^q(\mathbb{R}^d)$, qui commute avec les translations τ_h pour tout $h \in \mathbb{R}^d$. En étudiant $T(\tau_h f + f)$, montrer que T est nulle.

3. On fixe une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ non nulle. Montrer par l'absurde qu'il existe $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $\varphi * f \notin L^1(\mathbb{R}^d)$.

⋆

Exercice 2.

Soit H un espace de Hilbert réel et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ une isométrie. On suppose que l'image $\operatorname{Im} T$ de T n'est pas dense dans H. Soit e_0 un vecteur de norme 1, orthogonal à $\operatorname{Im} T$. On pose

$$e_n := T^n e_0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

1. Vérifier que e_0 est orthogonal aux vecteurs e_n pour $n \geq 1$, puis montrer que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée dans H.

2. Montrer que $T^*T = \mathrm{Id}$ et calculer $T^* e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que $\sigma(T) = [-1,1]$.

⋆

Exercice 3. *Injection de Sobolev critique*

1. Montrer que l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^1(\mathbb{R}^2)$ n'est pas inclus dans $L^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Indication : On pourra considérer la fonction $f(x) := \varphi(x)\log(-\log|x|)$ où φ est une fonction de $\mathcal{D}\big(B(0,1)\big)$ égale à 1 près de 0.

2. Soit d un entier supérieur ou égal à 1 On définit l'ensemble $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ (pour *Bounded Mean Oscillations*) comme l'ensemble des fonctions $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)} := \sup_B \frac{1}{|B|}\int_B |f - f_{|B}|\, dx < \infty\,, \quad \text{avec} \quad f_{|B} := \frac{1}{|B|}\int_B f\, dx$$

où le sup est pris sur toutes les boules euclidiennes de $\mathbb{R}^d$. On veut montrer que $(L^1_{loc} \cap \dot H^{\frac{d}{2}})(\mathbb{R}^d)$ est continûment inclus dans $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$.

a) Vérifier que $\|\cdot\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)}$ est une semi-norme mais pas une norme.

b) Vérifier que l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est inclus dans $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$.

c) Soit $f \in (L^1_{loc} \cap \dot H^{\frac{d}{2}})(\mathbb{R}^d)$. Pour tout réel strictement positif A on pose

$$f_{\flat,A} := \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{B(0,A)}\mathcal{F}f)\,.$$

Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de f et de A telle que pour toute boule euclidienne B de rayon R,

$$\Big(\int_B |f_{\flat,A} - f_{\flat,A|B}|^2 \frac{dx}{|B|}\Big)^{\frac{1}{2}} \leq CRA\|f\|_{\dot H^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)}\,.$$

d) On définit

$$f_{\sharp,A} := \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_{{}^cB(0,A)}\mathcal{F}f)\,.$$

Montrer que

$$\int_B |f - f_{|B}|\,\frac{dx}{|B|} \leq \|f_{\flat,A} - f_{\flat,A|B}\|_{L^2(B,\frac{dx}{|B|})} + \frac{2}{\sqrt{|B|}}\|f_{\sharp,A}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\,.$$

e) Conclure.

⋆

Exercice 4. *Formule sommatoire de Poisson*

On se propose de démontrer le résultat suivant :

La distribution $T := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$ *appartient à* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *et sa transformée de Fourier est*

$$\mathcal{F}T = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{2k\pi}\,.$$

1. Montrer que toute fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que si une distribution tempérée S sur $\mathbb{R}$ vérifie $(x-a)S = 0$ pour un $a \in \mathbb{R}$, alors il existe une constante C_0 telle que $S = C_0\delta_a$.

3. Montrer que $T := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k$ appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

4. Montrer que le support de $\mathcal{F}T$ est inclus dans $2\pi\mathbb{Z}$.

5. Soit χ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ supportée dans $]-\pi/4, \pi/4[$ et égale à 1 sur $]-\pi/8, \pi/8[$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ il existe une constante C_k telle que

$$\frac{e^{i\,\cdot} - 1}{\cdot - 2\pi k}\chi(\cdot - 2\pi k)\mathcal{F}T = C_k \delta_{2\pi k}$$

et en déduire que

$$\mathcal{F}T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} -iC_k \delta_{2\pi k}\,.$$

6. Montrer que C_k ne dépend pas de k. On note $c = -iC_k$.

7. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}$, montrer que

$$c \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(2\pi k + y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}\varphi(k) e^{iky}$$

et en déduire que

$$c \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx\,.$$

8. Conclure.

⋆

Exercice 5. *Opérateurs maximaux monotones et théorème de Hille Yosida*

Soit H un espace de Hilbert réel et T un opérateur non borné sur H de domaine $D(T)$. On suppose dans tout cet exercice que T est maximal monotone, c'est-à-dire que

$$\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} + T) = H \quad \text{et} \quad \forall f \in D(T)\,, \quad (Tf|f) \geq 0\,.$$

1. Préliminaires.

   a) Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} + T) = \{0\}$ et que
   $$(\mathrm{Id} + T)g = f \quad \Longrightarrow \quad \|g\| \leq \|f\|\,.$$
   b) Montrer que $D(T)$ est dense dans H et que T est fermé.
   c) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\mathrm{Id} + \lambda T$ est bijectif de $D(T)$ sur H et que son inverse $(\mathrm{Id} + \lambda T)^{-1}$ est un opérateur borné avec
   $$\|(\mathrm{Id} + \lambda T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1\,.$$
   Indication : On pourra commencer par montrer que si $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} + \lambda_0 T) = H$ pour un certain $\lambda_0 > 0$ alors $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} + \lambda T) = H$ pour tout $\lambda > \lambda_0/2$.
   d) Soit
   $$R(\lambda) := (\mathrm{Id} + \lambda T)^{-1} \quad \text{et} \quad T(\lambda) := \frac{1}{\lambda}\big(\mathrm{Id} - R(\lambda)\big)\,.$$
   Montrer que pour tout $\lambda > 0$, tout $f \in H$ et tout $g \in D(T)$,
   $$T(\lambda)f = T\big(R(\lambda)f\big) \quad \text{et} \quad T(\lambda)g = R(\lambda)(Tg)\,.$$
   En déduire que
   $$\lim_{\lambda \to 0} R(\lambda)f = f \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \to 0} T(\lambda)g = Tg\,.$$
   Indication : On pourra commencer par traiter le cas où $f \in D(T)$.

e) Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \in H$

$$(T(\lambda)f|f) \geq \lambda \|T(\lambda)f\|^2$$

et en déduire que pour tout $\lambda > 0$ et tout $f \in H$

$$\|T(\lambda)f\| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\| \,.$$

2. On note $C(\mathbb{R}^+; D(T))$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $D(T)$, et $C^1(\mathbb{R}^+; H)$ l'espace des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans H. On veut montrer que pour tout u_0 dans $D(T)$, il existe une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}^+; H) \cap C(\mathbb{R}^+; D(T))$ au problème d'évolution

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + Tu = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq 0 \,, \\ &u_{|t=0} = u_0 \,, \end{aligned} \tag{1}$$

telle que pour tout $t \geq 0$

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad \text{et} \quad \left\|\frac{d}{dt}u(t)\right\| \leq \|Tu_0\| \,.$$

a) Soit $\lambda > 0$. Montrer qu'il existe une unique solution u_λ dans $C^1(\mathbb{R}^+; H)$ à

$$\begin{aligned} &\frac{du_\lambda}{dt} + T(\lambda)u_\lambda = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq 0 \,, \\ &u_{\lambda|t=0} = u_0 \,. \end{aligned}$$

Indication : On pourra utiliser le fait que $T(\lambda)$ est un opérateur borné dans H.

b) Montrer que les fonctions $t \longmapsto \|u_\lambda(t)\|$ et $t \longmapsto \|T(\lambda)u_\lambda(t)\|$ sont décroissantes.

c) Montrer que pour tout $t \geq 0$, la suite $u_\lambda(t)$ converge vers une limite $u(t)$ quand λ tend vers 0, et que la convergence est uniforme sur tout compact en temps $[0, \mathcal{T}]$.

d) En supposant que u_0 appartient à $D(T^2)$ (au sens où u_0 et Tu_0 appartiennent à $D(T)$) montrer que $v_\lambda(t) := \dfrac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge vers une limite et que la convergence est uniforme sur tout compact en temps $[0, \mathcal{T}]$. En déduire que $u \in C^1(\mathbb{R}^+; H)$ et

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) \longrightarrow \frac{du}{dt}(t) \,, \quad \lambda \to 0 \,, \quad \text{uniformément sur } [0, \mathcal{T}] \,.$$

e) En supposant que u_0 appartient à $D(T^2)$, en déduire que pour tout $t \geq 0$

$$\frac{d}{dt}u(t) + Tu(t) = 0 \,,$$

que u appartient à $C^1(\mathbb{R}^+; H) \cap C(\mathbb{R}^+; D(T))$ et que l'on a de plus

$$\forall t \geq 0 \,, \quad \|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad \text{et} \quad \left\|\frac{d}{dt}u(t)\right\| \leq \|Tu_0\| \,.$$

f) Montrer que $D(T^2)$ est dense dans $D(T)$ pour la norme du graphe et conclure à l'existence d'une solution à (1) dans $C^1(\mathbb{R}^+; H) \cap C(\mathbb{R}^+; D(T))$.

3. Montrer que la solution ainsi construite est unique.

⋆