# Examen d'Analyse Fonctionnelle
# DMA, Année 2017-2018

5 juin 2018 (3 heures)

**Solution 1.**

1. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ dont le support est contenu dans un compact $K$. Il existe $M$ assez grand tel que si $|h| \geq M$, alors $K \cap (h+K) = \emptyset$. On a alors pour $|h| \geq M$

$$\begin{aligned}\|\tau_h f + f\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h)+f(x)|^p(\mathbf{1}_K(x) + \mathbf{1}_{h+K}(x))dx \\ &= \int_K |f(x)|^p dx + \int_{h+K} |f(x-h)|^p dx \\ &= 2\|f\|_{L^p}^p \,.\end{aligned}$$

On a ainsi $\|\tau_h f + f\|_{L^p} = 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p}$.

À présent, soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ quelconque, et $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in L^p$ à support compact tel que

$$\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon \,.$$

Soit $M \geq 0$ tel que pour tout $|h| \geq M$, $\|\tau_h g + g\|_{L^p} = 2^{\frac{1}{p}}\|g\|_{L^p}$. Majorons alors

$$\begin{aligned}\|\tau_h f + f\|_{L^p} - 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p} &\leq \|\tau_h g + g\|_{L^p} + \|f-g\|_{L^p} + \|\tau_h f - \tau_h g\|_{L^p} - 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p} \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}}(\|g\|_{L^p} - \|f\|_{L^p}) + 2\|f-g\|_{L^p} \\ &\leq 4\|f-g\|_{L^p} \leq 4\varepsilon \,,\end{aligned}$$

car $\tau_h$ est une isométrie de $L^p$. Dans l'autre sens, toujours pour $|h| \geq M$

$$\begin{aligned}2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p} - \|\tau_h f + f\|_{L^p} &\leq 2^{\frac{1}{p}}(\|g\|_{L^p} + \varepsilon) - \|\tau_h f + f\|_{L^p} \\ &\leq 2\varepsilon + \|\tau_h g + g\|_{L^p} - \|\tau_h f + f\|_{L^p} \\ &\leq 2\varepsilon + \|\tau_h(g-f) + (g-f)\|_{L^p} \\ &\leq 4\varepsilon \,.\end{aligned}$$

2. Notons $C := \sup\left\{\|Tf\|_{L^q} \mid f \in L^p(\mathbb{R}^d)\,,\, \|f\|_{L^p} = 1\right\}$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ telle que $\|f\|_{L^p} = 1$. D'une part, on a

$$\|T(\tau_h f + f)\|_{L^q} \leq C\|\tau_h f + f\|_{L^p}.$$

D'autre part, comme $T$ commute aux translations, $\|T(\tau_h f + f)\|_{L^q} = \|\tau_h(Tf) + (Tf)\|_{L^q}$. En faisant tendre $h$ vers l'infini, on obtient alors

$$2^{\frac{1}{q}}\|Tf\|_{L^q} \leq C 2^{\frac{1}{p}}.$$

En prenant le supremum sur de telles fonctions $f$, on trouve

$$C 2^{\frac{1}{q}} \leq C 2^{\frac{1}{p}}.$$

Vu que $p > q$, on voit que nécessairement $C = 0$, donc $T$ est nulle, par homogénéité.

3. Supposons que pour tout $f \in L^2$, on a $\varphi * f \in L^1$. Définissons alors l'opérateur

$$T : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^d) \\ \quad f \longmapsto \varphi * f. \end{cases}$$

Premièrement, $T$ commute avec les translations : si $x, h \in \mathbb{R}^d$, alors

$$(\varphi * \tau_h f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\tau_h f(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) f(x-h-y)dy = (\varphi * f)(x-h).$$

Reste à voir pourquoi $T$ est continue. On va appliquer le théorème du graphe fermé : soit $f_n$ une suite d'éléments de $L^2(\mathbb{R}^d)$ tels que $f_n \to f$ dans $L^2$ et $\varphi * f_n \to g$ dans $L^1$. Il s'agit de montrer que $g = \varphi * f$. Pour ce faire, considérons la transformée de Fourier : nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{f_n} &\to \widehat{f} \quad \text{dans } L^2, \\ \widehat{\varphi * f_n} = \widehat{\varphi}\widehat{f_n} &\to \widehat{g} \quad \text{dans } L^\infty. \end{aligned}$$

Or il existe une sous-suite de $\{\widehat{f_n}\}$ telle que la convergence vers $\widehat{f}$ a lieu presque partout. Or pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\widehat{\varphi}(x)\widehat{f_n}(x) \to \widehat{g}(x)$. Donc $\hat{g} = \widehat{\varphi}\widehat{f}$ dans $L^\infty$, *i.e.* $g = Tf$.

D'après la question précédente, cela impose que $T \equiv 0$. Or si l'on choisit $f := \mathcal{F}^{-1}(\overline{\widehat{\varphi}})$, on a clairement $Tf \neq 0$. D'où une contradiction.

$\star$

**Solution 2.**

1. Puisque tous les vecteurs $e_n$ sont dans $D(T)$ pour $n \geq 1$, on sait que $e_0$ est orthogonal à tous ces vecteurs. Par ailleurs puisque $T$ est une isométrie, elle conserve le produit scalaire donc pour tout $n \geq 0$ et tout $m > 0$

$$(e_n|e_{n+m}) = (T^n e_0|T^n e_m) = (e_0|e_m) = 0\,.$$

Enfin

$$\|e_n\| = \|Te_{n-1}\| = \|e_{n-1}\| = \cdots = \|e_0\| = 1\,.$$

On a bien affaire à une suite orthonormée.

2. Montrons que $T^*T = \mathrm{Id}$. Il s'agit de montrer que pour tout $(x, y) \in H$ on a

$$(T^*Tx|y) = (x|y)\,.$$

Mais on a l'identité de polarisation

$$(x|y) = \frac{1}{4}(x+y|x+y) - \frac{1}{4}(x-y|x-y)$$

donc comme $\|Tx\| = \|x\|$ on en déduit le résultat. On a alors

$$T^*e_n = T^*Te_{n-1} = e_{n-1}$$

pour tout $n \geq 1$. Par ailleurs

$$(T^*e_0|y) = (e_0|Ty) = 0$$

pour tout $y \in H$ donc $T^*e_0 = 0$.

1. On pose, pour $|\lambda| < 1$,

$$x := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n e_n \,.$$

Cette somme est absolument convergente, on a $x \neq 0$ (car $(x|e_0) = 1$) et

$$T^* x = \lambda x \,.$$

Le spectre de $T^*$, qui est égal à celui de $T$, contient donc l'intervalle unité ouvert. Par ailleurs il est compact donc il contient l'intervalle unité fermé, et il est contenu dans l'intervalle unité fermé puisque la norme de $T$ est 1. Donc obtient $\sigma(T) = [-1, 1]$.

⋆

**Solution 3.**

1. On constate facilement que $f$ n'est pas bornée mais que

$$|\partial_j f(x)| \leq \frac{C}{|x| |\log |x||}$$

appartient à $L^2(\mathbb{R}^2)$.

2.

a) La semi-norme $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)$ (propriété qui se vérifie facilement) s'annule sur les fonctions constantes, ce n'est donc pas une norme.

b) Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ et

$$|f_{|B}| := \frac{1}{|B|} \Big| \int_B f \, dx \Big| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \,.$$

On a donc

$$\|f\|_{\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_B \Big( \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + |f_{|B}| \Big) \leq 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

d'où le résultat.

c) On a

$$\begin{aligned} \|f_{\flat,A} - f_{\flat,A|B}\|_{L^2(B,\frac{dx}{|B|})} &\leq R \|\nabla f_{\flat,A}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq CR \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{1-\frac{d}{2}} |\xi|^{\frac{d}{2}} |\widehat{f_{\flat,A}}(\xi)| \, d\xi \\ &\leq CRA \|f\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)} \,. \end{aligned}$$

d) Ce résultat suit de l'inégalité triangulaire et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

e) On a alors par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_B |f - f_{|B}| \frac{dx}{|B|} \leq CRA \|f\|_{\dot{H}^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)} + C(AR)^{-\frac{d}{2}} \Big( \int_{|\xi| \geq A} |\xi|^d |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} ,$$

et le résultat suit en choisissant $A = R^{-1}$.

$\star$

**Solution 4.**

1. Toute fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et donc définit une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

2. Ce résultat a été vu en TD.

3. On note que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la somme $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)$ est bien définie : il existe en effet une constante $C > 0$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{Z}\,, \quad |\varphi(k)| \leq \frac{C}{|k|^2}\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
|\langle T, \varphi\rangle| &= \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(k)\Big| \\
&\leq |\varphi(0)| + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\varphi(k)| \\
&\leq |\varphi(0)| + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{|k|^2} |k^2\varphi(k)|
\end{aligned}$$

donc $T$ est bien une distribution tempérée.

4. On a

$$T \circ \tau_1 = T$$

donc

$$\mathcal{F}T(\xi) = \mathcal{F}(T \circ \tau_1)(\xi) = e^{i\xi}\mathcal{F}T(\xi)$$

ce qui implique que le support de $\mathcal{F}T$ est inclus dans $2\pi\mathbb{Z}$.

5. On a

$$\mathcal{F}T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi(\cdot - 2\pi k)\mathcal{F}T\,.$$

Par ailleurs on peut écrire

$$0 = (e^{i\xi} - 1)\chi(\xi - 2\pi k)\mathcal{F}T = (\xi - 2\pi k)\frac{e^{i\xi} - 1}{\xi - 2\pi k}\chi(\xi - 2\pi k)\mathcal{F}T\,.$$

Par la question 2, il existe donc une constante $C_k$ telle que

$$\frac{e^{i\xi} - 1}{\xi - 2\pi k}\chi(\xi - 2\pi k)\mathcal{F}T = C_k\delta_{2\pi k}\,.$$

Comme $\dfrac{e^{i\xi} - 1}{\xi - 2\pi k} \to i$ quand $\xi \to 2\pi k$ on a

$$\chi(\xi - 2\pi k)\mathcal{F}T = -iC_k\delta_{2\pi k}\,,$$

et donc

$$\mathcal{F}T = \sum_{k\in\mathbb{Z}} -iC_k\delta_{2\pi k}\,.$$

6. On a
$$e^{i2\pi\,\cdot}\,T = T \quad \text{dans} \quad \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$
donc
$$\mathcal{F}T \circ \tau_{2\pi} = \mathcal{F}T\,.$$
On en conclut facilement qu'il existe une constante $c$ telle que
$$-iC_k = c \quad \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

7. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned}
c\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(2\pi k + y) &= \langle \mathcal{F}T, \varphi(\cdot + y)\rangle \\
&= \langle T, \mathcal{F}(\varphi(\cdot + y))\rangle \\
&= \langle T, e_{-y}\mathcal{F}\varphi\rangle \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\varphi(k)e^{iky}\,.
\end{aligned}$$
Après intégration sur $[0, 2\pi]$ il vient (en appliquant le théorème de convergence dominée pour justifier l'interversion de l'intégrale et de la série)
$$\begin{aligned}
c\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx &= c\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \varphi(x)\,dx \\
&= c\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \varphi(2\pi k + y)\,dy \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}\varphi(k) \int_0^{2\pi} e^{iky}\,dy \\
&= 2\pi\mathcal{F}\varphi(0) \\
&= 2\pi\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx
\end{aligned}$$
donc $c = 2\pi$.

8. Le résultat suit.

⋆

**Solution 5.**

1.

a) Pour tout $f \in H$ il existe un unique $g \in D(T)$ tel que $g + Tg = f$. En effet si $g'$ est une autre solution alors
$$g - g' + T(g - g') = 0\,.$$
Il suffit alors de prendre le produit scalaire avec $g - g'$ et d'utiliser la monotonie de $T$ pour trouver que $g = g'$. On note par ailleurs que si $g + Tg = f$ alors
$$\|g\|^2 + (Tg|g) = (f|g) \le \|f\|\|g\|$$
donc en particulier
$$\|g\| \le \|f\|\,.$$

L'opérateur $\mathrm{Id} + T$ est donc bijectif de $D(T)$ sur $H$, et $(\mathrm{Id} + T)^{-1}$ est borné de norme inférieure à 1.

b) Montrons que l'orthogonal de $D(T)$ est réduit à $\{0\}$. Soit donc $f$ dans $H$ tel que

$$\forall g \in D(T)\,, \quad (f|g) = 0$$

et montrons que $f = 0$. On sait qu'il existe $g_0 \in D(T)$ tel que

$$g_0 + Tg_0 = f$$

donc en particulier

$$0 = (f|g_0) = \|g_0\|^2 + (Tg_0|g_0) \geq \|g_0\|^2\,.$$

On a alors $g_0 = 0$ et donc $f = 0$.

Soit $(f_n, g_n)$ une suite du graphe de $T$ (donc telle que $f_n \in D(T)$ et $g_n = Tf_n$) vérifiant

$$(f_n, g_n) \longrightarrow (f, g)\,,$$

et montrons que $f \in D(T)$ et $g = Tf$. On a

$$f_n = (\mathrm{Id} + T)^{-1}(f_n + Tf_n) \longrightarrow (\mathrm{Id} + T)^{-1}(f + g)$$

donc $f \in D(T)$ et $f + Tf = f + g$, d'où le résultat.

c) On va procéder par récurrence en montrant que si $\mathrm{Id} + \lambda_0 T$ est surjectif pour un certain $\lambda_0 > 0$ alors $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} + \lambda T) = H$ pour tout $\lambda > \lambda_0/2$. On note que comme ci-dessus pour tout $f \in H$ il existe un unique $g \in D(T)$ tel que $g + \lambda_0 Tg = f$. D'autre part l'application $g \longmapsto f$, notée $\big(\mathrm{Id} + \lambda_0 T\big)^{-1}$, est un opérateur borné de norme plus petite que 1. On veut résoudre l'équation

$$g + \lambda Tg = f\,,$$

qui s'écrit aussi

$$g + \lambda_0 Tg = \Big(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\Big)g + \frac{\lambda_0}{\lambda}f$$

ou encore

$$g = \big(\mathrm{Id} + \lambda_0 T\big)^{-1}\Big(\Big(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\Big)g + \frac{\lambda_0}{\lambda}f\Big)\,.$$

Cette dernière équation se résout de manière unique grâce au théorème de point fixe de Banach dès que $|1 - \lambda_0/\lambda| < 1$ ou encore $\lambda > \lambda_0/2$.

d) On sait que

$$R(\lambda)f + \lambda Tf = f$$

donc $TR(\lambda)f = T(\lambda)f$. Par ailleurs si $g \in D(T)$ alors

$$Tg = \frac{1}{\lambda}(g + \lambda Tg - g) = \frac{1}{\lambda}(\mathrm{Id} + \lambda T)\big(g - R(\lambda)g\big)$$

donc

$$R(\lambda)Tg = \frac{1}{\lambda}(g - R(\lambda)g)\,.$$

Enfin

$$\|g - R(\lambda)g\| = \lambda\|T(\lambda)g\| \leq \lambda\|Tg\| \longrightarrow 0\,, \quad \lambda \to 0\,.$$

Par ailleurs comme $\overline{D(T)} = H$ puisque $T$ est à domaine dense, alors pour tout $f \in H$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe $g \in D(H)$ tel que $\|f - g\| \leq \varepsilon$. Alors

$$\|f - R(\lambda)f\| \leq \|g - R(\lambda)g\| + 2\|f - g\|$$

et donc
$$\|f - R(\lambda)f\| \longrightarrow 0\,, \quad \lambda \to 0\,.$$
Comme $T(\lambda)f = R(\lambda)(Tf)$ on conclut que pour tout $g \in D(T)$, $\lim\limits_{\lambda\to 0} T(\lambda)g = Tg$.

e) On écrit
$$(T(\lambda)f|f) = (T(\lambda)f|f - R(\lambda)(f)) + (T(\lambda)f|R(\lambda)(f)) = \lambda\big\|T(\lambda)f\big\|_H^2 + (TR(\lambda)f|R(\lambda)f)$$
et le résultat suit de la monotonie de $T$, de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du résultat précédent.

2.

a) On sait que $T(\lambda)$ est borné, de norme inférieure à $1/\lambda$, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz garantit l'existence et l'unicité d'une solution $u_\lambda$ à
$$\frac{d}{dt}u_\lambda + T(\lambda)u_\lambda = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+\,,$$
$$u_{\lambda|t=0} = u_0\,.$$

b) On commence par remarquer que
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t)\|^2 = \Big(\frac{d}{dt}u_\lambda(t)|u_\lambda(t)\Big) = -(T(\lambda)u_\lambda(t)|u_\lambda(t)) \leq 0\,.$$
Par ailleurs on peut montrer par récurrence (comme $T(\lambda)$ est un opérateur borné) que $u_\lambda$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^+;H)$ et
$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{d}{dt}\Big)^k u_\lambda(t) + T(\lambda)u_\lambda(t)\Big(\frac{d}{dt}\Big)^k u_\lambda(t) = 0\,.$$
Par le même calcul que précédemment il vient
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\|\frac{du_\lambda}{dt}\Big\|^2 \leq 0\,.$$
En particulier on a donc pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \geq 0$,
$$\Big\|\frac{d}{dt}u_\lambda\Big\| = \|T(\lambda)u_\lambda(t)\| \leq \|Tu_0\|\,.$$

c) Soient $\mu$ et $\nu$ deux réels strictement positifs et soit $u_{\lambda\mu}(t) := u_\lambda(t) - u_\mu(t)$. On a
$$\frac{d}{dt}u_{\lambda\mu} + T(\lambda)u_\lambda - T(\mu)u_\mu = 0$$
donc
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\lambda\mu}(t)\|_H^2 + \Big(T(\lambda)u_\lambda(t) - T(\mu)u_\mu(t)|u_{\lambda\mu}(t)\Big) = 0\,.$$
Mais
$$\begin{aligned}
&\Big(T(\lambda)u_\lambda - T(\mu)u_\mu|u_{\lambda\mu}\Big)\\
&\quad = \Big(T(\lambda)u_\lambda - T(\mu)u_\mu|u_\lambda - R(\lambda)u_\lambda + R(\lambda)u_\lambda - R(\mu)u_\mu + R(\mu)u_\mu - T(\mu)u_\mu\Big)\\
&\quad = \Big(T(\lambda)u_\lambda - T(\mu)u_\mu|\lambda T(\lambda)u_\lambda - \mu T(\mu)u_\mu\Big)\\
&\qquad + \Big(T(R(\lambda)u_\lambda - R(\mu)u_\mu)|R(\lambda)u_\lambda - R(\mu)u_\mu\Big)\\
&\quad \geq \Big(T(\lambda)u_\lambda - T(\mu)u_\mu|\lambda T(\lambda)u_\lambda - \mu T(\mu)u_\mu\Big)\,.
\end{aligned}$$

On a donc
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{\lambda\mu}(t)\|^2 \leq 2(\lambda+\mu)\|Tu_0\|^2 .$$
Par intégration on déduit
$$\|u_{\lambda\mu}(t)\|^2 \leq 4(\lambda+\mu)t\|Tu_0\|^2$$
donc pour tout $t \geq 0$, $u_\lambda(t)$ est une suite de Cauchy quand $\lambda$ tend vers zéro, et donc converge vers une limite notée $u(t)$. En prenant la limite $\mu \to 0$ il vient
$$\|u_\lambda(t) - u(t)\|^2 \leq 4\lambda t\|Tu_0\|^2$$
donc la convergence est uniforme sur tout compact en temps $[0,\mathcal{T}]$. On en déduit que $u$ appartient à $C([0,\mathcal{T}];H)$.

d) On a
$$\frac{d}{dt}v_\lambda + T(\lambda)v_\lambda = 0 ,$$
et donc les mêmes calculs que ci-dessus impliquent que la fonction $v_{\lambda\mu}(t) := v_\lambda(t) - v_\mu(t)$ vérifie
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_{\lambda\mu}\|^2 \leq (\|T(\lambda)v_\lambda\| + \|T(\mu)v_\mu\|)(\lambda\|T(\lambda)v_\lambda\| + \mu\|T(\mu)v_\mu\|) .$$
Mais
$$\|T(\lambda)v_\lambda(t)\| \leq \|T(\lambda)v_\lambda(0)\| = \|T(\lambda)T(\lambda)u_0\|$$
et de même
$$\|T(\mu)v_\mu(t)\| \leq \|T(\mu)v_\mu(0)\| = \|T(\mu)T(\mu)u_0\| .$$
Puisque $Tu_0$ appartient à $D(T)$ on a
$$T(\lambda)T(\lambda)u_0 = R(\lambda)TR(\lambda)Tu_0 = R(\lambda)^2T^2u_0$$
et donc
$$\|T(\lambda)T(\lambda)u_0\| \leq \|T^2u_0\| \quad \text{et} \quad \|T(\mu)T(\mu)u_0\| \leq \|T^2u_0\| .$$
On en déduit que
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_{\lambda\mu}\|^2 \leq 2(\lambda+\mu)\|T^2u_0\|$$
et l'on conclut comme ci-dessus que $v_\lambda(t)$ converge vers une limite quand $\lambda$ tend vers zéro et que cette convergence est uniforme sur tout compact en temps $[0,\mathcal{T}]$. On a donc $u \in C^1(\mathbb{R}^+;H)$ et
$$\frac{d}{dt}u_\lambda(t) \longrightarrow \frac{d}{dt}u(t) , \quad \lambda \to 0 , \quad \text{uniformément sur } [0,\mathcal{T}] .$$

e) On peut alors passer à la limite dans l'équation. On a
$$\begin{aligned}\|R(\lambda)u_\lambda(t) - u(t)\| &\leq \|R(\lambda)u_\lambda(t) - R(\lambda)u(t)\| + \|R(\lambda)u_\lambda(t) - u(t)\| \\ &\leq \|u_\lambda(t) - u(t)\| + \|R(\lambda)u_\lambda(t) - u(t)\| \to 0 , \quad \lambda \to 0 ,\end{aligned}$$
donc comme le graphe de $T$ est fermé on obtient
$$u(t) \in D(T) , \quad T(\lambda)u_\lambda(t) = TR(\lambda)u_\lambda(t) \to Tu(t) , \quad \lambda \to 0 .$$
On a alors
$$\frac{d}{dt}u(t) + Tu(t) = 0 ,$$
$u$ appartient à $C^1(\mathbb{R}^+;H) \cap C(\mathbb{R}^+;D(T))$ et on a de plus
$$\forall t \geq 0 , \quad \|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad \text{et} \quad \left\|\frac{d}{dt}u(t)\right\| \leq \|Tu_0\| .$$

f) Pour conclure la preuve de l'existence nous allons utiliser la densité de $D(T^2)$ dans $D(T)$ pour la norme du graphe. Soit donc $u_0 \in D(T)$ et soit la suite $(u_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_{0,n} := R(\frac{1}{n})u_0$$

de sorte que $u_{0,n}$ appartient à $D(T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$Tu_{0,n} = n(u_0 - u_{0,n}) \in D(T) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

donc $u_{0,n}$ appartient à $D(T^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin

$$\lim_{n\to\infty} u_{0,n} = u_0$$

et on a

$$Tu_{0,n} = R(\frac{1}{n})Tu_0$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} Tu_{0,n} = Tu_0\,.$$

D'après le raisonnement précédent on sait qu'il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ une solution $u_n$ dans $C^1(\mathbb{R}^+; H) \cap C(\mathbb{R}^+; D(T))$ au problème

$$\frac{d}{dt}u_n + Tu_n = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+\,, \quad u_{n|t=0} = u_{0,n}\,,$$

et on a de plus

$$\|u_n(t) - u_m(t)\| \leq \|u_{0,n} - u_{0,m}\| \quad \text{et} \quad \Big\|\frac{d}{dt}u_n(t) - \frac{d}{dt}u_m(t)\Big\| \leq \|Tu_{0,n} - Tu_{0,m}\|\,.$$

Comme $T$ est fermé on peut passer à la limite dans l'équation ce qui produit une solution $u \in C(\mathbb{R}^+; D(T))$.

3. L'unicité s'obtient très simplement grâce à la monotonie de $T$. Soient en effet $u$ et $v$ deux solutions associées à la même donnée initiale $u_0$, alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u - v\|_H^2 = -\big(T(u-v)|u-v\big)_H \leq 0$$

et donc $u - v$ est identiquement nulle.

$\star$