

# ASPECTS RIGoureux DE LA MÉCANIQUE STATISTIQUE À L'ÉQUILIBRE

Jérémie Bouttier et Guilhem Semerjian

Examen du 5 juin 2014

Le sujet est formé de deux problèmes indépendants. Vous rédigerez leurs solutions sur deux copies séparées. Chacun des problèmes sera noté sur 10 points.

Les notes de cours et de TD sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document.

## 1 Seuil de la percolation par arêtes sur le réseau triangulaire

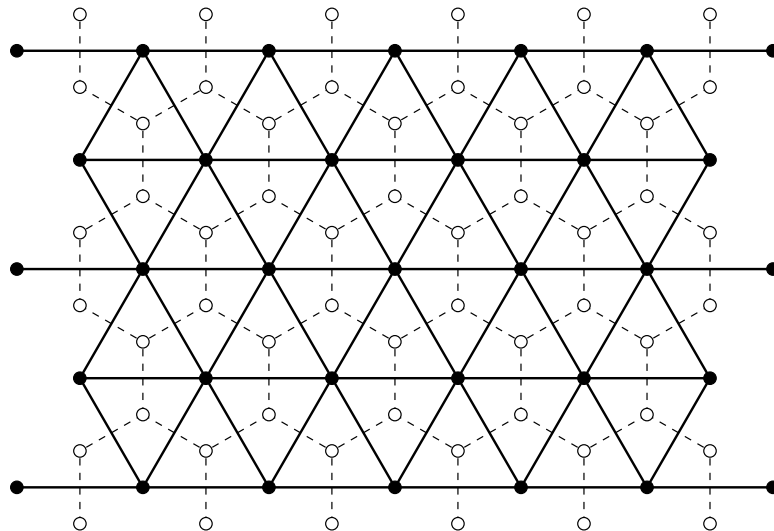


FIGURE 1 – Une portion du réseau triangulaire  $\mathbb{T}$  (sommets noirs, arêtes en traits pleins) et son dual  $\mathbb{H}$  (sommets blancs, arêtes en pointillés).

On considère le réseau triangulaire  $\mathbb{T}$ , dont une portion est illustrée sur la figure 1, et son dual le réseau hexagonal  $\mathbb{H}$ . On note  $p_c(\mathbb{T})$  et  $p_c(\mathbb{H})$  leurs seuils respectifs pour la percolation par arêtes, qu'il s'agit ici de déterminer.

### 1.1 Préliminaires

1. On note  $\theta_{\mathbb{T}}(p)$  la densité de l'amas infini pour la percolation par arêtes de paramètre  $p$  sur  $\mathbb{T}$  : rappeler sa définition. On définit de même  $\theta_{\mathbb{H}}(p)$ .
2. Comment  $p_c(\mathbb{T})$  peut-il être exprimé à partir de  $\theta_{\mathbb{T}}(p)$  ?
3. Donner, sans justification, la relation attendue par dualité entre  $p_c(\mathbb{T})$  et  $p_c(\mathbb{H})$ .

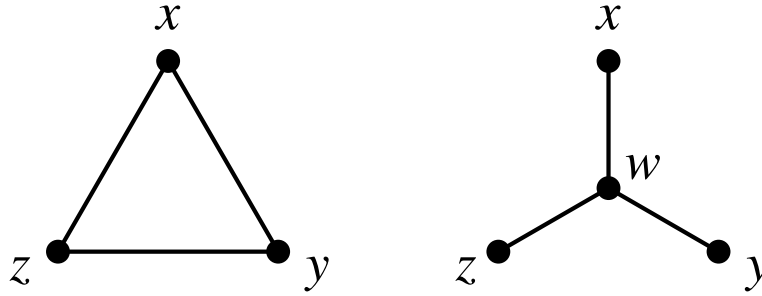


FIGURE 2 – Le triangle  $G_1$  et l'étoile  $G_2$ .

## 1.2 Transformation triangle-étoile

On considère les deux graphes à trois arêtes  $G_1$  et  $G_2$  de la figure 2. Pour  $i = 1, 2$ , on considère la percolation par arêtes de paramètre  $p_i$  sur  $G_i$ , et on introduit les événements suivants :

- $C_i(xyz)$  :  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont dans une même composante connexe du sous-graphe de  $G_i$  formé par les arêtes ouvertes,
- $C_i(x|y|z)$  :  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont dans trois composantes distinctes,
- $C_i(xy|z)$  :  $x$  et  $y$  sont dans une même composante connexe et  $z$  dans une autre,
- $C_i(yz|x)$ ,  $C_i(zx|y)$  sont définis de manière analogue.

On note  $P_i(xyz)$ ,  $P_i(xy|z)$  et  $P_i(xy|z) = P_i(yz|x) = P_i(zx|y)$  les probabilités respectives de ces événements.

1. Exprimer  $P_i(xyz)$ ,  $P_i(xy|z)$  et  $P_i(xy|z)$  en fonction de  $p_i$ , pour  $i = 1, 2$ .
2. Montrer qu'il existe une paire  $(p_1, p_2) \in ]0, 1[^2$  satisfaisant les conditions :

$$\begin{aligned} P_1(xyz) &= P_2(xyz) \\ P_1(x|y|z) &= P_2(x|y|z) \\ P_1(xy|z) &= P_2(xy|z) \end{aligned}$$

On suppose dorénavant que  $(p_1, p_2)$  est la solution de ce système (en admettant qu'elle est unique dans  $]0, 1[^2$ ).

3. Vérifier que  $p_1 = 2 \sin(\pi/18)$ .
4. Expliquer comment en déduire un «couplage préservant les connectivités», c'est-à-dire comment on peut tirer au hasard simultanément l'état ouvert/fermé des arêtes de  $G_1$  et de  $G_2$  de façon à ce que :
  - la loi de l'état des arêtes de  $G_1$  seul soit la percolation de paramètre  $p_1$ ,
  - la loi de l'état des arêtes de  $G_2$  seul soit la percolation de paramètre  $p_2$ ,
  - mais l'évènement  $C_1(xyz)$  est réalisé si et seulement si  $C_2(xyz)$  l'est, et de même pour  $C_1(x|y|z)$  et  $C_2(x|y|z)$ ,  $C_1(xy|z)$  et  $C_2(xy|z)$ , etc.
5. Expliquer comment on peut transformer  $\mathbb{T}$  en (un translaté de)  $\mathbb{H}$  par la transformation triangle-étoile.
6. Montrer que

$$\theta_{\mathbb{T}}(p_1) = \theta_{\mathbb{H}}(p_2).$$

Indication : soit  $O$  un sommet de  $\mathbb{T}$ ,  $\Gamma_1$  sa composante connexe pour la percolation de paramètre  $p_1$  sur  $\mathbb{T}$  et  $\Gamma_2$  sa composante connexe pour la percolation de paramètre  $p_2$  sur l'image de  $\mathbb{T}$  via la transformation triangle-étoile, montrer en utilisant le couplage de la question 4 qu'on peut trouver un couplage des deux percolations tel que, presque sûrement,  $\Gamma_1$  est infini si et seulement si  $\Gamma_2$  l'est.

7. En utilisant la relation de dualité, montrer que  $p_c(\mathbb{T}) = p_1$ .

## 1.3 Dualité

La démonstration de la relation de dualité peut se faire en adaptant la preuve du théorème de Harris-Kesten vue en cours. La plupart des propriétés de base (inégalités de corrélation, ergodicité, etc.) restent vraies pour la percolation par arêtes sur  $\mathbb{T}$  et  $\mathbb{H}$ .

1. Rappeler/adapter la notion de configuration de percolation duale.
2. On admet que l'unicité de la composante connexe infinie en phase sur-critique reste vraie pour  $\mathbb{T}$  et pour  $\mathbb{H}$  (ce n'est pas très difficile à voir en adaptant la preuve vue pour le réseau carré). En déduire que  $p_c(\mathbb{T}) + p_c(\mathbb{H}) \geq 1$ . (Indication : supposer par l'absurde qu'il existe  $p$  tel que  $p > p_c(\mathbb{T})$  et  $1 - p > p_c(\mathbb{H})$  et adapter l'argument de Zhang.)

3. On admet que la décroissance exponentielle en phase sous-critique reste vraie pour  $\mathbb{T}$  (resp.  $\mathbb{H}$ ) : autrement dit pour tout  $p < p_c(\mathbb{T})$  (resp.  $p < p_c(\mathbb{H})$ ) il existe  $\psi(p) > 0$  (resp.  $\tilde{\psi}(p) > 0$ ) tel que, si  $x, y$  sont deux sommets à distance euclidienne  $d$ , alors la probabilité que  $x$  et  $y$  soient dans une même composante connexe est au plus  $\exp(-\psi(p)d)$  (resp.  $\exp(-\tilde{\psi}(p)d)$ ). En considérant une portion «rectangulaire» du réseau triangulaire telle que celle illustrée sur la figure 1, montrer que  $p_c(\mathbb{T}) + p_c(\mathbb{H}) \leq 1$ . (Indication : supposer par l'absurde qu'il existe  $p$  tel que  $p < p_c(\mathbb{T})$  et  $1-p < p_c(\mathbb{H})$  et démontrer que, pour un rectangle assez grand, avec probabilité non-nulle il n'existe ni chemin ouvert reliant le bord gauche au bord droit, ni chemin dual ouvert reliant le bord haut au bord bas.)

## 2 Inégalités de corrélation pour le modèle d'Ising

### 2.1 Systèmes de taille finie

On considère un ensemble  $\Lambda$  fini de points, sur lesquels on place des spins d'Ising  $\sigma_x \in \{-1, +1\}$ . On note  $\underline{\sigma} = \{\sigma_x, x \in \Lambda\}$  la configuration globale du système, et l'on définit l'énergie d'une configuration selon

$$H(\underline{\sigma}) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{x,y \in \Lambda \\ x \neq y}} J_{x,y} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in \Lambda} h_x \sigma_x . \quad (1)$$

Pour un sous-ensemble  $X \subset \Lambda$  on notera  $\sigma_X = \prod_{x \in X} \sigma_x$  le produit des spins dans ce sous-ensemble de points.

Quand  $X$  est le singleton  $\{x\}$  on écrira indifféremment  $\sigma_{\{x\}} = \sigma_x$ .

On notera  $\langle \bullet \rangle$  les moyennes sur l'ensemble des configurations avec le poids de Boltzmann pour une température inverse  $\beta$ , i.e. pour une fonction  $f(\underline{\sigma})$  on écrit

$$\langle f(\underline{\sigma}) \rangle = \sum_{\underline{\sigma} \in \{-1,1\}^\Lambda} f(\underline{\sigma}) \frac{e^{-\beta H(\underline{\sigma})}}{Z}, \quad Z = \sum_{\underline{\sigma} \in \{-1,1\}^\Lambda} e^{-\beta H(\underline{\sigma})} . \quad (2)$$

1. Donner l'interprétation physique des constantes  $J_{x,y}$  et  $h_x$ . Dans toute la suite on supposera  $J_{x,y} \geq 0 \forall x,y$ ; interpréter cette condition.
2. On suppose  $h_x \geq 0 \forall x \in \Lambda$ . Montrer que pour tout sous-ensemble  $X \subset \Lambda$ ,

$$\langle \sigma_X \rangle \geq 0 . \quad (3)$$

*Indication* : on pourra développer en série les exponentielles dans le numérateur de  $\langle \sigma_X \rangle$ .

3. En utilisant le résultat de la question précédente (supposant donc  $h_x \geq 0 \forall x \in \Lambda$ ), montrer que pour toute paire  $X, Y$  de sous-ensembles ( $X \subset \Lambda, Y \subset \Lambda$ ) on a l'inégalité suivante, dite de Griffiths :

$$\langle \sigma_X \sigma_Y \rangle \geq \langle \sigma_X \rangle \langle \sigma_Y \rangle . \quad (4)$$

*Indication* : on pourra noter que

$$\langle \sigma_X \sigma_Y \rangle - \langle \sigma_X \rangle \langle \sigma_Y \rangle = \frac{1}{Z^2} \sum_{\underline{\sigma}, \underline{\sigma}'} (\sigma_X \sigma_Y - \sigma_X \sigma_Y') e^{-\beta(H(\underline{\sigma}) + H(\underline{\sigma}'))} \quad (5)$$

et faire un changement de variable en introduisant  $\tau_x = \sigma_x \sigma_x'$ .

4. Commenter les similitudes et les différences entre l'inégalité de Griffiths (4) et celle de Harris vue dans le cours sur la percolation.
5. On considère deux choix  $\{h_x^{(1)}, x \in \Lambda\}$  et  $\{h_x^{(2)}, x \in \Lambda\}$  des paramètres  $h_x$ , et l'on note  $\langle \bullet \rangle_1$  et  $\langle \bullet \rangle_2$  les moyennes avec ces deux choix (les  $J_{x,y}$  étant les mêmes dans les deux cas). Montrer (en utilisant l'inégalité (4)) que

$$0 \leq h_x^{(1)} \leq h_x^{(2)} \quad \forall x \in \Lambda \quad \Rightarrow \quad \langle \sigma_X \rangle_1 \leq \langle \sigma_X \rangle_2 , \quad (6)$$

quelque soit le choix de  $X \subset \Lambda$ .

6. Par passage à la limite ce résultat est vrai si certains des  $h_x$  valent  $+\infty$ ; interpréter cette situation.
7. Comment varie  $\langle \sigma_X \rangle$  avec  $\beta$ , pour une valeur donnée des  $J_{x,y} \geq 0$  et des  $h_x \geq 0$ ?

On notera  $\mathcal{C}_X^\uparrow$  les fonctions dépendants des variables dans un sous-ensemble  $X \subset \Lambda$ , croissantes pour l'ordre partiel, i.e.  $f \in \mathcal{C}_X^\uparrow$  signifie

$$\sigma_x \leq \sigma_x' \quad \forall x \in X \quad \Rightarrow \quad f(\{\sigma_x, x \in X\}) \leq f(\{\sigma_x', x \in X\}) . \quad (7)$$

On admettra dans la suite l'inégalité suivante, dite FKG (pour Fortuyn, Kasteleyn, Ginibre),

$$f, g \in \mathcal{C}_X^\uparrow \quad \Rightarrow \quad \langle fg \rangle \geq \langle f \rangle \langle g \rangle , \quad (8)$$

valable pour les modèles d'Ising avec  $J_{x,y} \geq 0$ , et quelque soit le signe des  $h_x$ . On admettra aussi le corollaire suivant (qui s'obtient à partir de (8) de la même façon que (6) s'obtient à partir de (4)) :

$$f \in \mathcal{C}_X^\uparrow \quad \text{et} \quad h_x^{(1)} \leq h_x^{(2)} \quad \forall x \in \Lambda \quad \Rightarrow \quad \langle f \rangle_1 \leq \langle f \rangle_2 . \quad (9)$$

8. A quelle condition  $\sigma_X$  est-elle une fonction croissante dans le sens défini ci-dessus?

## 2.2 Applications à la théorie des mesures de Gibbs

On se place maintenant dans le cadre du cours sur les mesures de Gibbs, et l'on considère des mesures de probabilité sur  $\Sigma = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$ , les configurations d'un système infini en dimension  $d$ . L'interaction sera celle d'Ising avec un couplage  $J \geq 0$  entre plus proches voisins et en champ extérieur nul. Rappelons quelques notations et résultats du cours que vous pourrez admettre dans vos réponses :

- Pour une configuration  $\underline{\tau} \in \Sigma$  et un volume fini  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$  on note  $\mu_{\Lambda}^{\underline{\tau}}$  la mesure dans  $\Lambda$  avec condition aux bords  $\underline{\tau}$ , c'est-à-dire

$$\mu_{\Lambda}^{\underline{\tau}}(\underline{\sigma}) = \begin{cases} \frac{e^{-\beta H_{\Lambda}^{\underline{\tau}}(\underline{\sigma})}}{Z_{\Lambda}^{\underline{\tau}}} & \text{si } \sigma_x = \tau_x \ \forall x \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (10)$$

avec l'Hamiltonien dans  $\Lambda$  pour la condition aux bords  $\underline{\tau}$  et la fonction de partition associée

$$H_{\Lambda}^{\underline{\tau}}(\underline{\sigma}) = -J \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x \in \Lambda, y \in \Lambda}} \sigma_x \sigma_y - J \sum_{\substack{\langle x, y \rangle \\ x \in \Lambda, y \notin \Lambda}} \sigma_x \tau_y, \quad Z_{\Lambda}^{\underline{\tau}} = \sum_{\underline{\sigma}_{\Lambda}} e^{-\beta H_{\Lambda}^{\underline{\tau}}(\underline{\sigma})}, \quad (11)$$

où  $\langle x, y \rangle$  dénote les liens entre plus proches voisins sur le réseau.

- On notera  $\mu_{\Lambda}^+$  cette mesure quand la condition aux bords  $\underline{\tau}$  est  $\tau_x = +1 \ \forall x$ .
- Par définition de la topologie employée sur l'ensemble  $\mathcal{M}$  des mesures de probabilité sur  $\Sigma$ , une suite  $\mu_n \in \mathcal{M}$  converge vers  $\mu \in \mathcal{M}$  si et seulement si  $\mu_n(f)$  converge vers  $\mu(f)$  pour toute fonction  $f$  de  $\Sigma$  dans  $\mathbb{R}$  qui dépend d'un nombre fini de variables.
- On note  $\Lambda_n \nearrow \mathbb{Z}^d$  si  $\Lambda_n$  est une suite de parties finies de  $\mathbb{Z}^d$ , qui est croissante pour l'inclusion ( $\Lambda_n \subset \Lambda_{n+1}$ ), et qui envahit  $\mathbb{Z}^d$  (i.e.  $\forall x \in \mathbb{Z}^d \exists N$  tel que  $\forall n \geq N$  on a  $x \in \Lambda_n$ ).
- Par des arguments généraux de compacité on avait vu que si  $\Lambda_n \nearrow \mathbb{Z}^d$ , de toute suite  $\mu_{\Lambda_n}^{\underline{\tau}}$  on pouvait extraire une sous-suite convergente vers une mesure de Gibbs (pour toute condition aux bords et tout type d'interactions) .

On va voir que les inégalités de corrélation permettent d'obtenir des résultats plus forts dans le cadre du modèle d'Ising.

- (a) Montrer en utilisant le corollaire (6) de l'inégalité de Griffiths que si  $\Lambda' \subset \Lambda$ ,

$$\mu_{\Lambda}^+(\sigma_X) \leq \mu_{\Lambda'}^+(\sigma_X). \quad (12)$$

pour toute partie finie  $X$  de  $\mathbb{Z}^d$ .

- En déduire que si  $\Lambda_n$  est une suite arbitraire avec  $\Lambda_n \nearrow \mathbb{Z}^d$ , la suite  $\mu_{\Lambda_n}^+$  converge vers une mesure de Gibbs (sans avoir besoin d'extraire une sous-suite).
- Montrer que si  $\Lambda_n$  et  $\Lambda'_n$  sont deux suites de parties finies de  $\mathbb{Z}^d$  avec  $\Lambda_n \nearrow \mathbb{Z}^d$  et  $\Lambda'_n \nearrow \mathbb{Z}^d$ , alors  $\mu_{\Lambda_n}^+$  et  $\mu_{\Lambda'_n}^+$  convergent vers la même limite.

On notera  $\mu^+$  la limite des  $\mu_{\Lambda_n}^+$  quand  $\Lambda_n \nearrow \mathbb{Z}^d$ , dont on vient de montrer l'existence et l'indépendance par rapport au choix de  $\Lambda_n$ ; cette dernière propriété implique que  $\mu^+$  est invariante par translation (on ne demande pas de preuve de cette affirmation). Avec le même type de raisonnement on montrerait que si la condition aux bords est  $\tau_x = -1 \ \forall x$  les suites  $\mu_{\Lambda_n}^-$  convergent vers une mesure  $\mu^-$  invariante par translation, indépendamment de la suite  $\Lambda_n$ .

- (a) On note  $m_{\text{sp}}(\beta) = \mu^+(\sigma_0)$  l'aimantation moyenne d'un spin sous la mesure  $\mu^+$  (en explicitant la dépendance en  $\beta$ ). Montrer que  $m_{\text{sp}}(\beta)$  est une fonction croissante de  $\beta$ .
  - Que vaut  $\mu^-(\sigma_0)$ ?
  - Rappeler brièvement les résultats du cours obtenus par les méthodes de Dobrushin et de Peierls (on supposera  $d \geq 2$ ), et leurs conséquences sur la fonction  $m_{\text{sp}}(\beta)$ .

11. On va maintenant montrer, à partir du corollaire (9) de l'inégalité FKG, que  $\mu^+$  est une mesure extrémale.

- (a) Montrer que si  $\Lambda$  est un volume fini de  $\mathbb{Z}^d$ ,  $X \subset \Lambda$ ,  $f \in \mathcal{C}_X^\uparrow$  et  $\underline{\tau}, \underline{\tau}'$  sont deux configurations avec  $\tau_x \leq \tau'_x \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d$ , alors

$$\mu_{\Lambda}^{\underline{\tau}}(f) \leq \mu_{\Lambda}^{\underline{\tau}'}(f) . \quad (13)$$

- (b) Soit  $\nu$  une mesure de Gibbs pour l'interaction d'Ising, et  $X$  une partie finie de  $\mathbb{Z}^d$ . Montrer que pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_X^\uparrow$ ,

$$\nu(f) \leq \mu^+(f) . \quad (14)$$

- (c) En déduire que  $\mu^+$  est extrémale au sein des mesures de Gibbs, i.e. que l'on ne peut écrire  $\mu^+ = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$  avec  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $\mu_1 \neq \mu_2$  deux mesures de Gibbs distinctes.

De la même façon on montre que  $\mu^-$  est extrémale et que pour n'importe quelle mesure de Gibbs  $\nu$  on a la généralisation naturelle de (14) pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_X^\uparrow$  :

$$\mu^-(f) \leq \nu(f) \leq \mu^+(f) . \quad (15)$$

12. On va finalement montrer que  $m_{\text{sp}}(\beta) = 0$  est une condition suffisante pour assurer l'unicité des mesures de Gibbs (la réciproque étant évidemment vraie).

- (a) On note  $\rho_x = \frac{1+\sigma_x}{2}$  et  $\rho_X = \prod_{x \in X} \rho_x$  pour une partie finie  $X$  de  $\mathbb{Z}^d$ . Montrer que la fonction

$$f = \sum_{x \in X} \rho_x - \rho_X \quad (16)$$

est croissante.

- (b) En déduire, en utilisant (15), un encadrement de  $\mu^+(\rho_X) - \mu^-(\rho_X)$ .  
(c) Conclure que si  $m_{\text{sp}}(\beta) = 0$  alors il n'existe qu'une mesure de Gibbs.