Analyse des EDP

Examen Janvier 2016

Problème 1 : Factorisation elliptique et régularité parabolique

Exercice 1 : Factorisation d'une équation elliptique

Fixons $n \geqslant 1$. Dans cet exercice on considère deux variables, $x \in \mathbb{R}^n$ et $z \in [0,1]$, qui jouent des rôles bien distincts. Par comparaison avec l'étude des équations d'évolution hyperboliques, disons que la variable z joue le rôle d'une variable de temps (c'est-à-dire le rôle d'un paramètre). Pour éviter les confusions, nous noterons, dans cet exercice uniquement, ∇_x le gradient par rapport à x et $\Delta_x u = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2 u$.

Considérons une fonction $\eta = \eta(x)$, C^∞ et bornée ainsi que toutes ses dérivées sur $\mathbb{R}^n$. On note

$$\alpha = \frac{1}{1+|\nabla_x \eta|^2}, \quad \beta = -\frac{2}{1+|\nabla_x \eta|^2}\nabla_x \eta, \quad \gamma = \frac{\Delta_x \eta}{1+|\nabla_x \eta|^2},$$

et on considère l'opérateur

$$P(\eta) = \partial_z^2 + \alpha \Delta_x + \beta \cdot \nabla_x \partial_z - \gamma \partial_z.$$

Le but de cet exercice est de factoriser $P(\eta)$. Par exemple, si $\eta = 0$, on a

$$P(0) = \partial_z^2 + \Delta_x = (\partial_z - |D_x|)(\partial_z + |D_x|),$$

où $|D_x|$ est le multiplicateur de Fourier de symbole $|\xi|$.

Question préliminaire. Pour $m \in \mathbb{R}$, on note $\dot{S}^m(\mathbb{R}^n)$ la classe des fonctions $a = a(x,\xi)$, qui sont C^∞ sur $\mathbb{R}^n_x \times (\mathbb{R}^n_\xi \setminus \{0\})$, telles que pour tout multi-indices α, β dans $\mathbb{N}^n$ on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{|\xi|\geqslant 1} \left\{ (1+|\xi|)^{-m+|\beta|} \left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi) \right| \right\} < +\infty.$$

La seule différence par rapport à la classe $S^m(\mathbb{R}^n)$ étudiée en cours est que le sup en ξ est pris sur l'ensemble $\{|\xi| \geqslant 1\}$ au lieu de $\mathbb{R}^n$. Introduisons une fonction $\chi = \chi(\xi)$, C^∞ et telle que

$$\chi(\xi) = 1 \quad \text{si} \quad |\xi| \geqslant 2, \qquad \chi(\xi) = 0 \quad \text{si} \quad |\xi| \leq 1.$$

a) Soit $a \in \dot{S}^m(\mathbb{R}^n)$, montrer que $\chi a = \chi(\xi)a(x,\xi)$ appartient à la classe $S^m(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $(\chi^2 - \chi)a$ appartient à $S^{-k}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $k \geqslant 0$.

On note $\dot{\mathrm{Op}}(a)$ l'opérateur défini par

$$\dot{\mathrm{Op}}(a) = \mathrm{Op}(a\chi).$$

b) Montrer que si $a \in \dot{S}^m(\mathbb{R}^n)$ et $b \in \dot{S}^{m'}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\dot{\mathrm{Op}}(a)\dot{\mathrm{Op}}(b) = \dot{\mathrm{Op}}(ab) + L_{-1},$$

où L_{-1} est d'ordre $m+m'-1$ (rappel : on dit qu'un opérateur est d'ordre $m \in \mathbb{R}$ s'il est borné de $H^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$). De même, montrer que

$$\dot{\mathrm{Op}}(a)\dot{\mathrm{Op}}(b) = \dot{\mathrm{Op}}\left(ab + \frac{1}{i}(\partial_\xi a)(\partial_x b)\right) + L_{-2}$$

où L_{-2} est d'ordre $m+m'-2$.

1. Considérons deux symboles $a = a(x,\xi)$, $A = A(x,\xi)$ vérifiant

$$\begin{aligned} a &= a^{(1)} + a^{(0)} \quad \text{où} \quad a^{(1)} \in \dot{S}^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad a^{(0)} \in \dot{S}^0(\mathbb{R}^n), \\ A &= A^{(1)} + A^{(0)} \quad \text{où} \quad A^{(1)} \in \dot{S}^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad A^{(0)} \in \dot{S}^0(\mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

et tels que

$$\begin{aligned} & a^{(1)}A^{(1)} + \frac{1}{i}\partial_\xi a^{(1)} \cdot \partial_x A^{(1)} + a^{(1)}A^{(0)} + a^{(0)}A^{(1)} = -\alpha\,|\xi|^2\,, \\ & a + A = -i\beta\cdot\xi + \gamma. \end{aligned} \tag{1}$$

Posons

$$\begin{aligned} R_0 &= \alpha\Delta_x - \dot{\mathrm{Op}}(a)\dot{\mathrm{Op}}(A), \\ R_1 &= \dot{\mathrm{Op}}(a) + \dot{\mathrm{Op}}(A) + \beta\cdot\nabla_x - \gamma. \end{aligned}$$

Montrer que R_0 est d'ordre 0.

Montrer que R_1 est régularisant (d'ordre $-m$ pour tout $m \geqslant 0$).

2. Résoudre le système suivant par un calcul :

$$\begin{cases} a^{(1)}(x,\xi)A^{(1)}(x,\xi) = -\alpha(x)\,|\xi|^2\,, \\ a^{(1)}(x,\xi) + A^{(1)}(x,\xi) = -i\beta(x)\cdot\xi. \end{cases}$$

Vérifier que l'on définit ainsi deux symboles qui appartiennent à $\dot{S}^1(\mathbb{R}^n)$.

3. Montrer qu'il existe deux symboles $a^{(0)}, A^{(0)}$ appartenant à $\dot{S}^0(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$a^{(0)}A^{(1)} + a^{(1)}A^{(0)} + \frac{1}{i}\partial_\xi a^{(1)} \cdot \partial_x A^{(1)} = 0, \qquad a^{(0)} + A^{(0)} = \gamma.$$

4. En combinant les résultats des questions précédentes, on obtient la proposition suivante : Il existe deux symboles $a = a(x,\xi)$, $A = A(x,\xi)$ appartenant à $\dot{S}^1(\mathbb{R}^n)$, tels que

$$\partial_z^2 + \alpha\Delta + \beta\cdot\nabla\partial_z - \gamma\partial_z = (\partial_z - \dot{\mathrm{Op}}(a))(\partial_z - \dot{\mathrm{Op}}(A)) + R_0 + R_1\partial_z, \tag{2}$$

où R_0 est un opérateur d'ordre 0 et R_1 est régularisant.

Etant donné $k \in \mathbb{N}$, expliquer comment obtenir une factorisation similaire avec un reste R_0 d'ordre $-k$.

Exercice 2 : Régularité parabolique

5. Le but de ce problème est d'étudier une équation d'évolution **parabolique**, dont l'exemple le plus simple est l'EDP

$$\partial_t w + |D_x|\, w = 0,$$

avec $t \in [0, +\infty[$, $x \in \mathbf{R}^n$. Calculer la solution à l'aide de la transformée de Fourier puis montrer que

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \|w(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \left\| \, |D_x|^{\frac{1}{2}}\, w(s) \right\|_{L^2}^2 ds \leq K \, \|w(0)\|_{L^2}^2 . \tag{3}$$

Le but des questions suivantes est de montrer un effet régularisant pour une équation parabolique pseudo-différentielle. On souhaite démontrer la proposition suivante.

Proposition. *Fixons $T > 0$ et considérons un symbole $a \in S^1(\mathbb{R}^n)$ à valeurs réelles vérifiant*

$$\exists c > 0/ \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad a(x,\xi) \geq c\langle \xi \rangle = c(1 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Supposons que $w \in C^1([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$ est solution du problème de Cauchy

$$\partial_t w + \mathrm{Op}(a) w = f, \quad w(0) = 0,$$

où $f \in C^0([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $w(T) = w|_{t=T}$ vérifie

$$w(T) \in H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^n).$$

6. Pour $t \in [0,T]$, introduisons le symbole

$$e_t(x,\xi) := \exp\left((t - T) a(x,\xi) \right),$$

de sorte que $e_T = 1$ et $\partial_t(e_t) = e_t a$. Considérons $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $\beta \in \mathbb{N}^n$ avec $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ (pour simplifier). Montrer que, pour tout $m \geqslant 0$, il existe des constantes $C_{m\alpha\beta}$ telles que

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta e_t(x,\xi) \right| \leq \frac{C_{m\alpha\beta}}{(T-t)^m} (1 + |\xi|)^{-m-|\beta|},$$

pour tout $t \in [0,T]$, tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^n$.

7. On admet que le résultat précédent est vrai pour tout multi-indices α, β. En déduire que, pour tout $\varepsilon \in [0,1]$, il existe une constante K_ε telle que, pour tout $t \in [0,T]$ et tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ on a les inégalités

$$\|\mathrm{Op}(e_t) u\|_{H^{1-\varepsilon}} \leq \frac{K_\varepsilon}{(T-t)^{1-\varepsilon}} \|u\|_{L^2},$$

$$\left\| \big(\mathrm{Op}(\partial_t e_t) - \mathrm{Op}(e_t) \, \mathrm{Op}(a) \big) u \right\|_{H^{1-\varepsilon}} \leq \frac{K_\varepsilon}{(T-t)^{1-\varepsilon}} \|u\|_{L^2}.$$

8. Vérifier que

$$w(T) = \int_0^T \big(\mathrm{Op}(\partial_t e_t) - \mathrm{Op}(e_t) \, \mathrm{Op}(a) \big) w(t) \, dt + \int_0^T \mathrm{Op}(e_t) f(t) \, dt.$$

En déduire que $w(T) \in H^{1-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, ce qui conclura la démonstration.

Problème 2 : étude d'une équation non linéaire

Considérons une équation elliptique **non linéaire** de la forme

$$\Delta u + \Gamma\big(\,|\nabla u|^2\,\big) = 0 \qquad \text{dans} \quad B,$$

où $B \subset \mathbb{R}^n$ est la boule de centre 0 et de rayon 1 et $\Gamma \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ vérifiant

$$\exists A > 0/\ \forall s \geqslant 0, \quad 0 \le \Gamma(s) \le As.$$

On suppose que $u \in H^1(B)$ est <u>bornée et continue</u> et qu'elle vérifie l'équation au sens faible :

$$(4) \qquad \int_B \Big(\nabla u \cdot \nabla \varphi - \Gamma(|\nabla u|^2)\varphi\Big)\, dx = 0 \qquad \text{pour tout} \quad \forall \varphi \in H^1_0(B) \cap L^\infty(B).$$

Exercice 3 : Inégalité de Caccioppoli (soigner la rédaction)

1. Soit $R \in]0,1[$ et $B_R := B(0,R) \subset B$. Notons u_R la moyenne de u sur la boule B_R et considérons une fonction $\eta \in C^\infty_0(B_R)$. En utilisant (4) avec $\varphi = (u-u_R)\eta^2$, montrer que

$$\frac{3}{4}\int_{B_R} |\nabla u|^2\,\eta^2\,dx \le 4\int_{B_R}(u-u_R)^2\,|\nabla \eta|^2\,dx + A\sup_{B_R}|u-u_R|\int_{B_R}|\nabla u|^2\,\eta^2\,dx.$$

(On pourra montrer cette inégalité avec d'autres constantes que 3/4 et 4.)

2. En déduire qu'il existe une constante $R_0 \in]0,1[$ dépendant du module de continuité de u telle que, si $0 < r < R \le R_0$, alors

$$\int_{B_r} |\nabla u|^2\,dx \le \frac{32}{(R-r)^2}\int_{B_R\setminus B_r}|u-u_R|^2\,dx.$$

Indication : on choisira bien la fonction η, comme dans le cours.

Exercice 4 : Inégalité d'Harnack

On suppose de plus que $u \in H^2(B)$ et que $u \geqslant 0$. On note $M = \sup_B u$ qui existe par hypothèse.

3. Introduisons la fonction v définie par $v(x) = \frac{1}{A}(e^{Au(x)} - 1)$. Justifier que $v \in H^1(B)$ puis calculer ∇v et Δv. En déduire que v est une sous-solution faible positive de $-\Delta v \le 0$.

4. Considérons une sous-solution faible positive $w \in H^1(B)$ de $-\Delta w \le 0$. Citer un résultat important du cours qui implique que $\|w\|_{L^\infty(B_{1/2})} \le C\,\|w\|_{L^2(B)}$.

En utilisant un argument de dilatation (un changement de variable homothétique en x), en déduire qu'il existe une constante C_1 telle que, pour tout $r \in]0,1]$, on a

$$\sup_{B_{r/2}} v \le C_1\left(\frac{1}{r^n}\int_{B_r}|v(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

5. En déduire qu'il existe une constante C_2, ne dépendant que C_1, A et M, telle que

$$\sup_{B_{r/2}} u \leq C_2 \left(\frac{1}{r^n} \int_{B_r} |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

6. Admettons l'inégalité d'Harnack suivante pour les fonctions sous-harmoniques : si $v \in H^1(B)$ vérifie $v \geqslant 0$ et

$$\forall \varphi \in H^1_0(B) \cap L^\infty(B),\ \varphi \geqslant 0, \quad \int_B \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx \geqslant 0,$$

alors il existe $c > 0$ telle que

$$\forall r \in]0,1[, \quad \inf_{B_{r/2}} v \geqslant c \left(\frac{1}{r^n} \int_{B_r} |v(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En étudiant la fonction $w = 1 - e^{-u}$, montrer qu'il existe une constante C_3, dépendant de M, telle que

$$\left(\frac{1}{r^n} \int_{B_r} |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_3 \inf_{B_{r/2}} u.$$

On a donc montré une inégalité d'Harnack : il existe une constante $K = K(M) > 0$ telle que,

$$\forall r \in]0,1[, \quad \sup_{B_{r/2}} u \leq K \inf_{B_{r/2}} u.$$

Problème court : relation entre L^∞ et C^0_*

1. Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$ et toute fonction f appartenant à l'espace de Hölder $C^{0,\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, on ait

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\varepsilon} \|f\|_{C^0_*} \log \left(e + \frac{\|f\|_{C^{0,\varepsilon}}}{\|f\|_{C^0_*}} \right).$$

Indication : utiliser la décomposition de Littlewood-Paley et, pour $N \in \mathbb{N}$ à choisir, écrire que

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \sum_{q \leq N-1} \|\Delta_q f\|_{L^\infty} + \sum_{q \geqslant N} \|\Delta_q f\|_{L^\infty}.$$

2. Considérons la distribution

$$u = \sum_{q=0}^{\infty} e^{i 2^q x}.$$

Montrer que $u \in C^0_* \setminus L^\infty$.

Corrigé de l'examen

Exercice 1

Question préliminaire

a) La fonction χa est $\mathcal{C}^\infty$, puisque a est $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage du support de χ. De plus, pour tous α, β, puisque $\chi(\xi) = 0$ si $|\xi| < 1$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{x,\xi\in\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{-m+|\beta|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (\chi a)(x,\xi)| \\
&\leq \sum_{b\leq\beta} C_b \sup_{x,\xi\in\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{-m+|\beta|} |\partial_\xi^b \chi(\xi)| |\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta-b} a(x,\xi)| \\
&\leq \sum_{0<b\leq\beta} C_b (1+2)^b ||\partial_\xi^b \chi||_{L^\infty} \sup_{x,\xi\in\mathbb{R}^n, |\xi|\geq 1} (1+|\xi|)^{-m+|\beta|-|b|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^{\beta-b} a(x,\xi)| \\
&\quad + C_0 ||\chi||_{L^\infty} \sup_{x,\xi\in\mathbb{R}^n, |\xi|\geq 1} (1+|\xi|)^{-m+|\beta|} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

Donc $\chi a \in S^m(\mathbb{R}^n)$.
Le symbole $(\chi^2 - \chi)a$ est à support compact en ξ. Il est donc dans $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ (exercice 0 du TD 4).
b) D'après un théorème de calcul symbolique, si $a \in S^m, b \in S^{m'}$,

$$\begin{aligned}
\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a)\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(b) &= \mathrm{Op}(\chi a)\,\mathrm{Op}(\chi b) \\
&= \mathrm{Op}(\chi^2 ab) + l_{-1},
\end{aligned}$$

avec $l_{-1} \in \mathrm{Op}(S^{m+m'-1})$.
De plus, si on note $r = \chi(\chi-1)ab$, on a $\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a)\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(b) = \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(ab) + \mathrm{Op}(r) + l_{-1}$. C'est bien de la forme voulue : $\mathrm{Op}(r) + l_{-1}$ est d'ordre $m + m' - 1$, puisque $l_{-1} \in \mathrm{Op}(S^{m+m'-1})$ et, par a), $\mathrm{Op}(r) \in \mathrm{Op}(S^{-\infty})$.
De même à l'ordre suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a)\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(b) &= \mathrm{Op}(\chi a)\,\mathrm{Op}(\chi b) \\
&= \mathrm{Op}\left(\chi^2 ab + \frac{1}{i}\partial_\xi(\chi a)\partial_x(\chi b)\right) + l_{-2} \\
&= \mathrm{Op}\left(\chi^2 ab + \chi^2 \frac{1}{i}(\partial_\xi a)(\partial_x b)\right) + \mathrm{Op}\left(\frac{1}{i}\chi a(\partial_\xi \chi)(\partial_x b)\right) + l_{-2} \\
&= \mathrm{Op}\left(\chi ab + \chi\frac{1}{i}(\partial_\xi a)(\partial_x b)\right) + \mathrm{Op}\left(\chi(\chi-1)\left(ab + \frac{1}{i}(\partial_\xi a)(\partial_x b)\right)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \operatorname{Op}\left(\frac{1}{i}\chi a(\partial_\xi \chi)(\partial_x b)\right) + l_{-2} \\
= \dot{\operatorname{O}}\mathrm{p}&\left(ab + \frac{1}{i}(\partial_\xi a)(\partial_x b)\right) + \operatorname{Op}\left(\chi(\chi-1)\left(ab + \frac{1}{i}(\partial_\xi a)(\partial_x b)\right)\right) \\
&+ \operatorname{Op}\left(\frac{1}{i}\chi a(\partial_\xi \chi)(\partial_x b)\right) + l_{-2}.
\end{aligned}
$$

Les opérateurs $\operatorname{Op}\left(\chi(\chi-1)\left(ab + \frac{1}{i}(\partial_\xi a)(\partial_x b)\right)\right)$ et $\operatorname{Op}\left(\frac{1}{i}\chi a(\partial_\xi \chi)(\partial_x b)\right)$ sont dans $\operatorname{Op}(S^{-\infty})$ (par a) pour le premier, par compacité en ξ du support du symbole pour le deuxième). Ainsi,

$$
\operatorname{Op}\left(\chi(\chi-1)\left(ab + \frac{1}{i}(\partial_\xi a)(\partial_x b)\right)\right) + \operatorname{Op}\left(\frac{1}{i}\chi a(\partial_\xi \chi)(\partial_x b)\right) + l_{-2} \in \operatorname{Op}(S^{m+m'-2}),
$$

ce qui implique le résultat.

1. On a $R_1 = \dot{\operatorname{O}}\mathrm{p}(a + A) + \beta.\nabla_x - \gamma = \dot{\operatorname{O}}\mathrm{p}(-i\beta.\xi + \gamma) + \operatorname{Op}(i\beta.\xi - \gamma) = \operatorname{Op}((\chi - 1)(i\beta.\xi - \gamma))$. Le symbole $(\chi - 1)(i\beta.\xi - \gamma)$ est à support compact en ξ. Il appartient donc à $S^{-\infty}$ et R_1 est régularisant.
D'après la partie b) de la question préliminaire, puisque a et A sont dans $\dot{S}_1$,

$$
\dot{\operatorname{O}}\mathrm{p}(a)\dot{\operatorname{O}}\mathrm{p}(A) - \dot{\operatorname{O}}\mathrm{p}(aA + \frac{1}{i}\partial_\xi a \partial_x A) \in \operatorname{Op}(S^0). \tag{1}
$$

De plus,

$$
\begin{aligned}
aA + \frac{1}{i}(\partial_\xi a)(\partial_x A) &= a^{(1)}A^{(1)} + a^{(0)}A^{(1)} + a^{(1)}A^{(0)} + a^{(0)}A^{(0)} \\
&\quad + \frac{1}{i}\left(\partial_\xi a^{(1)}\partial_x A^{(1)} + \partial_\xi a^{(0)}\partial_x A^{(1)} + \partial_\xi a^{(1)}\partial_x A^{(0)} + \partial_\xi a^{(0)}\partial_x A^{(0)}\right),
\end{aligned}
$$

donc

$$
aA + \frac{1}{i}(\partial_\xi a)(\partial_x A) = a^{(1)}A^{(1)} + a^{(0)}A^{(1)} + a^{(1)}A^{(0)} + \frac{1}{i}\partial_\xi a^{(1)}\partial_x A^{(1)} + r
$$

avec $r \in \operatorname{Op}(S^0)$.
D'après les propriétés de $A^{(1)}, A^{(0)}, a^{(1)}, a^{(0)}$,

$$
aA + \frac{1}{i}(\partial_\xi a)(\partial_x A) = -\alpha|\xi|^2 + r
$$

ce qui fait que $\operatorname{Op}(aA + \frac{1}{i}\partial_\xi a \partial_x A) - \alpha\Delta_x = \operatorname{Op}(-\alpha|\xi|^2) + \alpha \operatorname{Op}(|\xi|^2) + \operatorname{Op}(r) \in \operatorname{Op}(S^0)$. En combinant avec (1), on obtient que $\operatorname{Op}(a)\operatorname{Op}(A) - \alpha\Delta_x \in \operatorname{Op}(S^0)$.

2. Posons

$$
a^{(1)} = \frac{1}{2}\left(-i\beta.\xi + 2\frac{\sqrt{|\xi|^2(1 + |\nabla_x\eta|^2) - |\nabla_x\eta.\xi|^2}}{1 + |\nabla_x\eta|^2}\right),
$$

$$A^{(1)} = \frac{1}{2}\left(-i\beta.\xi - 2\frac{\sqrt{|\xi|^2(1+|\nabla_x\eta|^2) - |\nabla_x\eta.\xi|^2}}{1+|\nabla_x\eta|^2}\right).$$

On a bien $a^{(1)} + A^{(1)} = -i\beta.\xi$ et $a^{[1]}A^{(1)} = -\alpha|\xi|^2$.
On a, par Cauchy-Schwartz $|\xi|^2(1+|\nabla_x\eta|^2) - |\nabla_x\eta.\xi|^2 \geq |\xi|^2$, donc $a^{(1)}$ et $A^{(1)}$ sont bien définis et $\mathcal{C}^\infty$ en-dehors de l'ensemble $\{\xi = 0\}$. Cela montre de plus que $|\xi|^2(1+|\nabla_x\eta|^2) - |\nabla_x\eta.\xi|^2$, qui est dans S^2, satisfait une condition d'ellipticité. Sa racine carrée est donc dans $\dot{S}^1$ (voir le TD 7).
3. Posons

$$\begin{aligned}
A^{(0)} &= \frac{1}{A^{(1)} - a^{(1)}}\left(\frac{1}{i}\partial_\xi a^{(1)}.\partial_x A^{(1)} + \gamma A^{(1)}\right), \\
a^{(0)} &= -\frac{1}{A^{(1)} - a^{(1)}}\left(\frac{1}{i}\partial_\xi a^{(1)}.\partial_x A^{(1)} + \gamma a^{(1)}\right).
\end{aligned}$$

Les équations voulues sont bien vérifiées. De plus, d'après les expressions de la question précédente, $A^{(1)} - a^{(1)}$ ne s'annule pas si $\xi \neq 0$ et vérifie une condition d'ellipticité. Les symboles $A^{(0)}$ et $a^{(0)}$ sont donc bien définis et appartiennent à $\dot{S}^0$.
4. On procède par récurrence sur k. Supposons qu'on a fixé $k \geq 1$ et qu'on dispose d'une factorisation

$$\partial_z^2 + a\Delta_x + \beta.\nabla_x\partial_z - \gamma\partial_z = (\partial_z - \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a))(\partial_z - \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A)) + R_{k-1} + T\partial_z$$

avec $R_{k-1} \in \mathrm{Op}(S^{-(k-1)})$ et T régularisant.
On va définir $a' = a + a_k$ et $A' = A + A_k$ avec $a_k, A_k \in S^{-k}$ bien choisis. On aura alors

$$\begin{aligned}
&\partial_z^2 + a\Delta_x + \beta.\nabla_x\partial_z - \gamma\partial_z \\
&= (\partial_z - \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a + a_k) + \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a_k))(\partial_z - \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A + A_k) + \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A_k)) + R_{k-1} + T\partial_z \\
&= (\partial_z - \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a'))(\partial_z - \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A')) \\
&\quad + \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a_k)(\partial_z - \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A + A_k)) + \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A_k)(\partial_z - \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a + a_k)) \\
&\quad + \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a_k)\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A_k) + R_{k-1} + T\partial_z \\
&= (\partial_z - \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a'))(\partial_z - \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A')) \\
&\quad + \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a_k)(\partial_z - \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A)) + \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A_k)(\partial_z - \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a)) \\
&\quad + R_{k-1} + S_k + T\partial_z,
\end{aligned}$$

où $S_k \in \mathrm{Op}(S^{-k})$.
On note r_{k-1} le symbole de R_{k-1} et on choisit

$$\begin{aligned}
A_k &= -\frac{r_{k-1}}{A - a} \\
a_k &= \frac{r_{k-1}}{A - a},
\end{aligned}$$

On voit par récurrence sur k que $A-a$ est d'ordre 1 et vérifie une condition d'ellipticité. Les éventuels zéros de $A-a$ sont donc situés dans un ensemble de la forme $\mathbb{R}^n \times K$ avec K un compact de $\mathbb{R}^n$. Quitte à multiplier A_k et a_k par $(1-\chi)$ avec χ une fonction bien choisie de ξ, à support compact, ces deux symboles sont bien définis et, comme $r_{k-1} \in S^{-(k-1)}$, ils appartiennent à S^{-k}.
De plus, $(\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a_k) + \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A_k))\partial_z = 0$ et, à un reste d'ordre $-k$ près,

$$\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a_k)\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A) + \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A_k)\dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a) = \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a_k A + A_k a) = R_{k-1}.$$

On a donc, pour un certain $R_k \in \mathrm{Op}(S^{-k})$,

$$\partial_z^2 + a\Delta_x + \beta.\nabla_x\partial_z - \gamma\partial_z = (\partial_z - \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(a'))(\partial_z - \dot{\mathrm{O}}\mathrm{p}(A')) + R_k.$$

Exercice 2

5. Soit w une solution, qui soit dans L^2 pour tout temps. Alors, en prenant la transformée de Fourier, on doit avoir

$$\partial_t \hat{w} + |\xi|\hat{w} = 0,$$

ce qui entraîne

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+, \qquad \hat{w}_t(\xi) = \hat{w}_0(\xi)e^{-|\xi|t}.$$

Réciproquement, si on pose, pour tout $t \geq 0$,

$$w_t = \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \to \hat{w}_0(x)e^{-|\xi|t}\right),$$

cela définit bien une solution de l'équation.
Montrons maintenant que l'équation (3) est satisfaite.

$$\begin{aligned}
||w(t)||_{L^2}^2 + \int_0^t \left|\left| \, |D_x|^{1/2} w(s) \right|\right|_{L^2}^2 ds &= \frac{1}{(2\pi)^n}\left(||\hat{w}_t||_{L^2}^2 + \int_0^t \left|\left| \, |\xi|^{1/2}\hat{w}_s \right|\right|_{L^2}^2 ds\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\hat{w}_t(\xi)|^2 + \int_0^t |\xi||\hat{w}_s(\xi)|^2 ds\right) d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{w}_0(\xi)|^2\left(e^{-2|\xi|t} + \int_0^t |\xi|e^{-2|\xi|s}ds\right) d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{w}_0(\xi)|^2\left(e^{-2|\xi|t} + \frac{1}{2}\left(1-e^{-2|\xi|t}\right)\right) d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{w}_0(\xi)|^2\left(\frac{1+e^{-2|\xi|t}}{2}\right) d\xi \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{w}_0(\xi)|^2 d\xi \\
&= ||w(0)||_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

6. On n'utilise pas ici l'hypothèse $|\alpha|+|\beta| \leq 1$. La fonction $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta e_t$ est une combinaison linéaire finie de termes de la forme

$$(t-T)^r(\partial_x^{\alpha_1}\partial_\xi^{\beta_1}a)...(\partial_x^{\alpha_r}\partial_\xi^{\beta_r}a)\exp((t-T)a) \tag{2}$$

avec $r \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 + ... + \alpha_r = \alpha$ et $\beta_1 + ... + \beta_r = \beta$.
Cette propriété se vérifie par récurrence sur $|\alpha| + |\beta|$.
Pour tout M, il existe c_M tel que la fonction $x \to e^x$ satisfait, sur $\mathbb{R}^-$,

$$e^x \leq c_M |x|^{-M}.$$

Supposons un tel c_M fixé. Chaque terme de la forme (2) est alors majoré par :

$$\begin{aligned}
&c_M |t-T|^r |\partial_x^{\alpha_1}\partial_\xi^{\beta_1} a| ... |\partial_x^{\alpha_r}\partial_\xi^{\beta_r} a| |t-T|^{-M} |a|^{-M} \\
\leq\, & c_M D |t-T|^r \langle\xi\rangle^{1-|\beta_1|} ... \langle\xi\rangle^{1-|\beta_r|} |t-T|^{-M} |a|^{-M} \\
\leq\, & c_M D' |t-T|^r \langle\xi\rangle^{1-|\beta_1|} ... \langle\xi\rangle^{1-|\beta_r|} |t-T|^{-M} \langle\xi\rangle^{-M} \\
=\, & c_M D' |t-T|^{-(M-r)} \langle\xi\rangle^{-|\beta|-(M-r)}.
\end{aligned}$$

En prenant $M = m + r$, on a bien une majoration de la forme voulue.
7. Prenons $m = 1-\epsilon$. D'après la question précédente, e_t est, pour tout t, un symbole de $S^{-(1-\epsilon)}$, dont toutes les semi-normes sont majorées, lorsque t varie, par $(T-t)^{-(1-\epsilon)}$ (multiplié par une constante). Donc e_t est un opérateur continu de L^2 vers $H^{1-\epsilon}$, de norme au plus $K_\epsilon(T-t)^{-(1-\epsilon)}$, pour une certaine constante K_ϵ. Cela implique la première inégalité.
De plus, puisque $e_t \in S^{-(1-\epsilon)}$ et $a \in S^1$, les théorèmes de calcul symbolique impliquent que $\mathrm{Op}(\partial_t e_t) - \mathrm{Op}(e_t)\,\mathrm{Op}(a) = \mathrm{Op}(ae_t) - \mathrm{Op}(e_t)\,\mathrm{Op}(a)$ appartient à $\mathrm{Op}(S^{-(1-\epsilon)})$, avec une norme contrôlée par le produit d'une semi-norme de e_t dans $S^{-(1-\epsilon)}$ et d'une semi-norme de a dans S^1. Donc $\mathrm{Op}(\partial_t e_t) - \mathrm{Op}(e_t)\,\mathrm{Op}(a)$ appartient à $S^{-(1-\epsilon)}$ pour tout t, avec une norme majorée par $C_\epsilon(T-t)^{-(1-\epsilon)}$, pour une certaine constante C_ϵ. Cela implique la deuxième inégalité.
8. On va montrer que, pour tout t,

$$\mathrm{Op}(e_t)w(t) = \int_0^t (\mathrm{Op}(\partial_t e_s) - \mathrm{Op}(e_s)\,\mathrm{Op}(a))w(s)ds + \int_0^t \mathrm{Op}(e_s)f(s)ds.$$

Puisque $e_T = 1$, cela implique l'égalité demandée.
Pour $t = 0$, les deux membres de l'égalité sont égaux (ils sont tous les deux nuls). Puisque les deux membres sont dans $\mathcal{C}^1([0;T], L^2(\mathbb{R}^n))$, il suffit de montrer que leurs dérivées coïncident, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& \partial_t \left[\mathrm{Op}(e_t)w\right] = (\mathrm{Op}(\partial_t e_t) - \mathrm{Op}(e_t)\,\mathrm{Op}(a))w(t) + \mathrm{Op}(e_t)f(t) \\
\iff\quad & \partial_t \left[\mathrm{Op}(e_t)w\right] = \mathrm{Op}(\partial_t e_t)w(t) + \mathrm{Op}(e_t)\partial_t w(t) = \partial_t \left[\mathrm{Op}(e_t)w\right].
\end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité voulue. Déduisons-en que $w(T) \in H^{1-\epsilon}(\mathbb{R}^n)$.
D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
||w(T)||_{H^{1-\epsilon}} &\leq K_\epsilon \left(\int_0^T (T-t)^{-(1-\epsilon)}dt\right)\left(\sup_{[0;T]} ||w(t)||_{L^2} + \sup_{[0;T]} ||f(t)||_{L^2}\right) \\
&= K_\epsilon \epsilon^{-1} T^\epsilon \left(\sup_{[0;T]} ||w(t)||_{L^2} + \sup_{[0;T]} ||f(t)||_{L^2}\right) < +\infty.
\end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. On suppose $u_R = 0$. Quitte à soustraire u_R à u (ce qui ne change pas le fait que u est solution faible de l'équation considérée), c'est possible.
Considérons $\phi = u\eta^2$. C'est bien une fonction de $H_0^1(B) \cap L^\infty(B)$. Appliquons-lui la propriété (4).

$$\begin{aligned}
0 &= \int_B (\nabla u.\nabla \phi - \Gamma(|\nabla u|^2)\phi)dx \\
&= \int_B \eta^2|\nabla u|^2 + 2\int_B \nabla u.(\nabla\eta)\eta u - \int_B \Gamma(|\nabla u|^2)\eta^2 u.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\int_B \eta^2|\nabla u|^2 &= -2\int_B \nabla u.(\nabla\eta)\eta u + \int_B \Gamma(|\nabla u|^2)\eta^2 u \\
&\leq 2\left(\int_B |\nabla u|^2\eta^2\right)^{1/2}\left(\int u^2|\nabla\eta|^2\right)^{1/2} + \int_B \Gamma(|\nabla u|^2)\eta^2|u|.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\left(\left(\int_B \eta^2|\nabla u|^2\right)^{1/2} - \left(\int u^2|\nabla\eta|^2\right)^{1/2}\right)^2 \leq \int u^2|\nabla\eta|^2 + \int_B \Gamma(|\nabla u|^2)\eta^2|u|.$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_B \eta^2|\nabla u|^2 &\leq \left(\sqrt{\int u^2|\nabla\eta|^2 + \int_B \Gamma(|\nabla u|^2)\eta^2|u|} + \left(\int u^2|\nabla\eta|^2\right)^{1/2}\right)^2 \\
&= \int u^2|\nabla\eta|^2 + \int_B \Gamma(|\nabla u|^2)\eta^2|u| + \int u^2|\nabla\eta|^2 \\
&\quad + \sqrt{\int u^2|\nabla\eta|^2 + \int_B \Gamma(|\nabla u|^2)\eta^2|u|}\left(\int u^2|\nabla\eta|^2\right)^{1/2} \\
&\leq 2\int u^2|\nabla\eta|^2 + \int_B \Gamma(|\nabla u|^2)\eta^2|u| \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(\int u^2|\nabla\eta|^2 + \int_B \Gamma(|\nabla u|^2)\eta^2|u|\right) + \frac{3}{4}\int u^2|\nabla\eta|^2 \\
&= \frac{37}{12}\int u^2|\nabla\eta|^2 + \frac{4}{3}\int_B \Gamma(|\nabla u|^2)\eta^2|u| \\
&\leq \frac{37}{12}\int u^2|\nabla\eta|^2 + \frac{4}{3}A\int_B |\nabla u|^2\eta^2|u| \\
&\leq \frac{37}{12}\int u^2|\nabla\eta|^2 + \frac{4}{3}A\left(\sup_{B_R}|u|\right)\int_B |\nabla u|^2\eta^2
\end{aligned}$$

En multipliant par $\frac{3}{4}$, on a le résultat demandé, en utilisant l'inégalité $\frac{3}{4}.\frac{37}{12} \leq 4$.
2. La fonction u, étant continue, est uniformément continue sur tout compact inclus dans B. Si R_0 est assez petit, on peut donc supposer que $\sup_{B_R} |u - u_R|$ est arbitrairement petit, quel que soit $R \leq R_0$. Prenons par exemple

$$\sup_{B_R} |u - u_R| \leq \frac{1}{4A}.$$

Alors l'inégalité précédente entraîne que

$$\int_{B_R} |\nabla u| \eta^2 \leq 8 \int_{B_R} (u - u_R)^2 |\nabla \eta|^2. \tag{3}$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui vaut 1 sur $\mathbb{R}^-$ et 0 sur $[1; +\infty[$. Choisissons $\eta(x) = f\left(\frac{||x||-r}{R'-r}\right)$ pour un $R' \in]r; R[$ quelconque.
C'est une fonction à support compact inclus dans B_R, qui vaut 1 sur B_r.
On peut appliquer à η la relation (3) :

$$\begin{aligned}\int_{B_r} |\nabla u|^2 &\leq \int_{B_R} |\nabla u| \eta^2 \\ &\leq 8 \int_{B_R} (u - u_R)^2 |\nabla \eta|^2 \\ &\leq \frac{8}{(R' - r)^2} ||f'||_\infty^2 \int_{B_R - B_r} (u - u_R)^2\end{aligned}$$

On se convainc du fait qu'on peut choisir f de sorte que $||f'||_\infty < 2$ et alors, en faisant tendre R' vers R, on a le résultat.

Exercice 4 :

3. La fonction v est bornée (car u l'est) donc v est dans L^2. En outre, la fonction $G : x \in \mathbb{R} \to e^{Ax} - 1$ est $\mathcal{C}^1$, vérifie $G(0) = 0$ et est de dérivée bornée sur $[0, ||u||_\infty]$. Donc, d'après un lemme du cours, $G \circ u$ est dans H^1 et vérifie $\nabla(G \circ u) = (G' \circ u)\nabla u$.
On a donc $\nabla v = e^{Au} \nabla u$. Les fonctions e^{Au} et ∇u sont à la fois dans H^1 et dans L^2, donc v est H^2 et $\Delta v = e^{Au}\Delta u + Ae^{Au}|\nabla u|^2$.
En outre, $\Delta v = e^{Au}\Delta u + Ae^{Au}|\nabla u|^2 = -e^{Au}\Gamma(|\nabla u|^2) + Ae^{Au}|\nabla u|^2 \geq -e^{Au}A|\nabla u|^2 + Ae^{Au}|\nabla u|^2 = 0$. De plus, v est positive car u est positive. Donc v est bien une sous-solution faible positive de $-\Delta$.
4. Le premier résultat provient du théorème 7.14 (partie « Itérations de Moser »), appliqué à $L = \Delta$.
Soit $r \in]0; 1]$. Posons $v_r(t) = v(tr)$. Il s'agit toujours d'une sous-solution positive de $-\Delta$. Comme on vient de le voir, il existe $c > 0$ indépendante de v et r telle que

$$\sup_{B_{1/2}} v_r \leq c \left(\int_{B_1} |v_r(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

C'est exactement équivalent à

$$\sup_{B_{r/2}} v \leq c\left(\frac{1}{r^n}\int_{B_r}|v(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

5. Pour tout x, puisque $u(x) \geq 0$,

$$u(x) = \frac{1}{A}(1 + Au(x) - 1) \leq v(x) \leq e^{AM}u(x).$$

La deuxième inégalité est une conséquence du théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction exp, dont la dérivée sur $[0; AM]$ est bornée par e^{AM}.
Donc $\sup_{B_{r/2}} u \leq \sup_{B_{r/2}} v \leq C_1\left(\frac{1}{r^n}\int_{B_r}|v(x)|^2dx\right)^{1/2} \leq C_1e^{AM}\left(\frac{1}{r^n}\int_{B_r}|u(x)|^2dx\right)^{1/2}$.
6. Posons $w = 1 - e^{-u}$. Par le même raisonnement que précédemment, w est dans H^2 et vérifie $\nabla w = e^{-u}\nabla u, \Delta w = e^{-u}\Delta u - e^{-u}|\nabla u|^2 = e^{-u}\left(-\Gamma(|\nabla u|^2) - |\nabla u|^2\right)$.
Puisque Γ est positive, $\Delta w \leq 0$.
D'après l'inégalité de Harnack, on a donc, pour une certaine constante c,

$$\inf_{B_{r/2}} w \geq c\left(\frac{1}{r^n}\int_{B_r}|w(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Or, pour tout x, $e^{-M}u(x) \leq w(x) \leq u(x)$ (de même que précédemment). On en déduit

$$\inf_{B_{r/2}} u \geq ce^{-M}\left(\frac{1}{r^n}\int_{B_r}|u(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Problème court :

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}||f||_{L^\infty} &\leq \sum_{q\leq N-1}||\Delta_q f||_\infty + \sum_{q\geq N}||\Delta_q f||_\infty \\ &\leq (N+1)||f||_{\mathcal{C}^0_*} + c||f||_{\mathcal{C}^{0,\epsilon}}\sum_{q\geq N}2^{-q\epsilon} \\ &\leq c'(N||f||_{\mathcal{C}^0_*} + ||f||_{\mathcal{C}^{0,\epsilon}}2^{-N\epsilon}).\end{aligned}$$

Prenons pour N la partie entière de $\frac{1}{\epsilon}\log_2\left(e + \frac{||f||_{\mathcal{C}^{0,\epsilon}}}{||f||_{\mathcal{C}^0_*}}\right)$. Alors

$$\begin{aligned}||f||_{L^\infty} &\leq \frac{c'}{\epsilon}||f||_{\mathcal{C}^0_*}\left(\log_2\left(e + \frac{||f||_{\mathcal{C}^{0,\epsilon}}}{||f||_{\mathcal{C}^0_*}}\right) + 2\left(1 + e\frac{||f||_{\mathcal{C}^0_*}}{||f||_{\mathcal{C}^{0,\epsilon}}}\right)^{-1}\right) \\ &\leq 2\frac{c'}{\epsilon}||f||_{\mathcal{C}^0_*}\log_2\left(e + \frac{||f||_{\mathcal{C}^{0,\epsilon}}}{||f||_{\mathcal{C}^0_*}}\right).\end{aligned}$$

2. On a, pour tout q, $\Delta_q u(x) = e^{i2^q x}$ (éventuellement à une constante multiplicative près) donc

$$\forall q \in \mathbb{N}, \qquad ||\Delta_q||_{L^\infty} \leq 1,$$

ce qui implique $u \in \mathcal{C}^0_*$.
Supposons maintenant par l'absurde que $u \in L^\infty$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$u(x) = \sum_{q=0}^{N-1} e^{i2^q x} + u(2^N x)$$

donc, puisque $x \to \sum_{q=0}^{N-1} e^{i2^q x}$ est continue et vaut N en 0,

$$||u||_{L^\infty} \geq N - ||u(2^N .)||_{L^\infty} = N - ||u||_{L^\infty}.$$

Ainsi, pour tout N, $||u||_{L^\infty} \geq N/2$. C'est absurde.