Examen 2013, 3h

Sans document, téléphone, ordinateur ou calculatrice.

Exercice 1. Soit A_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n d'une variable à coefficients réels, c'est à dire l'ensemble des polynômes de la forme

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Soient P et Q deux polynômes unitaires de degré n et m, premiers entre eux. Montrer qu'il existe un voisinage U de PQ dans A_{n+m} et des voisinages V et W de P et Q dans A_n et A_m tels que tout polynome $S \in U$ admet une unique décomposition $S = P_S Q_S$ comme produit d'un élément de $V \subset A_n$ et d'un élément de $W \subset A_m$. De plus, les coefficients de P_S et Q_S sont des fonctions C^∞ des coefficients de S.

Pour ceci, on pourra considérer l'application $\Phi(p,q)$ de $\mathbb{R}^{n-1}[x] \times \mathbb{R}^{m-1}[x]$ dans $\mathbb{R}^{m+n-1}[x]$ telle que

$$(x^n + p(x))(x^m + q(x)) = x^{n+m} + \Phi(p,q)(x).$$

Exercice 2.

1. Soit $\varphi(w,x) : W \times X \to Y$ une application continue, où W est un espace topologique compact et X, Y sont des espaces métriques. Montrer que, pour tout $x_0 \in X$ et tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$d(\varphi(w,x), \varphi(w,x_0)) < \epsilon$$
pour tout (w,x) tel que $d(x,x_0) < \delta$.

2. Soit $\psi(w,x) : W \times E \to F$ une application, avec W compact et E et F Banach. Supposons que la différentielle $\partial_x \psi$ existe en chaque point et est continue (en les variables (w,x)). Pour tout $x_0 \in E$, et $\epsilon > 0$, montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que
$$\|\psi(w,x) - \psi(w,x_0) - \partial_x\psi(w,x_0) \cdot (x - x_0)\| \leq \epsilon \|x - x_0\|$$
pour tout (w,x) tel que $\|x - x_0\| < \delta$.

3. Sous les hypothèses de la question précédente, montrer que, pour toute mesure Borélienne finie μ sur W, l'application
$$\Psi : x \longmapsto \int \psi(w,x) d\mu(w)$$
est différentiable, avec $d\Psi(x) = \int \partial_x \psi(w,x) d\mu(w)$.

4. Soit $f : E \to F$ une application C^l, soit $k \leq l$, et soit $x_0 \in E$. Montrer qu'il existe une application C^{l-k}
$$g : E \to \mathcal{L}_s^k(E,F)$$
telle que
$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) \cdot (x - x_0) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} d^{k-1} f(x_0) \cdot (x - x_0)^{k-1} + g(x) \cdot (x - x_0)^k$$

Exercice 3. Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont nulles en dehors de l'intervalle $[0,1]$, et soit $F \subset E$ l'espace des fonctions de E qui sont C^∞. On munit E de la norme uniforme, notée $\|.\|$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère l'application

$$D^k : F \to E$$

qui, à la fonction f, associe sa dérivée k-ième. On munit F de la topologie engendrée par les applications D^k. On admettra, sans le redémontrer, que F contient des fonctions non nulles.

1. Montrer que F est de dimension infinie.

2. Montrer que F est métrisable, et que $f_n \to f$ si et seulement si $\|D^k(f_n) - D^k(f)\| \to 0$ pour tout k.

3. Montrer que la suite f_n converge dans F si et seulement si chacune des suites $D^k(f_n)$ converge dans E.

4. Montrer qu'une partie K de F est relativement compacte si et seulement si $D^k(K)$ est relativement compacte dans E pour tout k.

5. Soit $B \subset F$ une partie telle que $\sup_{f \in B} \|D^k(f)\| < \infty$ pour tout k. Montrer que B est relativement compacte.

6. Montrer que la topologie de F ne peut pas être engendrée par une norme.

Exercice 4. On dit que l'espace de Banach E est *faiblement séparable* si il existe une suite bornée l_n de E' telle que

$$\|x\| \leq \sup_n |l_n(x)|$$

pour tout $x \in E$.

1. Soit E un espace de Banach séparable, et soit x_n une suite dense dans E.

   En utilisant le plongement canonique de E dans E'', montrer que E' est faiblement séparable.

   Montrer qu'il existe une suite bornée l_n dans E' telle que $l_n \cdot x_n = \|x_n\|$ pour tout n, en déduire que E est faiblement séparable.

2. Soit E un Banach faiblement séparable. Montrer que tout sous-espace fermé $F \subset E$ est faiblement séparable. Si de plus F est facteur direct, montrer que E/F est faiblement séparable.

3. Montrer qu'un espace de Banach est faiblement séparable si et seulement si il est isomorphe à un sous-espace fermé de l^∞.

Exercice 5. Suite de l'exercice précédent. Soit $c_0 \subset l^\infty$ l'ensemble des suites qui tendent vers 0. Le but est de montrer que c_0 est un sous-espace fermé qui n'est pas facteur direct.

On note Y l'ensemble des réels irrationnels. On fixe une énumération r de $\mathbb{Q}$, c'est à dire une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$. Pour tout $y \in Y$, on considère l'ensemble $A(y)$ des rationnels p/q tels que $|x - p/q| < 1/(2q)$. On note $B(y) = r^{-1}(A(y)) \subset \mathbb{N}$. On constate (inutile de l'écrire) que :

- Y n'est pas dénombrable
- $B(y)$ est infini pour tout $y \in Y$.
- $B(y) \cap B(z)$ est fini pour $y \neq z$.

Pour tout $y \in Y$, on note h_y la suite de l^∞ qui vaut 1 si $n \in B(y)$ et 0 sinon.

1. Montrer que c_0 est fermé, et ne contient aucun des éléments $h_y, y \in Y$.

2. Étant donnée $l \in c_0^\perp$, montrer que $|l(\pm h_{y_1} \pm h_{y_2} + \cdots \pm h_{y_k})| \leq \|l\|$ pour tous $y_i \in Y, 1 \leq i \leq k$ deux à deux distincts, et pour tous choix de signes $\pm$.

3. Montrer que l'ensemble $\{y \in Y : |l(h_y)| \geq \epsilon\}$ est fini pour tout $\epsilon > 0$.

4. Montrer que, pour toute partie dénombrable $F \subset c_0^\perp$, il existe $y \in Y$ tel que $h_y \in F^\circ$.

5. Montrer que l^∞ / c_0 n'est pas faiblement séparable, conclure.

Corrigé de l'examen

Exercice 1
On considère l'application $\phi : (p, q) \in \mathbb{R}^{n-1}[x] \times \mathbb{R}^{m-1}[x] \to \mathbb{R}^{m+n-1}[x]$ telle que :

$$\phi(p, q)(x) = (x^n + p(x))(x^m + q(x)) - x^{n+m}$$

Cette application est bien à images dans $\mathbb{R}^{m+n-1}[x]$ car le polynôme $(x^n+p(x))(x^m+q(x))$ est unitaire de degré x^{m+n}.
Il s'agit d'une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ car, si on identifie $\mathbb{R}^{n-1}[x]\times\mathbb{R}^{m-1}[x]$ à $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^{m+n-1}[x]$ à $\mathbb{R}^{m+n}$ par les bijections linéaires canoniques, toutes les coordonnées de ϕ sont polynomiales.
Calculons sa différentielle :

$$\begin{aligned}\phi(p+h, q+l)(x) &= (x^n + p(x) + h(x))(x^m + q(x) + l(x)) - x^{n+m}\\ &= (x^n + p(x))(x^m + q(x)) - x^{n+m} + h(x)(x^m + q(x)) + (x^n + p(x))l(x) + h(x)l(x)\\ &= \phi(p, q)(x) + h(x)(x^m + q(x)) + l(x)(x^n + p(x)) + o(||h|| + ||l||)\end{aligned}$$

Donc $d\phi(p, q).(h, l)(x) = h(x)(x^m + q(x)) + l(x)(x^n + p(x))$
Pour $p = P - x^n$ et $q = Q - x^n$, $d\phi(p, q)$ est une bijection.
En effet, elle est injective : si $d\phi(p, q)(h, l) = 0$, on doit avoir $hQ + lP = 0$. Puisque P et Q sont premiers entre eux, cela implique que P divise h et Q divise l. Or $d^\circ(P) = n > n - 1 = d^\circ(h)$ et $d^\circ(Q) = m > m - 1 = d^\circ(l)$ donc $h = 0$ et $l = 0$.
Comme les espaces de départ et d'arrivée de $d\phi(p, q)$ ont la même dimension finie $(m+n)$, l'injectivité implique la bijectivité.

D'après le théorème d'inversion locale, l'application ϕ est donc un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme au voisinage de (p, q).
Soient Ω, Ξ des voisinages (respectivement) de (p, q) dans $\mathbb{R}^{n-1}[x] \times \mathbb{R}^{m-1}[x]$ et de $\phi(p, q)$ dans $\mathbb{R}^{n+m-1}[x]$ tels que ϕ réalise un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de Ω vers Ξ.
Quitte à restreindre Ω et Ξ, on peut supposer que Ω est de la forme $\Omega_1 \times \Omega_2$, où Ω_1 est un voisinage de p et Ω_2 un voisinage de q.
Posons $V = \Omega_1 + x^n = \{\tilde{p}(x) + x^n \text{ tq } \tilde{p} \in \Omega_1\} \subset A_n$, $W = \Omega_2 + x^m \subset A_m$, $U = \Xi + x^{n+m} \subset A_{n+m}$. Ce sont des voisinages de P, Q et PQ.
Pour tout $S \in U$, $S - x^{n+m} \in \Xi$ donc il existe $(p_S, q_S) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ tel que $S - x^{n+m} = \phi(p_S, q_S) = (x^n + p_S(x))(x^m + q_S(x)) - x^{n+m}$.
En posant $P_S(x) = p_S(x) + x^n \in V$ et $Q_S = q_S(x) + x^m \in W$, on a $S = P_S Q_S$, avec $P_S \in V, Q_S \in W$.
De plus, $P_S \in V$ et $Q_S \in W$ tels que $S = P_S Q_S$ sont uniques car l'égalité $S = P_S Q_S$ implique $S - x^{n+m} = \phi(P - x^n, Q - x^m)$ et cette dernière équation a une unique solution en P et Q puisque ϕ est injective.

Enfin, P_S et Q_S sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ des coefficients de S car $(P_S, Q_S) = \phi^{-1}(S - x^{n+m}) + (x^n, x^m)$ et ϕ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 2

1. Soient $x_0 \in X$ et $\epsilon > 0$ fixés.
Pour tout $w \in X$, soient $V_w \subset W$ un voisinage ouvert de w et $\eta_w > 0$ un réel positif tels que :

$$\forall (w', x) \in V_w \times B(x_0, \eta_w), \quad d(\phi(w, x_0), \phi(w', x)) < \epsilon/2$$

De tels V_w et η_w existent car ϕ est continue en (w, x_0) pour tout $w \in W$.
Puisque W est compact et $W = \bigcup_{w \in W} V_w$, il existe un nombre fini d'éléments de W, qu'on note $w_1, ..., w_n$, tels que $W = \bigcup_{k \leq n} V_{w_k}$.
Soit $\delta = \min(\eta_{w_1}, ..., \eta_{w_n})$.
Pour tout $(w, x) \in W \times X$ tel que $d(x, x_0) < \delta$, il existe k tel que $x \in V_{w_k}$. Alors :

$$d(\phi(w, x), \phi(w, x_0)) \leq d(\phi(w_k, x_0), \phi(w, x)) + d(\phi(w_k, x_0), \phi(w, x_0)) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

2. Soient $x_0 \in X, \epsilon > 0$ fixés. Soit δ tel que, pour tout $(w, y) \in W \times E$ tel que $||y - x_0|| < \delta$, on ait :

$$||\partial_x \psi(w, y) - \partial_x \psi(w, x_0)|| < \epsilon$$

Un tel δ existe d'après la question 1.
Pour tous $w \in W, x \in E$ tels que $||x - x_0|| < \delta$, d'après un corollaire de l'inégalité des accroissements finis :

$$\begin{aligned}
||\psi(w, x) - \psi(w, x_0) - \partial_x \psi(w, x_0).(x - x_0)|| &\leq ||x - x_0||. \sup_{y \in [x, x_0]} ||\partial_x \psi(w, y) - \partial_x \psi(w, x_0)|| \\
&\leq ||x - x_0||. \sup_{\substack{(w', y) \in W \times E, \\ ||y - x_0|| \leq ||x - x_0||}} ||\partial_x \psi(w', y) - \partial_x \psi(w', x_0)|| \\
&\leq ||x - x_0||. \sup_{\substack{(w', y) \in W \times E, \\ ||y - x_0|| < \delta}} ||\partial_x \psi(w', y) - \partial_x \psi(w', x_0)|| \\
&\leq \epsilon ||x - x_0||
\end{aligned}$$

3. Soit $x_0 \in E$ quelconque. Montrons que $\Psi(x) = \Psi(x_0) + \int \partial_x \psi(w, x_0).(x - x_0) d\mu(w) + o(||x - x_0||)$.
Soit $\eta > 0$ quelconque. On pose $\epsilon = \eta / \mu(W)$. Soit $\delta > 0$ comme dans la question précédente.
Pour tout $x \in B(x_0, \delta)$:

$$\begin{aligned}
&||\Psi(x) - \Psi(x_0) - \int \partial_x \psi(w, x).(x - x_0) d\mu(w)|| \\
&= \left|\left| \int (\psi(w, x) - \psi(w, x_0) - \partial_x \psi(w, x_0).(x - x_0)) \, d\mu(w) \right|\right| \\
&\leq \int ||\psi(w, x) - \psi(w, x_0) - \partial_x \psi(w, x_0).(x - x_0)|| \, d\mu(w) \\
&\leq \int \epsilon ||x - x_0|| d\mu(w) \\
&= \epsilon \mu(W) ||x - x_0|| = \eta ||x - x_0||
\end{aligned}$$

Puisqu'un tel δ existe pour tout $\eta > 0$, $\Psi(x) = \Psi(x_0) + \int \partial_x \psi(w, x_0).(x - x_0) d\mu(w) + o(||x - x_0||)$. La fonction Ψ est donc différentiable en x_0, avec $d\Psi(x_0) = \int \partial_x \psi(w, x_0) d\mu(w)$.

4. Par récurrence, le résultat de la question 3. implique que si la fonction ψ de la question 3. admet des dérivées partielles suivant x jusqu'à l'ordre s et si toutes les dérivées partielles sont continues, alors Ψ est s fois différentiable.
Sa dérivée s-ième est $d^s\Psi(x) = \int \partial_x^s \psi(w,x)d\mu(w)$. De plus, $d^s\Psi(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$. En effet, pour tout x_0 et tout $\epsilon > 0$, il existe (d'après la question 1.) un $\delta > 0$ tel que :

$$\forall w \in W, \forall x \in B(x_0,\delta), \qquad ||\partial_x^s\psi(w,x) - \partial_x^s\psi(w,x_0)|| < \epsilon/\mu(W)$$

et alors, pour tout $x \in B(x_0,\delta)$:

$$||d^s\Psi(x) - d^s\Psi(x_0)|| < \epsilon$$

La fonction Ψ est donc de classe $\mathcal{C}^s$.
D'après la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + df(x_0).(x-x_0) + ... + \frac{1}{(k-1)!}d^{k-1}f(x_0).(x-x_0)^{k-1} \\ &+ \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-t)^{k-1}d^kf(x+t(x-x_0)).(x-x_0)^k dt \end{aligned}$$

Posons $g(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^1 (1-t)^{k-1}d^kf(x+t(x-x_0))dt$. Avec cette définition :

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0).(x-x_0) + ... + \frac{1}{(k-1)!}d^{k-1}f(x_0).(x-x_0)^{k-1} + g(x).(x-x_0)^k$$

L'application $(t,x) \in [0;1] \times E \to \frac{1}{(k-1)!}(1-t)^{k-1}d^kf(x+t(x-x_0))$ admet des dérivées partielles continues, en x, jusqu'à l'ordre $l-k$, puisque f est de classe $\mathcal{C}^l$.
D'après ce qu'on vient de déduire de la question 3., g est de classe $\mathcal{C}^{l-k}$.

Exercice 3

1. Soit $f \in F$ non-nulle. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $x \to P(x)f(x)$ est un élément de F, qui n'est pas la fonction nulle si $P \neq 0$. En effet, si $P(x)f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, cela signifie que f n'a qu'un nombre fini de valeurs non-nulles (puisque P n'a qu'un nombre fini de racines). Puisque f est une fonction continue, f est donc identiquement nulle, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse qu'on a faite sur f.
L'application $P \in \mathbb{R}[X] \to (x \to P(x)f(x)) \in F$ est donc linéaire et injective. Puisque $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie, F aussi.
2. Une propriété de la topologie engendrée par une famille d'applications assure qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F converge dans F vers une limite f si et seulement si $(D^k(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E vers $D^k(f)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$||D^k(f_n) - D^k(f)|| \to 0$$

Montrons que F est métrisable. Posons :

$$d(f_1,f_2) = \sum_k \frac{\min(1, ||D^k(f_1) - D^k(f_2)||)}{2^k}$$

Il s'agit bien d'une distance :

- $d(f_1, f_2) = d(f_2, f_1)$
- $(d(f_1, f_2) = 0) \Rightarrow (||D^0(f_1) - D^0(f_2)|| = 0) \Leftrightarrow (f_1 = f_2)$
- L'inégalité triangulaire est vérifiée :

$$\begin{aligned}
d(f_1, f_3) &\leq \sum_k \frac{\min(1, ||D^k(f_1) - D^k(f_2)|| + ||D^k(f_2) - D^k(f_3)||)}{2^k} \\
&\leq \sum_k \frac{\min(1, ||D^k(f_1) - D^k(f_2)||)}{2^k} + \sum_k \frac{\min(1, ||D^k(f_2) - D^k(f_3)||)}{2^k} \\
&= d(f_1, f_2) + d(f_2, f_3)
\end{aligned}$$

Montrons que d engendre la topologie de F.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toutes $f_1, f_2 \in F$, $\min(1, ||D^k(f_1) - D^k(f_2)||) \leq 2^k d(f_1, f_2)$ donc $||D^k(f_1) - D^k(f_2)|| \leq \omega_k(d(f_1, f_2))$ où $\omega_k : \mathbb{R}^+ \to [0; +\infty]$ est la fonction telle que :

$$\begin{aligned}
\omega_k(x) &= +\infty \text{ si } x \geq 2^{-k} \\
&= 2^k x \text{ si } x < 2^{-k}
\end{aligned}$$

Puisque, pour tout k, ω_k tend vers 0 en 0, les fonctions D^k sont toutes continues sur F lorsque F est munie de la topologie engendrée par d. Puisque la topologie engendrée par les D^k est la topologie la moins fine rendant toutes les D^k continues, la topologie de F est moins fine que la topologie engendrée par d.

Montrons maintenant que la topologie de F est plus fine que la topologie engendrée par d.
Puisque $\{B_d(f_0, \epsilon)\}_{f_0 \in F, \epsilon > 0}$ est une base d'ouverts de la topologie engendrée par d, il suffit de montrer que, pour toute $f_0 \in F$ et tout $\epsilon > 0$, $B_d(f_0, \epsilon)$ est un ouvert de F.
Posons, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et toutes $f_1, f_2 \in F$, $d_N(f_1, f_2) = \sum\limits_{k \leq N} \frac{\min(1, ||D^k(f_1) - D^k(f_2)||)}{2^k}$.

La suite $(d_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers d. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, d_N est continue sur F^2 (car composée de fonctions continues). La limite d de $(d_N)_N$ est donc également continue (pour la topologie de F).
Pour toute $f_0 \in F$ et tout $\epsilon > 0$, puisque la fonction $d_{f_0} : f \to d(f_0, f)$ est continue, $B_d(f_0, \epsilon) = d_{f_0}^{-1}(]-\epsilon; \epsilon[)$ est un ouvert de F.

3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F. On suppose que, pour tout k, $(D^k(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E vers une limite g_k.
Pour tout k, $(D^k(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers g_k. De plus, la suite de ses dérivées, $(D^{k+1}(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$, converge uniformément (vers g_{k+1}). La limite g_k est donc dérivable, de dérivée g_{k+1}.
Ainsi, par récurrence, g_0 est infiniment dérivable et, pour tout k, $g_0^{(k)} = g_k$. Donc $g_0 \in F$ et, pour tout k :

$$||D^k(f_n) - D^k(g_0)|| = ||D^k(f_n) - g_k|| \to 0$$

Donc, par 2., $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans F vers g_0.
Réciproquement, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans F vers une limite g, alors, pour tout k, puisque D^k est continue, $(D^k(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $D^k(g)$ dans E.

4. Si K est relativement compacte, $\overline{K}$ est compacte. Puisque D^k est continue sur F, $D^k(\overline{K})$ est compacte dans E pour tout k. Donc, pour tout k, l'ensemble $D^k(K)$ est inclus dans un compact de

E. Son adhérence est donc un fermé inclus dans un compact ; elle est donc compacte et $D^k(K)$ est relativement compact.
Supposons réciproquement que $D^k(K)$ est relativement compact dans E pour tout k et montrons que $\overline{K}$ est compact.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\overline{K}$. Montrons qu'on peut en extraire une sous-suite convergente (cela suffit car F est métrisable par la question 2.).
Pour tout k, $D^k(\overline{K}) \subset \overline{D^k(K)}$ car D^k est continue. Puisque, par hypothèse, $\overline{D^k(K)}$ est compact, on peut extraire de $(D^k(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge dans E.
Par extraction diagonale, on peut ainsi montrer qu'il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction telle que $(D^k(f_{\phi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E pour tout $k \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente, $(f_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors dans F.

5. D'après la question précédente, il suffit de montrer que $D^k(B)$ est relativement compacte dans E pour tout $k \in \mathbb{N}$. Fixons k.
Posons $X = \{f : [0;1] \to \mathbb{R} \text{ continue tq } f(0) = f(1) = 0\}$ et munissons X de la norme de la convergence uniforme. L'ensemble X est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{C}_b([0;1],\mathbb{R})$.
L'application $\phi : f \in E \to f_{|[0;1]} \in X$ est une isométrie car $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x) - g(x)| = \sup\limits_{x\in[0;1]}|f(x) - g(x)|$ si f et g sont nulles sur $\mathbb{R} - [0;1]$. De plus, ϕ est surjective : pour toute $f \in X$, la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est égale à f sur $[0;1]$ et nulle en-dehors appartient à E et on a $\phi(g) = f$.
L'application ϕ est donc un isomorphisme de E vers X et, pour montrer que $D^k(B)$ est relativement compacte dans E, il suffit de montrer que $\phi(D^k(B))$ est relativement compacte dans X. Puisque X est fermé dans $\mathcal{C}_b([0;1],\mathbb{R})$, il suffit de montrer que $\phi(D^k(B))$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}_b([0;1],\mathbb{R})$.
Puisque $\sup\limits_{f\in B}||D^k(f)|| < M$ pour une certaine constante M, l'ensemble $\phi(D^k(B))$ est équiborné dans $\mathcal{C}_b([0;1],\mathbb{R})$.
De plus, si on fixe $M' > \sup\limits_{f\in B}||D^{k+1}(f)||$, on a, pour toute $f \in B$:

$$||(D^k(f))'|| = ||D^{k+1}(f)|| < M'$$

Les fonctions de $D^k(B)$ sont donc toutes M'-lipschitziennes. Leurs images par ϕ sont donc également M'-lipschitziennes. L'ensemble $\phi(D^k(B))$ est donc équicontinu.
D'après le théorème d'Ascoli, $\phi(D^k(B))$ est donc relativement compacte dans $\mathcal{C}_b([0;1],\mathbb{R})$. C'est ce que l'on souhaitait démontrer.

6. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une norme N qui engendre la topologie de F. Notons B la boule unité pour N.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, D^k est une application linéaire continue sur F. Il doit donc exister $C_k > 0$ tel que, pour toute $f \in F$, $||D^k(f)|| \leq C_k N(f)$. L'ensemble $D^k(B)$ est alors inclus dans $B_E(0, C_k)$.
D'après la question précédente, cela implique que B est relativement compacte. Mais un espace vectoriel normé n'a sa boule unité relativement compacte que s'il est de dimension finie. C'est en contradiction avec la question 1.

Exercice 4

1. Montrons que E' est faiblement séparable.
On peut supposer que $x_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on peut vérifier que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste dense si on supprime de cette suite tous les termes égaux à 0).
Pour tout n, posons $l_n \in E''$ l'application telle que $l_n(\phi) = \phi(x_n/||x_n||)$ pour toute $\phi \in E'$.

La suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E'' car chaque l_n est de norme au plus 1 (en fait, exactement 1). Soit $\phi \in E'$ quelconque. Il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E de norme 1 telle que $\phi(u_n) \to ||\phi||$. Pour tout n, soit $\chi(n) \in \mathbb{N}$ un entier tel que $||u_n - x_{\chi(n)}|| < \frac{1}{n+1}$. Alors $||x_{\chi(n)}|| \to 1$ (puisque $||u_n|| = 1$ pour tout n) donc $\left|\left|u_n - \frac{x_{\chi(n)}}{||x_{\chi(n)}||}\right|\right| \to 0$.

Puisque ϕ est de norme finie, $\left|\phi(u_n) - \phi\left(\frac{x_{\chi(n)}}{||x_{\chi(n)}||}\right)\right| \to 0$, c'est-à-dire que $|\phi(u_n) - l_{\chi(n)}(\phi)| \to 0$. Puisque $\phi(u_n) \to ||\phi||$:

$$l_{\chi(n)}(\phi) \to ||\phi|| \qquad \Rightarrow \qquad ||\phi|| \leq \sup_n |l_n(\phi)|$$

Donc E' est faiblement séparable.

Pour tout n, d'après un corollaire du théorème de Hahn-Banach, il existe $l_n \in E'$ une forme linéaire continue de norme 1 telle que $l_n(x_n) = ||x_n||$.
La suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée puisque toutes les l_n sont choisies de norme 1.
Pour tout x, il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction telle que $x_{\phi(n)} \to x$ (puisque $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est dense). Alors, pour tout n :

$$\begin{aligned} ||x|| &\leq ||x_{\phi(n)}|| + ||x - x_{\phi(n)}|| \\ &= |l_{\phi(n)}(x_{\phi(n)})| + ||x - x_{\phi(n)}|| \\ &\leq |l_{\phi(n)}(x)| + |l_{\phi(n)}(x_{\phi(n)}) - l_{\phi(n)}(x)| + ||x - x_{\phi(n)}|| \\ &\leq |l_{\phi(n)}(x)| + 2||x - x_{\phi(n)}|| \end{aligned}$$

Puisque $||x - x_{\phi(n)}|| \to 0$, $||x|| \leq \sup_n |l_{\phi(n)}(x)| \leq \sup_n |l_n(x)|$.
Donc E est faiblement séparable.

2. Soient E un espace de Banach faiblement séparable et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé. Soit $(l_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E'$ une suite bornée comme dans la définition de la faible séparabilité.
Pour tout n, on note $\tilde{l}_n$ la restriction de l_n à F. La suite $(\tilde{l}_n)$ est bornée (car, pour tout n, $||\tilde{l}_n|| \leq ||l_n||$).
Pour tout $x \in F$, $||x|| \leq \sup_n |l_n(x)| = \sup_n |\tilde{l}_n(x)|$.
Donc F est faiblement séparable.

Supposons maintenant que F est facteur direct. Soit $G \subset E$ un supplémentaire fermé de F. On sait que G est isomorphe à E/F. Soit $\phi : E/F \to G$ un isomorphisme.
D'après le début de la question, G est faiblement séparable. Soit $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de G' comme dans la définition de la faible séparabilité.
Pour tout n, posons $\tilde{l}_n = ||\phi^{-1}|| l_n \circ \phi$.
Alors, pour tout $x \in E/F$:

$$||x|| \leq ||\phi^{-1}|| ||\phi(x)|| \leq ||\phi^{-1}|| \,.\, \sup_n |l_n(\phi(x))| = \sup_n |\tilde{l}_n(x)|$$

3. L'espace de Banach l^1 est séparable donc son dual l^∞ est faiblement séparable, d'après la question 1. Comme on a vu qu'un sous-espace fermé d'un espace faiblement séparable était séparable, un sous-espace fermé de l^∞ est faiblement séparable.

Montrons maintenant que tout espace faiblement séparable est isomorphe à un sous-espace fermé de l^∞. Soit donc E un espace de Banach faiblement séparable. Soit $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de E' telle que, pour tout $x \in E$:

$$||x|| \leq \sup_n |l_n(x)|$$

Soit $\phi : E \to l^\infty$ l'application telle que $\phi(x) = (l_1(x), l_2(x), ...)$.
Pour tout x :

$$||\phi(x)||_\infty = \sup_n |l_n(x)| \leq \left| \sup_n ||l_n|| \right| .||x||$$

et :

$$||\phi(x)||_\infty = \sup_n |l_n(x)| \geq ||x||$$

L'application ϕ est donc continue et réalise vers son image F un isomorphisme de réciproque continue (et même 1-lipschitzienne).
Comme il est isomorphe à E, qui est de Banach, F est complet. Il est donc fermé dans l^∞ et on a montré que E était isomorphe à un sous-espace fermé de l^∞.

Exercice 5

1. Montrons que c_0 est fermé. Soit $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de c_0 qui converge dans l^∞ vers une limite $u^{(\infty)}$. Il faut montrer que $u^{(\infty)} \in c_0$.
Si on voit les $u^{(n)}$ comme des fonctions de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, la suite $(u^{(n)})$ converge uniformément vers $u^{(\infty)}$. On peut donc intervertir les limites :

$$\lim_{k\to+\infty} u_k^{(\infty)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{k\to+\infty} u_k^{(n)} \right) = 0$$

Donc $u^{(\infty)} \in c_0$.

Pour tout $y \in Y$, la suite h_y n'a pour éléments que des zéros et des uns. Elle n'appartient donc à c_0 que si elle est stationnaire en 0, c'est-à-dire que si $B(y)$ est fini, ce qui n'est pas le cas.

2. Soient $y_1, ..., y_k$ des éléments distincts de Y et soient $\epsilon_1, ..., \epsilon_k$ des éléments de $\{-1; 1\}$.
Posons $u = \epsilon_1 h_{y_1} + ... + \epsilon_k h_{y_k}$ et montrons que $|l(u)| \leq ||l||$.
Soit $I = \bigcup_n B(y_i) \cap B(y_j)$. C'est un ensemble fini (d'après la troisième propriété qu'on a admise).
Pour tout $n \notin I$, $u_n = 0$ ou $u_n = 1$. En effet, n appartient à au plus l'un des $B(y_i)$ donc $u_n = \epsilon_i$ si $n \in B(y_i)$ pour un certain i et $u_n = 0$ sinon.
Posons v la suite qui coïncide avec u sur I et qui vaut 0 sur $\mathbb{N} - I$. La suite v est stationnaire en 0 (car I est fini) donc elle appartient à c_0 et $l(v) = 0$. De plus, toutes les coordonnées de $u - v$ valent 0 ou 1 donc $||u - v||_\infty \leq 1$ et $|l(u - v)| \leq ||l||$.
Puisque $l(u) = l(v) + l(u - v) = l(u - v)$, $||l(u)|| \leq ||l||$.

3. Supposons par l'absurde qu'il est infini. Soit alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Y tous distincts tels que $|l(h_{y_n})| \geq \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout n, posons $\epsilon_n = 1$ si $l(h_{y_n}) > 0$ et $\epsilon_n = -1$ si $l(h_{y_n}) < 0$.
Alors, pour tout k, $||l|| \geq |l(\epsilon_1 h_{y_1} + ... + \epsilon_k h_{y_k})| = |l(h_{y_1})| + ... + |l(h_{y_k})| \geq k\epsilon$. Lorsqu'on fait tendre k vers $+\infty$, on obtient une absurdité.

4. Pour toute $l \in F$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $E_{l,n} = \{y \in Y \text{ tq } |l(h_y)| \geq 1/n\}$. D'après la question précédente, il s'agit toujours d'un ensemble fini.
Posons $E = \bigcup_{l\in F, n\in\mathbb{N}^*} E_{l,n}$. C'est un ensemble dénombrable car c'est une union dénombrable d'ensembles dénombrables. Puisque Y n'est pas dénombrable, il existe $y \in Y$ tel que $y \notin E$. Fixons un tel y.
Pour toute $l \in F$, il n'existe pas $n \in N^*$ tel que $|l(h_y)| \geq 1/n$. On doit donc avoir $l(h_y) = 0$.
Donc $h_y \in F^\circ$.

5. Soit $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de $(l^\infty/c_0)'$. Montrons qu'il existe nécessairement $x \in l^\infty/c_0$ tel que :

$$||x|| > \sup_n |l_n(x)| \tag{1}$$

Notons $\phi : (l^\infty/c_0)' \to (l^\infty)'$ l'adjoint de la projection canonique $\pi : l^\infty \to l^\infty/c_0$. L'image de $(l^\infty/c_0)'$ par ϕ est inclus dans $c_0^\perp \subset (l^\infty)'$.
Pour tout n, notons $\tilde{l}_n = \phi(l_n) \in c_0^\perp$.
D'après la question 4. appliquée à $F = \{\tilde{l}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $y \in Y$ tel que $h_y \in F^\circ$.
Alors $l_n(\pi(h_y)) = \tilde{l}_n(h_y) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $\pi(h_y) \in l^\infty/c_0$ est un élément non-nul, puisque, d'après la première question, $h_y \notin c_0$. Si on pose $x = \pi(h_y)$, l'équation (1) est vérifiée.
Puisque c'est vrai pour toute suite bornée $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l^∞/c_0 n'est pas faiblement séparable.

Dans l'exercice précédent, on a vu que l^∞ était faiblement séparable et que, si $c_0 \subset l^\infty$ était facteur direct, alors l^∞/c_0 était faiblement séparable. Puisque l^∞/c_0 n'est pas faiblement séparable, c_0 n'est pas facteur direct.