Topologie algébrique

Examen

Vendredi 8 juin 2018

Durée 3 heures

L'usage des notes du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.

Tous les groupes d'homologie considérés dans les énoncés ci-dessous sont des groupes d'homologie singulière à coefficients entiers. Pour tout entier $n \geq 0$, on note S^n la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et on note D^n le disque unité fermé dans $\mathbb{R}^n$ (ici et dans les enoncés ci-dessous, $\mathbb{R}$ est muni de la topologie euclidienne).

Exercice 1

Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux (les réponses doivent être justifiées).

(a) Soit

$$0 \to G_1 \xrightarrow{h_1} G_2 \to 0$$

une suite exacte de groupes abéliens. Alors, h_1 est un isomorphisme.

(b) Soit

$$0 \to G_1 \xrightarrow{h_1} G_2 \xrightarrow{h_2} G_3 \to 0$$

une suite exacte courte de groupes abéliens. Alors, G_2 est isomorphe à $G_1 \times G_3$.

(c) Soit X un espace topologique non vide, et soit $x_0 \in X$ un point. Alors, pour tout entier $k \geq 2$, le groupe $\pi_k(X, x_0)$ est isomorphe à $H_k(X)$.

(d) Soit $n \geq 0$ un entier, et soit Y un CW-complexe de dimension n. Alors, pour tout entier $k > n$, on a $H_k(Y) = 0$.

(e) Soit

$$\ldots \to C_{k+1} \to C_k \to \ldots \to C_1 \to C_0$$

un complexe de chaînes de groupes abéliens. Alors, il existe un espace topologique Z tel que ce complexe de chaînes coïncide avec le complexe des chaînes singulières de Z.

(f) Soit

$$\ldots \to C'_{k+1} \to C'_k \to \ldots \to C'_1 \to C'_0$$

un complexe de chaînes de groupes abéliens libres. Alors, il existe un espace topologique Z' tel que ce complexe de chaînes coïncide avec le complexe des chaînes singulières de Z'.

Exercice 2

Soit $n \geq 1$ un entier, et soient $p_1, \ldots, p_n$ des points deux à deux distincts du tore $T = S^1 \times S^1$. On pose $X = T \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$. Soit $x_0 \in X$ un point.

(a) Calculer les groupes d'homotopie $\pi_k(X, x_0)$, $k \geq 1$.

(b) Pour tout entier $k \geq 0$, calculer le groupe d'homologie $H_k(X)$.

Exercice 3

Soient S_1 et S_2 deux surfaces topologiques connexes compactes (sans bord). La *somme connexe* $S_1 \sharp S_2$ est définie de la façon suivante. Soient $D_1 \subset S_1$ et $D_2 \subset S_2$ deux disques fermés de dimension 2, et soient $h_1 : D_1 \to D^2$ et $h_2 : D_2 \to D^2$ des homéomorphismes de D_1 et D_2, respectivement, avec le disque $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. On pose $\mathrm{Int}(D_1) = h_1^{-1}(\mathrm{Int}(D^2))$ et $\mathrm{Int}(D_2) = h_2^{-1}(\mathrm{Int}(D^2))$, où $\mathrm{Int}(D^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

On considère la somme disjointe $(S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)) \coprod (S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2))$, et on identifie $S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)$ et $S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2)$ avec leurs images par les inclusions

$$S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1) \hookrightarrow (S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)) \coprod (S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2))$$

$$S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2) \hookrightarrow (S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)) \coprod (S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2)).$$

L'espace topologique $S_1 \sharp S_2$ est obtenu comme quotient de

$$(S_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)) \coprod (S_2 \setminus \mathrm{Int}(D_2))$$

par la relation d'équivalence $\sim_{h_1,h_2}$ engendrée par $z \sim_{h_1,h_2} (h_2^{-1} \circ h_1)(z)$ pour tout $z \in D_1 \setminus \mathrm{Int}(D_1)$. On admet que le type topologique du résultat de la construction décrite ci-dessus ne dépend pas du choix de D_1, D_2, h_1 et h_2.

Soit $g \geq 0$ un nombre entier. Une surface topologique s'appelle *sphère avec g anses* (respectivement, *sphère avec g rubans de Möbius*) si elle est homéomorphe à la somme connexe de g copies du tore $S^1 \times S^1$ (respectivement, à la somme connexe de g copies du plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$).

(a) Montrer qu'une sphère avec g anses n'est pas homéomorphe à une sphère avec g_1 anses, où $g_1 \geq 0$ est un entier différent de g.
(b) Montrer qu'une sphère avec g rubans de Möbius n'est pas homéomorphe à une sphère avec g_2 rubans de Möbius, où $g_2 \geq 0$ est un entier différent de g.
(c) Soit $g_3 \geq 1$ un entier. Montrer qu'une sphère avec g anses n'est pas homéomorphe à une sphère avec g_3 rubans de Möbius.

Exercice 4

(a) Soit (X, A) une paire topologique telle que A soit non vide. Montrer que (X, A) est une paire de Borsuk si et seulement si $(X \times 0) \cup (A \times I) \subset X \times I$ est un rétracte.
(b) La paire $(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$ est-elle une paire de Borsuk ?
(c) Pour tout entier $k \geq 0$, déterminer le groupe $H_k(\mathbb{R}, \mathbb{Q})$.
(d) Soit S une surface topologique connexe et compacte (sans bord), et soit $\bar{B} \subset S$ un disque fermé. On note B l'intérieur de ce disque, et on note $\partial \bar{B}$ son bord. Montrer que $\partial \bar{B}$ n'est pas un rétracte de $S \setminus B$ (dans cette question, si besoin, on peut admettre que toute surface topologique connexe et compacte sans bord est homéomorphe à une sphère avec un certain nombre d'anses ou à une sphère avec un certain nombre de rubans de Möbius).

Exercice 5

Un espace topologique non vide X est dit *acyclique* si $\widetilde{H}_k(X) = 0$ pour tout entier k (on utilise les conventions suivantes : pour tout espace topologique X', on a $\widetilde{H}_k(X') = 0$ si $k < -1$; si X' est non vide, on a $\widetilde{H}_{-1}(X') = 0$; de plus, $\widetilde{H}_{-1}(\varnothing) = \mathbb{Z}$).

(a) Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer qu'un sous-ensemble convexe non vide $V \subset \mathbb{R}^n$ est acyclique.
(b) Soit $m \geq 2$ un entier. Soit Y un espace topologique non vide, et soient $Y_1, \ldots, Y_m \subset Y$ des sous-ensembles ouverts tels que, pour tout entier $1 \leq r \leq m-1$, l'intersection de r sous-ensembles quelconques choisis parmi $Y_1, \ldots, Y_m$ soit acyclique. Montrer que

$$\widetilde{H}_k(\cup_{i=1}^m Y_i) \simeq \widetilde{H}_{k-m+1}(\cap_{i=1}^m Y_i)$$

pour tout entier k.
(c) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert. Soit $\mathcal{C}(U)$ le complexe (non augmenté) des chaînes singulières de U, et soit $\mathcal{AC}(U)$ le complexe (non augmenté) des chaînes affines de U (soit $k \geq 0$ un entier ; un *k-simplexe singulier affine* de U est une application affine $\sigma : T^k \to U$, où $T^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ est le k-simplexe standard ; une *k-chaîne affine* dans U est une combinaison finie formelle $\Sigma_i \ell_i \sigma_i$, où $\ell_i \in \mathbb{Z}$ et σ_i est un k-simplexe singulier affine de U pour tout i). Montrer que ces deux complexes sont homotopiquement équivalents.
(d) Montrer que $H_j(U) = 0$ pour tout entier $j \geq n$.
(e) Soient $Z_1, \ldots, Z_m \subset \mathbb{R}^n$ des sous-ensembles ouverts tels que, pour tout entier $1 \leq r \leq m$, l'intersection de r sous-ensembles quelconques choisis parmi $Z_1, \ldots, Z_m$ soit non vide si $r \leq n+1$ et soit acyclique si $r \leq n$. Montrer que $\cup_{i=1}^m Z_i$ est acyclique (en particulier, non vide).
(f) Supposons que $m \geq n+2$. Soient $V_1, \ldots, V_m \subset \mathbb{R}^n$ des sous-ensembles ouverts et convexes tels que l'intersection de $m-1$ sous-ensembles quelconques choisis parmi $V_1, \ldots, V_m$ soit non vide. Montrer que $\cap_{i=1}^m V_i \neq \varnothing$.
(g) L'affirmation de (f) reste-elle vraie si $m = n+1$?