Topologie algébrique

Examen

Mercredi 24 mai 2017

Durée 3 heures

L'usage des notes du cours et des feuilles d'exercices est autorisé.

Tous les groupes d'homologie considérés dans les énoncés ci-dessous sont des groupes d'homologie singulière à coefficients entiers.

Exercice 1

Pour chacun des énoncés suivants, déterminer s'il est vrai ou faux (les réponses doivent être justifiées).

(a) Soit

$$0 \to G_1 \xrightarrow{h_1} G_2 \xrightarrow{h_2} G_3 \to 0$$

une suite exacte courte de groupes abéliens. Alors, h_1 est un isomorphisme si et seulement si $G_3 = 0$.

(b) Soit

$$0 \to G_1 \xrightarrow{h_1} G_2 \xrightarrow{h_2} G_3 \to 0$$

une suite exacte courte de groupes abéliens. Alors, h_2 est un isomorphisme si et seulement si $G_1 = 0$.

(c) Il existe une suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0 .$$

(d) Soit X un espace topologique non vide. On note SX la suspension de X. Alors, pour tout entier $k \geq 1$, les groupes $H_k(X)$ et $H_{k+1}(SX)$ sont isomorphes.

(e) Soit $f : X \to Y$ un revêtement, où X et Y sont des espaces topologiques non vides. Alors, la suspension $Sf : SX \to SY$ de f est aussi un revêtement.

(f) Soit (X, A) une paire topologique formée par deux espaces topologiques non vides contractiles. Alors, tous les groupes $H_k(X, A)$, $k \geq 0$, sont triviaux.

(g) Soit (X, A) une paire topologique formée par deux espaces topologiques non vides tels que A soit un rétracte de X. Soit $k \geq 0$ un entier. Alors, on a $H_k(X) \simeq H_k(A) \oplus G$ pour un certain groupe G.

(h) Soient (X, A) et (Y, B) des paires topologiques telles que X soit homéomorphe à Y et A soit homéomorphe à B. Alors, les groupes $H_k(X, A)$ et $H_k(Y, B)$ sont isomorphes pour tout entier $k \geq 0$.

(i) Soient m et n des entiers strictement positifs, et soit X un CW-complexe de dimension 2 tel que la décomposition cellulaire de X soit formée d'une 0-cellule, m cellules de dimension 1 et n cellules de dimension 2. Alors, $b_1(X) = b_2(X)$ si et seulement si $m = n$, où $b_1(X)$ et $b_2(X)$ sont, respectivement, le premier et le deuxième nombres de Betti de X.

(j) Soient X et Y des espaces topologiques non vides et connexes par arcs, et soit $f : X \to Y$ une application continue telle que le morphisme induit $f_* : H_k(X) \to H_k(Y)$ soit nul pour tout entier $k \geq 1$. Alors, l'application f est homotope à une application constante.

TSVP

Exercice 2

Soit $C \subset \mathbb{R}^3$ un cercle (contenu dans un plan). Soit $D_1 \subset \mathbb{R}^3$ une droite qui rencontre le disque ouvert bordé par C en exactement un point, et soit $D_2 \subset \mathbb{R}^3$ une droite disjointe du disque fermé bordé par C.

(a) Expliquer pourquoi les espaces topologiques $\mathbb{R}^3 \setminus C$, $\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup D_1)$ et $\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup D_2)$ sont connexes par arcs.

(b) Montrer que $\mathbb{R}^3 \setminus (C \cup D_1)$ est homotopiquement équivalent au tore $S^1 \times S^1$.

(c) Déterminer (à isomorphisme près) le groupe fondamental de $\mathbb{R}^3 \setminus C$.

(d) Déterminer (à isomorphisme près) le groupe fondamental du complémentaire de $C \cup D_2$ dans $\mathbb{R}^3$.

(e) Existe-t-il un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tel que $h(C \cup D_1) = C \cup D_2$?

Exercice 3

Soit $n \geq 1$ un entier, et soient p_1, …, p_n des points deux à deux distincts de $\mathbb{R}^2$. On pose $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$. Soit $x_0 \in X$ un point.

(a) Calculer les groupes d'homotopie $\pi_k(X, x_0)$, $k \geq 1$.

(b) Pour tout entier $k \geq 0$, calculer le groupe d'homologie $H_k(X)$ et le groupe d'homologie relatif $H_k(\mathbb{R}^2, \{p_1, \ldots, p_n\})$.

Exercice 4

Soit X un espace topologique non vide connexe par arcs dont tous les groupes d'homotopie sont triviaux. Soit $x_0 \in X$ un point.

(a) Soit σ^0 un 0-simplexe singulier de X. Montrer qu'il existe un 1-simplexe singulier $F_0(\sigma^0)$ tel que $\partial_1(F_0(\sigma^0)) = \sigma^0 - x_0$, où $\partial_1 : C_1(X) \to C_0(X)$ est le morphisme de bord. Fixons un tel 1-simplexe singulier $F_0(\sigma^0)$ pour tout 0-simplexe singulier σ^0 de X. On obtient un morphisme $F_0 : C_0(X) \to C_1(X)$ qui associe à toute 0-chaîne singulière $\sum_i n_i \sigma_i^0$ (où $n_i \in \mathbb{Z}$ et tout σ_i^0 est un 0-simplexe singulier de X) la 1-chaîne singulière $\sum_i n_i F_0(\sigma_i^0)$.

(b) Trouver une suite de morphismes $F_k : C_k(X) \to C_{k+1}(X)$, $k \geq 1$, telle que, pour tout entier $k \geq 1$ et pour tout k-simplexe singulier σ^k de X, on ait

$$\partial_{k+1}(F_k(\sigma^k)) = \sigma^k - F_{k-1}(\partial_k(\sigma^k)).$$

(c) Montrer que la suite $\{F_k\}_{k \geq 0}$ est une homotopie entre l'identité $\mathrm{Id} : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$ du complexe de chaînes singulières $\mathcal{C}(X)$ de X et le morphisme $\Phi : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$, $\Phi = \{\varphi_k\}_{k \geq 0}$, défini par

$$\varphi_k(c^k) = \begin{cases} \varepsilon(c^k) x_0, & \text{si } k = 0, \\ 0, & \text{si } k > 0, \end{cases}$$

pour toute chaîne singulière $c^k \in C_k(X)$, où $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ est le morphisme d'augmentation qui associe à toute 0-chaîne singulière la somme de ses coefficients.

(d) Soit $k \geq 1$ un entier. Montrer que le groupe d'homologie $H_k(X)$ de X est trivial.

(e) Soit (Y, A) une paire topologique formée par deux espaces topologiques non vides et connexes par arcs, et soit $y_0 \in A$ un point. Supposons que le groupe $\pi_k(Y, A, y_0)$ est trivial pour tout entier $k \geq 2$ et que $\pi_1(Y, A, y_0)$ est un singleton. Montrer que $H_k(Y, A) = 0$ pour tout entier $k \geq 0$.

(f) Soient Z et Z' des espaces topologiques non vides et connexes par arcs, et soit $z_0 \in Z$ un point. Supposons qu'il existe une application continue $f : Z \to Z'$ telle que f induise un isomorphisme entre $\pi_k(Z, z_0)$ et $\pi_k(Z', f(z_0))$ pour tout entier $k \geq 1$. Montrer que f induit un isomorphisme entre $H_k(Z)$ et $H_k(Z')$ pour tout entier $k \geq 0$.