FIMFA 1 **Année 2012–2013**

Examen Partiel du 26 Novembre 2012

"Intégration & Probabilités"

`120 minutes ; sans documents ni calculatrice`

Sauf mention du contraire, toutes les mesures sont positives.

Rappel : Une fonction mesurable positive est la limite croissante, au sens simple, d'une suite de fonctions étagées (mesurables) positives.

Rappel : Si G est un ouvert dans l'espace métrique E, alors $f_n(x) := [n\,\mathrm{dist}(x, G^c)] \wedge 1$, $x \in E$, est une suite de fonctions continues telle que $f_n \uparrow \mathbf{1}_G$ simplement.

EXERCICE I (2 *points*)**.** Soient $(f_n,\, n \geq 1)$, $(g_n,\, n \geq 1)$ et $(h_n,\, n \geq 1)$ des suites d'éléments de $\mathscr{L}^1(E, \mathscr{A}, \mu)$ telles que $\forall n$, $f_n \leq g_n \leq h_n$, μ-p.p. On suppose que $f_n \to f$, $g_n \to g$, $h_n \to h$, μ-p.p., où f, $h \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{A}, \mu)$, et que $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int f \,\mathrm{d}\mu$, $\int h_n \,\mathrm{d}\mu \to \int h \,\mathrm{d}\mu$.

Montrer que $\int g_n \,\mathrm{d}\mu$ converge lorsque $n \to \infty$.

EXERCICE II (14 *points*)**.**

Question A. Soit $(E, \mathscr{A}, \nu)$ un espace mesuré. Soit $g : E \to \mathbb{R}_+$ mesurable.

(A1) Montrer que $\{(x, t) \in E \times \mathbb{R}_+ : g(x) > t\} \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$.

(A2) Montrer que si ν est σ-finie, alors

$$\int_E g \,\mathrm{d}\nu = \int_0^\infty \nu(\{x \in E : g(x) > t\}) \,\mathrm{d}t.$$

(A3) Montrer que la conclusion dans (A2) reste valable sans l'hypothèse que ν soit σ-finie.

Question B. Soient μ, μ_1, μ_2, $\cdots$ des mesures positives finies sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$. On suppose que $\mu_n(G) \to \mu(G)$, pour tout ouvert $G \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\mu(\partial G) = 0$, où[1] $\partial G := \overline{G} \backslash G$ désigne la frontière de G. [En particulier, $\mu_n(\mathbb{R}^d) \to \mu(\mathbb{R}^d)$.]

(B1) Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ continue et bornée. Soit $t \geq 0$ un réel. Julie dit : La frontière de l'ouvert $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > t\}$ est incluse[2] dans $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = t\}$. Marc dit : $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) = t\} \subset \partial\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > t\}$. Qu'en pensez-vous ?

(B2) Montrer que[3] $\lambda(\mathrm{d}t)$-p.p., $\mu_n(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > t\}) \to \mu(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > t\})$.

(B3) Montrer que $\int_{\mathbb{R}^d} f \, \mathrm{d}\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^d} f \, \mathrm{d}\mu$.

(B4) Montrer que $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(G) \geq \mu(G)$, pour tout ouvert $G \subset \mathbb{R}^d$.

EXERCICE III (4 *points*)**.** Soit $(E, \mathscr{A})$ un espace mesurable. Soit $D := \{(x, x) \in E \times E : x \in E\}$, la diagonale de $E \times E$.

(i) Une famille $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ est dite tranchante si $\forall x \neq y \in E$, $\exists A \in \mathscr{C}$ tel que $\mathbf{1}_A(x) \neq \mathbf{1}_A(y)$.

Montrer que pour tout $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$, si $\sigma(\mathscr{C})$ (la tribu engendrée par $\mathscr{C}$) est tranchante, alors $\mathscr{C}$ l'est également.

(ii) On dit que la tribu $\mathscr{A}$ est distinguée s'il existe une famille dénombrable[4] $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ qui est tranchante.

Montrer que si $\mathscr{A}$ est distinguée, alors $D \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$.

(iii) Montrer la réciproque pour (ii) : si $D \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$, alors $\mathscr{A}$ est distinguée.

Indication : On pourra utiliser un résultat prouvé aux TD : si $D \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$, il existe alors une suite $A_n \in \mathscr{A}$, $\forall n \geq 1$, telle que $D \in \sigma(\{A_m \times A_n,\ m,\ n \geq 1\})$.

(iv) On considère désormais $E = \mathbb{R}$ et $\mathscr{A} := \sigma(\{x\},\ x \in \mathbb{R})$ (tribu engendrée par les singletons). Montrer que $D \notin \mathscr{A} \otimes \mathscr{A}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $D_x := \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in D\} \in \mathscr{A}$ et que $D^x := \{y \in \mathbb{R} : (y, x) \in D\} \in \mathscr{A}$. Conclure.

- fin -

[1]Notation : $\overline{G}$ est l'adhérence de G.
[2]Inclusion au sens large.
[3]Notation : λ est la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$.
[4]C'est-à-dire, au plus infinie dénombrable.