Écrivons $(X,A) \mapsto H_*(X,A)$ pour l'homologie singulière à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $H_*(X)$ pour $H_*(X,\emptyset)$. Vous pouvez admettre que $\pi_1(S^1,*) \cong \mathbb{Z}$, que S^n est simplement connexe pour $n>1$ et que $H_*(S^t)$ est $\mathbb{Z}$ pour $* \in \{0,t\}$ et 0 sinon.

(1) Soit $T := S^1 \times S^1$ le tore, où S^1 est le cercle ($S^1 \cong [0,1]/0 \sim 1$).

(a) Calculer $\pi_1(T\backslash\{*\}, t)$, pour $t \in T\backslash\{*\}$, le tore privé d'un point, en justifiant votre réponse.

(b) Soit $\Gamma := T \sharp T$ la somme connexe de deux copies du tore. (Γ est homéomorphe à $T' \cup_{S^1} T'$, où $T' = T\backslash e^0$, e^0 un voisinage ouvert contractile de $\{*\}$ homéomorphe au disque ouvert, les deux copies étant recollées le long de leurs bords $\partial T' \cong S^1$.)
Montrer que Γ admet un recouvrement ouvert $\{U,V\}$ tel que $U \cong V \cong T\backslash\{*\}$ et $U \cap V \cong S^1 \times I$. Calculer $\pi_1(\Gamma,\gamma)$, pour un point de base de $U \cap V$, à l'aide du théorème de Seifert et van Kampen.

(c) Peut-on engendrer le groupe $\pi_1(\Gamma,\gamma)$ par trois générateurs ?

(2) Soit K la bouteille de Klein, le quotient du carré $[0,1]\times[0,1]$ obtenu en identifiant $(x,0) \sim (x,1)$ et $(0,y) \sim (1,1-y)$, $\forall x,y \in [0,1]$.

(a) Montrer qu'il existe un $\mathbb{Z}/2$-revêtement Galoisien $S^1 \times S^1 \to K$.

(b) Décrire le revêtement universel de K, en justifiant votre réponse.

(c) Calculer le groupe fondamental $\pi_1(K,k)$, pour $k \in K$, et identifier le sous-groupe qui correspond à l'image de $\pi_1(S^1 \times S^1)$ induit par le revêtement $S^1 \times S^1 \to K$.

(d) Calculer $\pi_n(K,k)$, pour $n>1$.

(e) Classifier à isomorphisme près les revêtements connexes à 2-feuillets de K. Sont-ils Galoisiens ?

(3) Soit $p : E \to B$ un revêtement fini à n feuillets.

(a) Pour $t \in \mathbb{N}$, démontrer que le morphisme $\mathrm{Sing}_t(E) \to \mathrm{Sing}_t(B)$ entre les ensembles des t-simplexes singuliers est surjectif et décrire la préimage d'un simplexe singulier $g : \Delta_t^{\mathrm{top}} \to B$.

(b) Rappeler que $\mathfrak{Ch}^{\mathrm{sing}}(X)$ est le complexe de chaînes associé au groupe abélien simplicial $\mathbb{Z}[\mathrm{Sing}_\bullet(X)]$. Montrer qu'il existe un morphisme de complexes de chaînes

$$\mathrm{Tr} : \mathfrak{Ch}^{\mathrm{sing}}(B) \to \mathfrak{Ch}^{\mathrm{sing}}(E)$$

tel que la composée $\mathfrak{Ch}^{\mathrm{sing}}(p) \circ \mathrm{Tr} : \mathfrak{Ch}^{\mathrm{sing}}(B) \to \mathfrak{Ch}^{\mathrm{sing}}(B)$ est la multiplication par n.

(c) Identifier le morphisme $p_* \circ \mathrm{Tr}_* : H_*(B) \to H_*(B)$ en homologie.

(d) En déduire que $2H_*(\mathbb{R}P^n) = 0$ pour $* \notin \{0,n\}$ (rappeler que $\mathbb{R}P^n$ est le quotient de S^n par une $\mathbb{Z}/2$-action totalement discontinue).

(4) L'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ ($n \in \mathbb{N}$) est le quotient de $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ par l'action par multiplication diagonale de $\mathbb{C}^\times$: $\lambda(z_0,\ldots,z_n) = (\lambda z_0,\ldots,\lambda z_n)$.

Pour $n > t \in \mathbb{N}$, soient

$$\mathbb{C}P^t \overset{i_0}{\hookrightarrow} \mathbb{C}P^n \overset{i_1}{\hookleftarrow} \mathbb{C}P^{n-t-1}$$

les inclusions induites par $\mathbb{C}^{t+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{t+1} \times \mathbb{C}^{n-t} \cong \mathbb{C}^{n+1}$, $x \mapsto (x,0)$, et $\mathbb{C}^{n-t} \hookrightarrow \mathbb{C}^{t+1} \times \mathbb{C}^{n-t}$, $y \mapsto (0,y)$, de sorte que les images soient disjointes.

(a) Montrer que l'inclusion $\mathbb{C}P^{n-t-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^t$ est un rétracte par déformation forte.

(b) Déduire que l'inclusion $\mathbb{C}P^{n-t-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^t$ induit un isomorphisme en homologie

$$H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^{n-t-1}) \overset{\cong}{\to} H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^t).$$

(c) Montrer que $H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^0) \cong H_*(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n\backslash\{0\})$; ainsi calculer les groupes d'homologie $H_*(\mathbb{C}P^n, \mathbb{C}P^n\backslash\mathbb{C}P^0)$.

(d) Par récurrence sur n, calculer les groupes d'homologie de $\mathbb{C}P^n$, en appliquant les résultats précédents.

(Tournez la page.)

(5) On se place dans la catégorie des complexes $\mathfrak{Ch}_{\geq 0}(\mathsf{Ab})$. Soient $I_{\mathbb{Z}}$ le complexe $\mathbb{Z} \stackrel{(\mathrm{id},-\mathrm{id})}{\to} \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ concentré en degrés $1, 0$ et $\underline{\mathbb{Z}}$ le complexe $\mathbb{Z}$ concentré en degré zéro.

Soient $C_\bullet, D_\bullet, E_* \in \mathrm{Ob}\mathfrak{Ch}_{\geq 0}(\mathsf{Ab})$ des complexes de chaînes.

(a) Montrer que les deux inclusions $i_0, i_1 : \mathbb{Z} \rightrightarrows \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ et la somme $p : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(x, y) \mapsto x + y$ induisent des morphismes de complexes de chaînes : $\underline{\mathbb{Z}} \overset{i_0}{\underset{i_1}{\rightrightarrows}} I_{\mathbb{Z}} \xrightarrow{p} \underline{\mathbb{Z}}$.

(b) Montrer que $p : I_{\mathbb{Z}} \to \underline{\mathbb{Z}}$ est une équivalence d'homotopie de chaînes.

(c) Décrire $C_\bullet \otimes I_{\mathbb{Z}}$ explicitement et démontrer qu'un morphisme de complexes de chaînes

$$\phi : C_\bullet \otimes I_{\mathbb{Z}} \to D_\bullet$$

est équivalent à la donnée d'une homotopie de chaînes entre $\phi \circ i_0$ et $\phi \circ i_1$, où i_ϵ dénote $\mathrm{Id}_{C_\bullet} \otimes i_\epsilon : C_\bullet \to C_\bullet \otimes I_{\mathbb{Z}}$.

(d) Démontrer que p induit une équivalence d'homotopie de chaînes $C_\bullet \otimes I_{\mathbb{Z}} \to C \otimes \underline{\mathbb{Z}} \cong C_\bullet$. (Vous pouvez admettre l'associativité du produit tensoriel des complexes ; par exemple $(C_\bullet \otimes I_{\mathbb{Z}}) \otimes I_{\mathbb{Z}} \cong C_\bullet \otimes (I_{\mathbb{Z}} \otimes I_{\mathbb{Z}})$.)

(e) Soit $f : C_\bullet \to E_\bullet$ un morphisme de $\mathfrak{Ch}_{\geq 0}(\mathsf{Ab})$. Décrire explicitement la somme amalgamée M_f définie par le carré cocartésien :

$$\begin{tikzcd} C_\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_1"'] & E_\bullet \arrow[d] \\ C_\bullet \otimes I_{\mathbb{Z}} \arrow[r] & M_f. \end{tikzcd}$$

(Ainsi M_f se définit comme le conoyau de l'inclusion $C_\bullet \stackrel{f-i_1}{\to} E_\bullet \oplus (C_\bullet \otimes I_{\mathbb{Z}})$.)

(f) Montrer que $p : I_{\mathbb{Z}} \to \underline{\mathbb{Z}}$ induit un morphisme de complexes de chaînes $p : M_f \twoheadrightarrow E_\bullet$ et que i_0 induit une inclusion $i_0 : C_\bullet \hookrightarrow M_f$, de sorte que la composée $C_\bullet \stackrel{i_0}{\hookrightarrow} M_f \stackrel{p}{\twoheadrightarrow} E_\bullet$ soit f.

(g) Soit $g : A \to B$ un morphisme de groupes abéliens. Montrer que les morphismes $A \stackrel{(\mathrm{Id}_A, g)}{\to} A \oplus B \stackrel{-g+\mathrm{Id}_B}{\to} B$ définissent une suite exacte courte de groupes abéliens.

(h) A l'aide de la suite exacte courte de complexes $0 \to C_\bullet \to E_\bullet \oplus (C_\bullet \otimes I_{\mathbb{Z}}) \to M_f \to 0$ qui définit M_f, montrer que $p : M_f \to E_\bullet$ induit un isomorphisme en homologie.

(i) Montrer que le morphisme $f : C_\bullet \to E_\bullet$ induit une suite exacte longue

$$\ldots \to H_n(C_\bullet) \stackrel{H_n f}{\to} H_n(E_\bullet) \stackrel{\alpha}{\to} H_n(C_f) \to H_{n-1}(C_\bullet) \to \ldots$$

en explicitant la définition du complexe C_f et en expliquant la définition du morphisme α.

(6) Soit $e^n \subset S^n$ l'inclusion d'un hémisphère fermé dans le n-sphère S^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

On dit qu'une suite exacte courte de foncteurs à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens

$$0 \to F_0(X) \stackrel{\iota_X}{\to} F_1(X) \stackrel{\pi_X}{\to} F_2(X) \to 0,$$

(F_j sont des foncteurs et ι, π sont des transformations naturelles) est *scindée naturellement* s'il existe une tranformation naturelle $\sigma_X : F_2(X) \to F_1(X)$ telle que $\pi_X \circ \sigma_X = \mathrm{Id}_{F_2(X)}$.

(a) Montrer qu'il existe une suite exacte courte qui exprime $H_*(S^n \times X)$ en termes de $H_*(X)$ et de $H_*(S^n \times X, e^n \times X)$ et montrer que la suite exacte courte est scindée naturellement en X.

(b) Si $n > 0$, en utilisant excision, montrer qu'il existe une suite exacte courte qui relie $H_*(S^n \times X, e^n \times X)$ à $H_*(X)$ et $H_*(S^{n-1} \times X)$ et montrer que la suite exacte courte est scindée naturellement en X.

(c) Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un isomorphisme naturel en X :

$$H_*(S^n \times X) \cong H_*(X) \oplus H_{*-n}(X)$$