École Normale Supérieure Département de Mathématiques et Applications

Examen d'Algèbre 1

Durée : 3 heures. Aucun document n'est autorisé.

I. Exercice.

1° Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathbb{Z}^n$. Montrer que, si les coordonnées de e_1 ont un pgcd égal à 1, alors on peut compléter e_1 en une base de $\mathbb{Z}^n$.

2° Soit e_1 un vecteur non nul de $\mathbb{Z}^n$. À quoi est isomorphe le quotient de $\mathbb{Z}^n$ par $\mathbb{Z}e_1$?

II. Exercice.

On regarde la représentation de permutation du groupe symétrique S_6 dans le sous-espace $V \subset \mathbb{F}_2^6$ donné par

$$V = \{(x_1, \dots, x_6) \in \mathbb{F}_2^6, \sum_1^6 x_i = 0\}.$$

1° Montrer que la forme bilinéaire sur V donnée pour $x, y \in V$ par

$$B(x, y) = \sum_1^6 x_i y_i$$

est alternée. Calculer son noyau.

2° En déduire une représentation fidèle de S_6 sur un quotient W de V de dimension 4.

3° Montrer qu'une transposition de S_6 agit sur W par une transvection.

4° Déduire l'isomorphisme $S_6 \simeq Sp_2(\mathbb{F}_2)$.

III. Problème.

Soit V une représentation complexe irréductible du groupe fini G et χ_V son caractère.

Préliminaires. 1° Montrer que la représentation $V \otimes V$ se décompose en $V \otimes V = \Lambda^2 V \oplus S^2 V$. Montrer que si (e_i) est une base de V, alors $(e_i e_j - e_j e_i)_{i<j}$ est une base de $\Lambda^2 V$ et $(e_i e_j + e_j e_i)_{i \leq j}$ est une base de $S^2 V$.

2° Montrer que $\mathrm{Hom}(V^*, V)$ est isomorphe à $V \otimes V$. En déduire que la représentation V^* est isomorphe à la représentation V si et seulement si $V \otimes V$ admet un vecteur invariant sous G. Montrer que, dans ce cas, la multiplicité de la représentation triviale dans $V \otimes V$ est égale à 1.

Partie A. Le but de cette partie est de donner une caractérisation des représentations irréductibles V dont le caractère est *réel*, c'est-à-dire $\chi_V = \bar{\chi}_V$.

1° Rappeler pourquoi $\bar{\chi}_V$ est le caractère de V^*. Que signifie le fait que χ_V soit réel ?

2° Montrer que le caractère de $\Lambda^2 V$ est donné par $\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2))$.

3° Pour $g \in G$, soit $r_n(g) = \mathrm{card}\{h \in G, h^n = g\}$. Montrer que

$$r_n = \sum_{\substack{\chi \text{ caractère} \\ \text{irréductible}}} \nu_n(\chi)\chi, \quad \text{où} \quad \nu_n(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^n).$$

4° Montrer que si χ_V n'est pas réel, alors $\nu_2(\chi_V) = 0$.

5° Montrer que si χ_V est réel, alors $\nu_2(\chi_V) = -1$ si la sous-représentation triviale de $V \otimes V$ est dans $\Lambda^2 V$, et $+1$ si elle est dans $S^2 V$.

Partie B. Le but de cette partie est de caractériser les représentations irréductibles V *réelles*, c'est-à-dire telles qu'il existe une représentation réelle $V_{\mathbb{R}}$, avec $V \simeq V_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$.

Dans la suite, on suppose que χ_V est réel.

1° Montrer que $V^* \otimes V^*$ contient une seule fois la représentation triviale. Soit $B \in (V^* \otimes V^*)^G$ un générateur de cette représentation triviale. Montrer que B définit une forme bilinéaire non dégénérée sur V, invariante sous G. Montrer qu'une telle forme est unique à multiplication près par un complexe. Que signifie sur la forme bilinéaire le fait que B soit élément de $S^2 V^*$, ou bien de $\Lambda^2 V^*$?

2° Montrer que si V est une représentation réelle, alors $\nu_2(\chi) = 1$.

3° Montrer que V admet un produit scalaire hermitien h, invariant sous G, unique à multiplication près par un réel strictement positif.

4° Supposons $\nu_2(\chi) = 1$. Posons $h(x, y) = B(u(x), y)$. Montrer que u est un endomorphisme semi-linéaire de V (c'est-à-dire $u(\lambda v) = \bar{\lambda} v$ pour tout complexe λ), invariant sous G. Que dire de u^2 ?

5° En déduire que si $\nu_2(\chi) = 1$, alors la représentation V est réelle.