Examen de Géométrie Différentielle

Durée 3h. Pas de calculatrice, document, téléphone, etc. On peut admettre une question pour traiter les suivantes.

I

1. Étant donné un réel a, on considère dans $\mathbb{R}^3$ la surface S_a d'équation

$$-x^2 + y^2 + z^2 = a.$$

a. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles S_a est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
b. Montrer que pour $a > 0$ la surface S_a est difféomorphe à $\mathrm{S}^1 \times \mathbb{R}$.
c. Montrer que S_1 et S_{-1} ne sont pas difféomorphes.
2. Plus généralement, étant donné $n \geqslant 2$ et $a = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on considère le polynôme unitaire $\mathrm{P}_a(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$ et la surface $\mathrm{S}_a \subset \mathbb{R}^3$ d'équation

$$-x^2 + y^2 + \mathrm{P}_a(z) = 0.$$

a. Montrer que si P_a n'a pas de racine double réelle, alors S_a est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. On note $\Delta = \{a \in \mathbb{R}^n, \mathrm{P}_a \text{ a une racine double}\}$.
b. On considère $\Sigma = \{((x,y,z),a) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^n, -x^2 + y^2 + \mathrm{P}_a(z) = 0\} \subset \mathbb{R}^{n+3}$. Montrer que Σ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+3}$, et que l'application $f : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ définie par $f((x,y,z),a) = a$ est une submersion en dehors de $f^{-1}(\Delta)$.
c. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème d'Ehresmann pour déduire que si $a \in \mathbb{R}^n \setminus \Delta$ et $a' \in \mathbb{R}^n$ est suffisamment proche de a, alors S_a et $\mathrm{S}_{a'}$ sont difféomorphes ? que faudrait-il faire pour le démontrer ? (on demande ici seulement une idée de ce qu'il faudrait faire, mais aucune construction ou démonstration précise).

II

1.a. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathrm{H}^\bullet(\mathbb{R} \times \mathrm{U})$ et $\mathrm{H}^\bullet(\mathrm{U})$ sont isomorphes.
b. Soit A un fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbb{R}^{n+1} \setminus (\mathrm{A} \times \mathbb{R}_+)$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{R}^n \times \{-1\}$.
2. Soit A une partie fermée de $\mathbb{R}^n$, incluse strictement dans $\mathbb{R}^n$. On la plonge dans $\mathbb{R}^{n+1}$ par $x \mapsto (x, 0)$. Montrer que

$$\mathrm{H}^p(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \mathrm{A}) \simeq \begin{cases} \mathrm{H}^{p-1}(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{A}), & p \geqslant 2, \\ \mathrm{H}^0(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{A})/\mathbb{R}, & p = 1, \\ \mathbb{R}, & p = 0. \end{cases}$$

3. Soit la sphère $\mathrm{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^n$ pour $1 \leqslant d \leqslant n$. Calculer $\mathrm{H}^\bullet(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{S}^{d-1})$.

III

On considère le groupe $\mathrm{G} = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ et son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.
1. Montrer que toute classe de cohomologie $z \in \mathrm{H}^p(\mathrm{G})$ est invariante par translation à gauche : $\mathrm{L}_g^* z = z$ pour tout $g \in \mathrm{G}$, où $\mathrm{L}_g(g') = gg'$ est la translation à gauche dans le groupe.

2. Montrer que l'application $G \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ définie par

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

est une équivalence d'homotopie. En déduire la cohomologie de G.

3. Donner une base (A, B, C) de $\mathfrak{g}$ et exprimer dans cette base les crochets $[A, B]$, $[B, C]$ et $[C, A]$.

4. Décrire le complexe de de Rham des formes différentielles sur G invariantes à gauche. En déduire qu'il n'est pas possible de représenter une classe de cohomologie non nulle $z \in H^1(G)$ par une forme différentielle fermée invariante à gauche.

On rappelle la formule de Maurer-Cartan :

$$\begin{aligned} d\alpha(X_0, \dots, X_p) = &\sum_i (-1)^i X_i \cdot \alpha(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_p) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_p). \end{aligned}$$

IV

Soit une surface riemannienne orientée S. On note $\langle , \rangle$ le produit scalaire sur chaque espace tangent, $|\cdot|$ la norme, et vol_S la forme volume de S.

0. Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2. Vérifier que l'espace dual E^* admet aussi une structure d'espace euclidien orienté, telle que si (e_1, e_2) est une base orthonormée directe de E, alors la base duale (e^1, e^2) est une base orthonormée directe de E^*.

1.a. Soit une base orthonormée directe locale (X_1, X_2) de TS sur un ouvert $U \subset S$, et (X^1, X^2) la base duale de T^*S sur U. Montrer qu'on définit une 1-forme $\omega \in \Omega^1(U)$ par les formules

$$dX^1 = \omega \wedge X^2, \quad dX^2 = -\omega \wedge X^1.$$

Donner la relation entre ω et les coefficients du crochet $[X_1, X_2]$ dans la base (X_1, X_2).

b. On suppose que S est plongée isométriquement dans $\mathbb{R}^3$ (le produit scalaire sur TS est la restriction du produit scalaire de $\mathbb{R}^3$, qu'on notera aussi $\langle , \rangle$). On note $\mathbb{I}$ sa seconde forme fondamentale et $\vec{n}$ le vecteur normal. Étant donnée la trivialisation orthonormale (X_1, X_2), on définit $A^1(X) = \mathbb{I}(X_1, X)$ et $A^2(X) = \mathbb{I}(X_2, X)$. En considérant les X_i comme applications de S dans $\mathbb{R}^3$, montrer les formules

$$dX_1 = \omega X_2 + A^1 \vec{n}, \quad dX_2 = -\omega X_1 + A^2 \vec{n}.$$

2.a. On note J la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans chaque espace tangent ou cotangent : donc $JX_1 = X_2$, $JX_2 = -X_1$, et de même $JX^1 = X^2$ et $JX^2 = -X^1$. Soit α une 1-forme sur S, montrer que $\alpha \wedge J\alpha = |\alpha|^2 \mathrm{vol}_S$.

b. Soit f une fonction C^∞ sur S, on définit une 2-forme $\Delta f \in \Omega^2(S)$ par $\Delta f = d(J(df))$. On suppose S compacte : montrer que $\int_S f \Delta f = -\int_S |df|^2 \mathrm{vol}_S$; en déduire que $\Delta f = 0$ si et seulement si f est constante.

3.a. Soit $v \in \mathbb{R}^3$ et $f_v : S \to \mathbb{R}$ définie par $f_v(x) = \langle v, x \rangle$. Calculer Δf_v (on pourra décomposer df_v sur la base (X^1, X^2) de 1-formes). En déduire que S est minimale (c'est-à-dire la courbure moyenne est nulle) si et seulement si $\Delta f_v = 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^3$.

b. Déduire qu'il n'existe pas de surface minimale compacte dans $\mathbb{R}^3$.