Aspects rigoureux de la mécanique statistique à l'équilibre Exercices sur les équivalences entre modèles

Jérémie Bouttier et Guilhem Semerjian

19 février 2015

1 Couplage entre modèle de Potts et FK-percolation

On revisite la relation entre le modèle de Potts à q états et la FK-percolation dans un langage légèrement différent. On considère un graphe connexe fini $G = (V, E)$ (non-orienté mais possiblement avec boucles et arêtes multiples) et la fonctionnelle $\Psi : \{1, \ldots, q\}^V \times \{0, 1\}^E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi(\eta, \omega) = \prod_{i \sim j} (v \delta_{\eta_i, \eta_j})^{\omega_{ij}}$$

où le produit porte sur toutes les arêtes du graphes, δ est le symbole de Kronecker et v un réel positif (par convention $0^0 = 1$).

1. Montrer que

$$\Psi_1(\eta) = \sum_{\omega} \Psi(\eta, \omega)$$

est le poids de Boltzmann de la configuration η dans le modèle de Potts à q états en champ nul sur G, et donner la relation entre v et température inverse β. En déduire que

$$Z = \sum_{\eta} \sum_{\omega} \Psi(\eta, \omega)$$

est la fonction de partition du modèle de Potts et que $\Psi_1(\eta)/Z$ est la probabilité de Gibbs-Boltzmann de la configuration η dans le modèle de Potts.

2. Montrer que

$$\Psi_2(\omega) = \sum_{\eta} \Psi(\eta, \omega)$$

est proportionnel à

$$q^{C(\omega)} \prod_{e \in E} (p \delta_{\omega_e, 1} + (1 - p) \delta_{\omega_e, 0})$$

où $C(\omega)$ est le nombre de composantes connexes du sous-graphe associé à ω, et p est une quantité qu'on reliera à v. La quantité $\Psi_2(\omega)/Z$ est la probabilité de la configuration ω dans le modèle de la *FK-percolation* sur G. (Comme expliqué en cours, le fait que $\Psi_2(\omega)$ soit polynomial en q permet d'étendre le modèle aux valeurs non entières de q.)

3. Considérons deux sommets i, j non nécessairement voisins. Quelle est la probabilité d'avoir $\eta_i = \eta_j$ dans le modèle de Potts à température nulle ? À température infinie ? Pour une température quelconque, relier cette probabilité à celle que i et j soient dans une même

composante connexe de ω pour la FK-percolation. Discuter qualitativement pourquoi l'apparition d'un ordre à longue portée dans le modèle de Potts s'interprète comme l'apparition d'une composante géante dans la FK-percolation.

En termes probabilistes, la construction ci-dessus est un *couplage* (réalisation de variables aléatoires sur un même espace de probabilité), appelé couplage d'Edwards-Sokal.

2 Couplage entre modèle $O(n)$ et gaz de boucles

Toujours sur un graphe fini $G = (V, E)$, considérons une configuration de spins $\vec{\sigma} \in (S^{n-1})^V$ où S^{n-1} est la sphère-unité de dimension $n-1$:

$$S^{n-1} = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n, \vec{u} \cdot \vec{u} = 1\}.$$

On considère ensuite le hamiltonien

$$H(\vec{\sigma}) = -\sum_{i \sim j} \ln(1 + x\vec{\sigma_i} \cdot \vec{\sigma_j})$$

avec $x < 1$, et on se place à température inverse $\beta = 1$. La fonction de partition du modèle $O(n)$ est donnée par

$$Z = \int e^{-H(\vec{\sigma})} \prod_{i \in V} d\mu(\vec{\sigma_i})$$

où μ la mesure de probabilité uniforme sur S^{n-1}, et la mesure de Gibbs-Boltzmann du modèle $O(n)$ est $(e^{-H(\vec{\sigma})}/Z) \prod_{i \in V} d\mu(\vec{\sigma_i})$.

1. Expliquer qualitativement pourquoi, bien qu'on ait supposé $\beta = 1$, x joue néanmoins un rôle analogue à celui d'une température. Montrer que, pour $n = 1$, on retrouve précisément le hamiltonien du modèle d'Ising.
2. Pour $\omega \in \{0, 1\}^E$, posons
$$\Upsilon(\vec{\sigma}, \omega) = \prod_{i \sim j} (x\vec{\sigma_i} \cdot \vec{\sigma_j})^{\omega_{ij}}.$$
Montrer que
$$e^{-H(\vec{\sigma})} = \Upsilon_1(\vec{\sigma}) := \sum_{\omega} \Upsilon(\vec{\sigma}, \omega).$$
3. Expliquer (sans calcul !) pourquoi
$$\int (\vec{u} \cdot \vec{u_1})\, d\mu(\vec{u}) = 0,$$
$$\int (\vec{u} \cdot \vec{u_1})(\vec{u} \cdot \vec{u_2})\, d\mu(\vec{u}) = \frac{\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}}{n},$$
$$\int (\vec{u} \cdot \vec{u_1})(\vec{u} \cdot \vec{u_2})(\vec{u} \cdot \vec{u_3})\, d\mu(\vec{u}) = 0,$$
quels que soient les vecteurs $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$.
4. Supposons que le graphe est trivalent (chaque sommet a exactement trois arêtes incidentes). Montrer que la quantité
$$\Upsilon_2(\omega) = \int \Upsilon(\vec{\sigma}, \omega) \prod_{i \in V} d\mu(\vec{\sigma_i})$$

est non-nulle si et seulement si le sous-graphe associé à ω est formé par l'union de cycles disjoints (en physique, on parle de *gaz de boucles*), et qu'on a alors

$$\Upsilon_2(\omega) = n^{L(\omega)}(x/n)^{|\omega|}$$

où $L(\omega)$ est le nombre de cycles et $|\omega|$ la somme de leurs longueurs. Expliquer pourquoi ceci permet de donner un sens à la fonction de partition du modèle $O(n)$ pour n non entier.

5. Considérons deux sommets i, j non nécessairement voisins. Comment interpréter graphiquement la valeur moyenne de $\vec{\sigma_i} \cdot \vec{\sigma_j}$ dans le modèle $O(n)$? Qu'en est-il dans la limite $n \to 0$?

3 Modèle de Potts à $q \to 0$

Montrer que, si on fait tendre q vers 0 dans le modèle de la FK-percolation en gardant le rapport v/q fixé, les configurations ayant une contribution dominante sont les *forêts couvrantes* (sous-graphes couvrants acycliques mais non nécessairement connexes). Si on garde plutôt le rapport v/q^σ fixé avec $\sigma \in (0, 1)$, montrer que les configurations dominantes sont les *arbres couvrants*. (Indication : le *nombre cyclomatique* du sous-graphe associé à ω, défini par $L(\omega) = |\omega| - |V| + C(\omega)$, est un entier positif qui est nul si et seulement si le sous-graphe est acyclique.)