Algébricité des sous-variétés analytiques de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ *

Rémy Tuyéras

*(sous la direction de François Charles)

Table des matières

Résumé

Nous savons qu'une sous-variété algébrique peut être vue comme une sous-variété analytique. Cependant, rien ne nous indique *a priori* qu'une sous-variété analytique est algébrique. C'est pourtant ce que nous allons démontrer en ce qui concerne les sous-variétés analytiques de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

1 Introduction

Nous supposerons dans l'exposé présent les notions de base de l'analyse complexe connues du lecteur. En particulier, si γ est un lacet de classe C^1, nous noterons $\mathrm{Ind}_z(\gamma)$ l'*indice de γ par rapport à z*. Pour montrer qu'une sous-variété analytique de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ est algébrique nous nous reposerons principalement sur un résultat qui porte le nom de *théorème de préparation de Weierstraß* et qui fera l'objet de notre première section. Ensuite, nous mettrons en avant, dans la section suivante, une décomposition possible des sous-variétés analytiques, nous permettant de restreindre l'étude à des sous-ensembles plus avantageux. Enfin, à l'aide de tous ces résultats, nous démontrerons dans la dernière section l'algébricité des sous-variétés analytiques de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Les deux dernières sections reposent principalement sur l'article [1] de János Kollár

2 Théorème de préparation de Weierstraß

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.1. *(Théorème de préparation de Weierstraß) Soit f une fonction holomorphe à 2 variables au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$ telle que $f(0,0) = 0$ et $f(0,.) \not\equiv 0$. Alors il existe des fonctions holomorphes $b_1, \dots, b_k$ à 1 variable et une fonction holomorphe u à 2 variables telles qu'en un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$*

$$\begin{cases} u(x,y) \neq 0 \\ f(x,y) = \left(y^k + b_1(x)y^{k-1} + \cdots + b_k(x)\right)u(x,y). \end{cases}$$

Pour le démontrer, il nous faut utiliser une généralisation du théorème de l'argument. Munis de cette généralisation, il nous sera alors facile, via les formules de Newton, de démontrer le théorème.

2.1 Théorème de l'argument

La forme du *théorème de l'argument* censée être connue du lecteur est la suivante :

Théorème 2.2. *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet C^1 par morceaux, partageant le plan en les deux composantes connexes*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid Ind_z(\gamma) = 1\} \quad et \quad \{z \in \mathbb{C} \mid Ind_z(\gamma) = 0\}$$

Si f est holomorphe sur un voisinage U de $K = \gamma([a,b]) \cup \{z \in \mathbb{C} \mid Ind_z(\gamma) = 1\}$ et ne s'annule pas sur $\gamma([a,b])$, alors le nombre de zéros de f (comptés avec leur multiplicité) dans K est donné par

$$k = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f'}{f} \ .$$

Remarque : En particulier, le théorème montre de K est compact et donc que le nombre des zéros de f dans K, comptés avec leur multiplicité, est fini.

Le but de cette sous-section est alors d'étendre ce théorème au cas où un terme mutiplicatif dépendant de z est introduit dans l'intégrale. Plus concrètement nous allons démontrer le théorème que voici :

Théorème 2.3. *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet C^1 par morceaux, partageant le plan en les deux composantes connexes*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid Ind_z(\gamma) = 1\} \quad et \quad \{z \in \mathbb{C} \mid Ind_z(\gamma) = 0\}$$

Si f est holomorphe sur un voisinage U de $K = \gamma([a,b]) \cup \{z \in \mathbb{C} \mid Ind_z(\gamma) = 1\}$ et ne s'annule pas sur $\gamma([a,b])$, alors si l'énumération $r_1, r_2, \ldots, r_k$ représente les zéros de f (comptés avec leur multiplicité), pour toute fonction g holomorphe sur U on a l'identité

$$g(r_1) + g(r_2) + \cdots + g(r_k) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{g(y)f'(y)}{f(y)} dy \ .$$

Avant de commencer la preuve, il nous faut faire quelques rappels de théorèmes. Tout d'abord nous aurons besoin du *théorème de prolongement analytique* toujours utile lorsque des racines apparaissent dans un diviseur.

Théorème 2.4. *(prolongement analytique) Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, z_0 un point de U et f une fonction holomorphe sur $U \backslash \{z_0\}$, bornée au voisinage de z_0. Alors il existe un prolongement analytique de f sur U, i.e. une fonction $\tilde{f}$ holomorphe sur U et telle que $f = \tilde{f}$ sur $U \backslash \{z_0\}$.*

Ensuite nous en viendrons à utiliser le théorème de la *Formule de la moyenne* qui, comme pourra le remarquer le lecteur, peut être considéré comme une généralisation de la notion d'indice qui intervient dans la preuve classique du théorème de l'argument.

Théorème 2.5. *(Formule de la moyenne) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, et $\gamma : [a,b] \to U$ un lacet C^1 par morceaux homotope à un point. Si g est holomorphe sur U, alors pour tout $z_0 \in U \backslash \gamma([a,b])$,*

$$g(z_0) Ind_{z_0}(\gamma) = \int_\gamma \frac{g(z)}{z - z_0} \frac{dz}{2i\pi}$$

Maintenant munis de ces deux énoncés, nous pouvons débuter la preuve du théorème :

Preuve : Notons $(z_j)_{1\leq j\leq N}$ les zéros de f dans K et (k_j) leurs mutliplicités respectives. On définit alors pour tout $z \in U\backslash \cup_{j=1}^{k} \{z_j\}$

$$h : \begin{cases} U \to \mathbb{C} \\ z \mapsto f(z)\prod_{j=1}^{N}(z-z_j)^{-k_j} \\ z_j \mapsto (f(z_j)^{(k_j)}/k_j!)\prod_{l\neq j}(z-z_j)^{-k_l} \end{cases}$$

de sorte que h est holomorphe sur $U\backslash \cup_{j=1}^{k} \{z_j\}$. En utilisant le développement en série entière de f au voisinage de z_j, on voit que h est bornée au voisinage de z_j et continue en z_j. Cela entraine, d'après le théorème de prolongement analytique, que la fonction h est holomorphe sur U.

Ensuite, par construction, on a que h ne s'annule par sur K, et donc d'après le théorème des zéros isolés appliqué à h sur U, on peut trouver un voisinage V de K dans U sur lequel h ne s'annule pas non plus. Ceci implique que la fonction h'/h, et par conséquent la fonction gh'/h, est holomorphes sur V. Comme le lacet γ est homotope à un point dans $K = \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Ind}_z(\gamma) = 0\}$, d'après le théorème de Cauchy on a que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{gh'}{h} = 0$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{g(z)f'(z)}{f(z)}dz - \sum_{j=1}^{N}\int_\gamma \frac{g(z)k_j}{z-z_j}\frac{dz}{2i\pi} = 0.$$

Or, comme $\mathrm{Ind}_{z_j}(\gamma) = 1$, par la formule de la moyenne, on a l'identité

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{g(z)f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{N} g(z_j)k_j = g(r_1) + g(r_2) + \cdots + g(r_k)$$

ce qui prouve le théorème. □

Dans le cas du théorème de Weiertraß, la fonction g aura la forme $z \mapsto z^m$. Ainsi la quantité

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{g(z)f'(z)}{f(z)}dz$$

sera égale à une somme de mêmes puissances. Or ce genre de somme intervient aussi dans les formules de Newton, lesquelles nous serons utiles pour démontrer le théorème de Weierstraß.

2.2 Formules de Newton

Soit $r_1, \ldots, r_n$ une énumération de n éléments de $\mathbb{C}$. On considère, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la somme $S_m = \sum_{i=1}^{n} r_i^m$ et on note $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les polynômes symétriques élémentaires de $r_1, \ldots, r_n$ définies par

$$\sigma_p = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n} r_{i_1}\ldots r_{i_p}$$

Le but de cette sous-section est de montrer que les $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ peuvent s'exprimer polynomialement en fonction des sommes S_m pour $1 \leq m \leq n$. Pour commencer, remarquons que le polynôme $P = \prod_{i=1}^n (X - r_i) \in \mathbb{C}[X]$ a pour expression

$$P = X^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sigma_k X^{n-k}$$

Cela suppose que l'on pourrait raisonner sur les coefficients de polynômes. C'est la démarche que nous allons suivre. Prenons $(\alpha, z) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|\alpha z| < 1$. On a alors le développement en série entière

$$\frac{1}{1 - \alpha z} = \sum_{p=0}^{+\infty} \alpha^p z^p$$

Si l'on applique ce développement à $\alpha = r_i$ (pour $1 \leq i \leq n$) et que l'on somme entre elles les relations obtenues, il vient l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - r_i z} = \sum_{p=0}^{+\infty} S_p z^p$$

qui est un développement valable au voisinage de 0. On peut alors essayer de trouver la fraction rationelle dans $\mathbb{C}(X)$ dont $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - r_i X}$ est le développement en éléments simples. Tout d'abord, nous avons les relations

$$\tfrac{P'}{P} = \sum_{i=1}^n \tfrac{1}{X - r_i} \quad \text{et donc} \quad \tfrac{XP'}{P} = \sum_{i=1}^n \tfrac{1}{1 - r_i X}$$

et en substituant $1/X$ par X,

$$\sum_{i=1}^n \tfrac{1}{1 - r_i X} = \tfrac{P'(1/X)}{XP(1/X)} = \tfrac{X^{n-1} P'(1/X)}{XP(1/X)}.$$

Puisque $P = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_k X^{n-k}$ et $P' = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n - k) \sigma_k X^{n-k-1}$ (avec $\sigma_0 = 1$), on obtient finalement

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - r_i X} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n - k) \sigma_k X^{n-k-1}}{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma_k X^{n-k}}$$

Par conséquent, pour z voisin de 0, on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n - k) \sigma_k X^{n-k-1} = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} S_p z^p \right) \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma_k X^{n-k} \right).$$

D'après l'unicité des coefficients d'une série entière et la règle du produit de Cauchy, le coefficient de z^p, pour p variant de 1 à $n - 1$, vaut

$$(-1)^p \sigma_p (n - p) = S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \sigma_2 S_{p-2} - \cdots + (-1)^p \sigma_p \underbrace{S_0}_{=n}$$

ce qui signifie que l'on a le système d'équations

$$\begin{aligned}
&0 = S_1 - \sigma_1 \\
&0 = S_2 - \sigma_1 S_1 + 2\sigma_2 \\
&\vdots \\
&0 = S_n - \sigma_1 S_{n-1} + \sigma_2 S_{n-2} - \cdots + (-1)^n n\sigma_n.
\end{aligned}$$

La résolution de ce système d'équations linéaires (formé des formules de Newton) montre alors que les polynômes symétriques élémentaires $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ peuvent s'exprimer polynomialement en les sommes de puissances $S_1, \ldots, S_n$.

2.3 Preuve du théorème

Nous pouvons maintenant commencer la preuve du théorème.

Théorème 2.6. *Soit f une fonction holomorphe à 2 variables au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$ telle que $f(0,0) = 0$ et $f(0,.) \not\equiv 0$. Alors il existe des fonctions holomorphes $b_1, \ldots, b_k$ à 1 variable et une fonction holomorphe u à 2 variables telles qu'en un voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$*

$$\begin{cases} u(x,y) \neq 0 \text{ où } x \in \mathbb{C}^{n-1} \\ f(x,y) = \left(y^k + b_1(x)y^{k-1} + \cdots + b_k(x)\right) u(x,y) \text{ où } x \in \mathbb{C}^{n-1} \end{cases}$$

Preuve : Comme $y \mapsto f(0,y)$ n'est pas identiquement nulle et qu'elle est holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}$, d'après le théorème des zéros isolés, il existe un petit $\epsilon > 0$ tel que $f(0,y) \neq 0$ pour tout $|y| = \epsilon$. Par continuité, on a alors qu'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x,y) \neq 0$ pour $|y| = \epsilon$, $|x| < \delta$. Pour un élément $x \in \mathbb{C}$ fixé, considérons $r_1(x), \ldots, r_{k(x)}(x)$ les racines de $f(x,.)$ (comptées avec leur multiplicité) à l'intérieur du disque de rayon ϵ. Par le théorème de l'argument on a que

$$r_1(x)^m + \cdots + r_{k(x)}(x)^m = \frac{1}{2\pi i} \int_{|y|=\epsilon} \frac{y^m \partial f / \partial y}{f} dy$$

Par définition de δ, on peut affirmer que le terme de droite, qui est une intégrale sur un disque de rayon $\epsilon > 0$, est une fonction holomorphe en x pour $|x| < \delta$. Et puisque m a été pris quelconque, si l'on prend $m = 0$ (c'est le cas particulier du théorème de l'argument classique), on voit que $k(x)$ est égale à une constante (disons k) pour $|x| < \delta$. Maintenant, si l'on pose

$$S_m(x) = \sum_{i=1}^{k(x)} r_i(x)^m = \sum_{i=1}^{k} r_i(x)^m$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a que $S_m(x)$ est holomorphe pour $|x| < \delta$. Cela implique, par la même occasion, que les polynômes élémentaires symétriques $\sigma_1(x), \ldots, \sigma_k(x)$ des $r_i(x)$, étant polynomials en les sommes de puissances $S_m(x)$, sont holomophes pour $|x| < \delta$.

Or, le polynôme $P_x(y) = \Pi_{i=1}^k (y - r_i(x))$, qui s'écrit aussi

$$P_x(y) = y^k - \sigma_1(x) y^{k-1} + \cdots + (-1)^k \sigma_k(x)$$

a les mêmes racines que $y \mapsto f(x,y)$, comptées avec leur multiplicité, pour $|y| < \epsilon$ avec $|x| < \delta$. Ainsi $y \mapsto f(x,y)$ et P_x sont deux fonctions holomorphes qui, au voisinage de leurs racines pour $|y| < \epsilon$ avec $|x| < \delta$, ont des développements en série entière de même valuation. On en déduit que le quotient de $f(x,y)$ par $y^k - \sigma_1(x)y^{k-1} + \cdots + (-1)^k\sigma_k(x)$ reste borné et non nul par rapport à la variable y au voisinage des $r_i(x)$. D'après le théorème de prolongement analytique, on peut alors affirmer que le quotient de $f(x,y)$ par $y^k - \sigma_1(x)y^{k-1} + \cdots + (-1)^k\sigma_k(x)$ est holomorphe et non nul par rapport à la variable y à l'intérieur du disque de rayon ϵ avec $|x| < \delta$. Ce quotient étant bien entendu holomorphe et non nul par rapport à la variable x pour $|x| < \delta$ avec $|y| < \epsilon$, il vient qu'il est holomorphe et non nul pour $|x| < \delta$ et $|y| < \epsilon$. Le théorème est alors démontré pour tout voisinage de l'origine inclus dans $\{(x,y) \mid |x| < \delta \text{ et } |y| < \epsilon\}$. □

3 Décomposition des sous-variétés analytiques de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

Par la suite nous noterons p la projection sur la première composante de $\mathbb{C}^2$ et afin de bien fixer les idées, nous conviendrons de la définition d'une sous-variété analytique de la manière suivante :

Définition 3.1. *Un sous ensemble $V \subset \mathbb{C}^n$ (resp. $\subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) est appellé une sous-variété analytique de $\mathbb{C}^n$ (resp. $\subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$) si tout point p de V a un voisinage B_p tel que $V \cap B_p = \{u \in B_p \mid f_1(u) = \cdots = f_k(u) = 0\}$ où les f_i sont des fonctions holomorphes définies sur B_p. Si un point p_1 appartient à V, on dira que V est une sous-variété analytique au voisinage de p_1.*

Remarque : Si on désigne par $z_0, \ldots, z_n$ les coordonnées de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, on remarque alors que $\forall i \in \{0, \ldots, n\} : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \backslash \{z_i = 0\} = \{(x_0, \ldots, x_{i-1}, 1, x_i, \ldots, x_{n-1}) \mid (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n\}$. Ainsi, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on peut identifier l'ensemble $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \backslash \{z_i = 0\}$ à l'ensemble $\mathbb{C}^n$.

Dans ce qui suit, nous allons raisonner algébriquement sur des polynômes. Avant d'entamer cette partie, nous rappelons la définition du résultant de deux polynômes.

Définition 3.2. *Soit F et G deux de polynômes non constants à coefficients complexes de degrés respectifs n et m. On considère alors l'application*

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{C}_{m-1}[X] \times \cdots \times \mathbb{C}_{n-1}[X] \to \mathbb{C}_{n+m-1}[X] \\ (U,V) \mapsto UF + VG \end{cases}$$

Cette application est bien définie et linéaire. Elle est injective (et donc bijective) si et seulement si F et G sont premiers entre eux. On appelle alors résultant *de F et G le déterminant de la matrice de Φ dans la base canonique. On le note $Res(F,G)$.*

Preuve : On utilise principalement le théorème de Bezout : une preuve détaillée est fournie dans [2]. □

Remarque : On a alors l'équivalence $\mathrm{Res}(F,G) = 0 \Leftrightarrow \{x \mid F(x) = G(x) = 0\} \neq \emptyset$.

Définition 3.3. *Soit U un ouvert. On note alors $\mathbb{H}_U$ l'anneau (intègre) des fonctions holomorphes sur U et $\mathbb{M}_U$ le corps des fonctions méromorphes sur U.*

Le théorème qui suit donne une décomposition locale d'une sous-variété analytique de $\mathbb{C}^2$ en deux ensembles particuliers. La dernière remarque permet alors d'étendre similairement ce résultat à $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Théorème 3.4. *Soit V une sous-variété analytique au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^2$. Alors il existe un voisigage de l'origine B_0 tel que $V \cap B_0 = U \cup W$, où U est un ensemble fini et $W = \{(x, y) \in B_0 \mid y^k + b_1(x)y^{k-1} + \cdots + b_k(x) = 0\}$ avec $b_1, \dots, b_k$ des fonctions holomorphes sur $p(B_0)$.*

Preuve : Par définition de V, il existe un voisinage B de l'origine de $\mathbb{C}^2$ tel que

$$V \cap B = \{(x, y) \in B \mid f_1(x, y) = \cdots = f_m(x, y) = 0\}$$

Par un changement convenable de coordonnées, on peut supposer qu'aucun des f_i est identiquement nul sur l'axe des y. Par le théorème de préparation de Weierstraß, pour $1 \leq i \leq n$, il existe un voisinage de l'origine B_0^i tel que chaque f_i peut s'écrire sur B_0^i

$$f_i(x, y) = g_i(x, y)u_i(x, y) \text{ avec } \begin{cases} g_i(x, y) = y^{k_i} + b_1^i(x)y^{k_i-1} + \cdots + b_{k_i}^i(x) \\ u_{i|B_0^i} \not\equiv 0 \end{cases}$$

où les $b_1^i, \dots, b_{k_i}^i$ sont holomorphes sur $\mathrm{p}(B_0^i)$. Ensuite, puisque $u_i(x, y) \neq 0$ sur B_0^i, on a que

$$f_i(x, y) = 0 \text{ sur } B_0^i \Leftrightarrow g_i(x, y) = 0 \text{ sur } B_0^i$$

et donc, si l'on pose $B_0 = \cap_i^k B_0^i$, on obtient l'expression

$$V \cap B_0 = \{(x, y) \in B_0 \mid g_1(x, y) = \cdots = g_m(x, y) = 0\}$$

Posons $U_0 = \mathrm{p}(B_0)$. On remarque que $g_1(., y), \dots, g_m(., y)$ sont des polynômes en y à coefficients dans $\mathbb{H}_{U_0} \subset \mathbb{M}_{U_0}$. On définit alors les fonctions holomorphes $g'_1, \dots, d'_m$ puis $h_1^1, \dots, h_m^1$ et $h_1^2, \dots, h_m^2$ telles que

$$\begin{cases} g'_1 = g_1 \\ g'_{i+1}(., y) = \mathrm{pgcd}_{\mathbb{M}_{U_0}}(g'_i(., y), g_{i+1}(., y)) \text{ si } i \in \{1, \dots, m-1\} \\ g_{i+1} = g'_{i+1}h_i^1 \text{ et } g'_i = g'_{i+1}h_i^2 \text{ avec } h_i^1(., y), h_i^2(., y) \in \mathbb{M}_{U_0}[y] \end{cases}$$

Par analyse de l'algorithme d'Euclide, on voit que le pgcd dans $\mathbb{M}_{U_0}$ de deux éléments de $\mathbb{H}_{U_0}[y]$ appartient à $\mathbb{H}_{U_0}[y]$. Une réccurence simple montre alors que le polynômes $g'_m(., y)$, qui est par ailleurs le pgcd des polynômes $g_1(., y), \dots, g_m(., y)$, a ses coefficients dans $\mathbb{H}_{U_0}$. Notons maintenant $G_i = \{(x, y) \in B_0 \mid g'_i(x, y) = g_{i+1}(x, y) = 0\}$ pour i variant de 1 à $m-1$. Alors, par définition du pgcd, on obtient la décomposition :

$$G_i = \{(x, y) \in B_0 \mid g'_{i+1}(x, y) = 0\} \cup \{(x, y) \in B_0 \mid h_i^1(x, y) = h_i^2(x, y) = 0\}$$

Etant donné que le premier ensemble de cette union nous convient assez bien, nous allons nous concentrer sur les ensembles $X_i = \{(x,y) \in B_0 \mid h_i^1(x,y) = h_i^2(x,y) = 0\}$ pour i variant de 1 à $m-1$. Au regard de la forme des fonctions $h_i^1(.,y)$ et $h_i^2(.,y)$, il semble convenable d'essayer un raisonnement à l'aide du résultant. Tout d'abord, comme un déterminant est polynomial en ses coefficients, il vient que $\mathrm{Res}(h_i^1(.,y), h_i^2(.,y)) \in \mathbb{M}_{U_0}$. Ensuite, puisque $h_i^1(.,y)$ et $h_i^2(.,y)$ sont premiers entre eux, le résultant $\mathrm{Res}(h_i^1(.,y), h_i^2(.,y))$ n'est pas l'élément nul de $\mathbb{M}_{U_0}$, et donc d'après le théorème des zéros isolés pour les fonctions holomorphes à une variable, la fonction $x \mapsto \mathrm{Res}(h_i^1(x,y), h_i^2(x,y))$ a ses zéros isolés dans U_0. Quitte à réduire B_0, on peut considérer que $x \mapsto \mathrm{Res}(h_i^1(x,y), h_i^1(x,y))$ est continue sur $\overline{U}_0$ et donc

$$Z_i = \{x \in U_0 \mid \mathrm{Res}(h_i^1(x,y), h_i^2(x,y)) = 0\}$$

est un compact (fermé et borné) dont les points sont isolés : c'est donc un ensemble fini. Prenons désormais x fixé. Alors $h_i^1(x,y)$ et $h_i^2(x,y)$ sont des polynômes en la variable y à coefficient dans le corps $\mathbb{C}$. Donc, d'après une remarque faite un peu plus haut, on a l'égalité

$$Z_i = \{x \in U_0 \mid \exists y : h_i^1(x,y) = h_i^2(x,y) = 0\}$$

Or, lorsque x est fixé, le systéme d'équations polynomiales $h_i^1(x,y) = h_i^2(x,y) = 0$ a un nombre fini $n_i(x)$ de solutions dans $\mathbb{C}$. Ainsi

$$\#X_i = \#\{(x,y) \in B_0 \mid h_i^1(x,y) = h_i^2(x,y) = 0\} = \sum_{x \in Z_i} n_i(x)$$

est bien fini. Maintenant, l'objectif est de savoir comment relier les G_i (pour $1 \leq i \leq n$) à l'ensemble

$$\{(x,y) \in B_0 \mid g_1(x,y) = \cdots = g_m(x,y) = 0\}$$

Essayons, pour commencer, de décomposer $E = \{(x,y) \in B_0 \mid g_1(x,y) = \cdots = g_3(x,y) = 0\}$. On a une première décompostion qui est

$$E = \{(x,y) \in B_0 \mid g_2'(x,y) = g_3(x,y) = 0\} \cup \{(x,y) \in B_0 \mid h_1^1(x,y) = h_1^2(x,y) = g_3(x,y) = 0\}$$

et d'après ce qui a été fait pour G_2, il vient qu'il existe un ensemble S tel que

$$E = \{(x,y) \in B_0 \mid g_3'(x,y) = 0\} \cup S \text{ avec } S \subset X_1 \cup X_2.$$

D'une manière tout à fait analogue, on obtient qu'il existe un ensemble S' tel que

$$\{(x,y) \in B_0 \mid g_1(x,y) = \cdots = g_m(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in B_0 \mid g_m'(x,y) = 0\} \cup S'$$

où $S' \subset \cup_{i \in \{1,\ldots,m-1\}} Z_i$ est fini, en tant que sous-ensemble d'une union finie d'ensembles finis, et où $g_m'(.,y) \in \mathbb{H}_{U_0}[y]$. Or, cette décomposition correspond exactement à ce nous devions trouver : nous avons donc terminé la preuve. □

Proposition 3.5. *Soit $D \subset \mathbb{C}$ un ouvert et W un sous-ensemble de $D \times \mathbb{C}$ tel qu'il existe un recouvrement fini d'ouverts $O_1, \dots, O_n$ de W tel que*

$$\begin{cases} W \cap O_i = \{(x,y) \in O_i \mid g_i(x,y) = 0\} \\ g_i(x,y) = y^{k_i} + b_1^i(x) y^{k_i - 1} + \cdots + b_{k_i}(x) \end{cases}$$

avec $b_1^i, \dots, b_{k_i}^i$ des fonctions holomorphes. Si la projection $p : W \to D$ est propre, alors pour chaque composante connexe $C_1, \dots, C_t$ de $p(W)$, il existe des fonctions holomorphes $f_1, \dots, f_t$, sans facteur jamais nul sur W, tel que

$$W = \cup_{i=1}^t \{(x,y) \in C_i \times \mathbb{C} \mid f_i(x,y) = 0\}$$

où $f_i(x,y) = y^{k_i'} + a_1^i(x) y^{k_i' - 1} + \cdots + a_{k_i'}^i(x)$ avec $a_1^i, \dots, a_{k_i'}^i$ holomorphes.

Preuve : Pour commencer, définissons les ensembles

$$\begin{aligned} &Y^r(x) = \{y \mid \exists i_1, \dots, i_s : g_{i_j}(x,y) = 0 \text{ où } y \text{ de multiplicité } m_{i_j} \text{ et } \textstyle\sum_j m_{i_j} = r\} \\ &J(x) = \{i \mid \forall y, g_i(x,y) \neq 0\} \\ &I(x) = \{i \mid \exists y : g_i(x,y) = 0\} \end{aligned}$$

Prenons un point $x_0 \in p(W)$. Tout d'abord, sur tout voisinage de x_0, la fonction $x \mapsto J(x) \cup I(x) = \{1, \dots, n\}$ est constante. Ensuite, par continuité, il existe un voisinage de x_0 sur lequel $x \mapsto J(x)$ est minorée par $J(x_0)$ et en utilisant le théorème de préparation de Weierstraß avec le théorème fondamental, on obtient qu'il existe un autre voisinage de x_0 sur lequel $x \mapsto I(x)$ est minorée par $I(x_0)$. On en déduit donc qu'il existe un voisinage de x_0 sur lequel $x \mapsto I(x)$ est constante. Enfin, d'après le théorème fondamental, $\sum_{r \geq 0} \#Y^r(x).r = \sum_{i \in I(x)} k_i$, donc il existe un voisinage de x_0 sur lequel $x \mapsto \sum_{r \geq 0} \#Y^r(x).r$ est constante. Ainsi la fonction $x \mapsto \sum_{r \geq 0} \#Y^r(x).r$ est constante sur toute composante connexe de $p(W)$ (on pourra par la suite considérer que $p(W)$ est connexe et que $\sum_{r \geq 0} \#Y^r(x).r = k$). Comme $\cup_{r \geq 0} Y^r(x)$ contient exactement les points de W de la forme (x,y) on en déduit que

$$W = \{(x,y) \mid \Pi_{r \geq 0} \Pi_{u \in Y^r(x)} (y-u)^r = 0\}$$

et par définition de la constante k, on obtient que

$$W = \{(x,y) \mid y^k - \sigma_1(x) y^{k-1} + \cdots + (-1)^k \sigma_k(x) = 0\}$$

où les $\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x)$ sont les polynomes élémentaires symétriques dont les éléments de multiplicité r sont les éléments de $Y^r(x)$. En outre, par définition de $Y^r(x)$ et de $J(x)$, on remarque que

$$\Pi_{r \geq 0} \Pi_{u \in Y^r(x)} (y-u)^r = \Pi_{i \in I(x)} g_i(x,y)$$

d'où, les $\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x)$ s'expriment polynomialement à l'aide des $b_1^i(x), \dots, b_{k_i}^i(x)$ pour $i \in I(x)$. Comme $x \mapsto I(x)$ est localement constant, les $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ s'expriment localement à l'aide d'un polynome de fonctions holomorphes. Cela signifie que les $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ sont localement holomorphes. L'holomorphie étant une propriété locale, il vient que les $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ sont holomorphes. $\square$

Remarque : On remarque que les f_i (avec les notations du théorème précédent) sont uniques du fait qu'elles ne possèdent pas de facteur ne s'annullant jamais sur W. Cela peut se voir dans l'écriture $\Pi_{r\geq 0}\Pi_{u\in Y^r(x)}(y-u)^r$.

4 Théorème de Chow

Le théorème suivant, du à Chow, démontre l'algébricité de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Théorème 4.1. *(Théorème de Chow) Soit $V \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ une sous-variété analytique fermé. Alors V est algébrique, c'est-à-dire qu'elle peut être définie par les zéros d'une famille de polynômes.*

Preuve : Comme on l'a remarqué dans la section 3, si on note $(z_0 : z_1 : z_2)$ les coordonnées de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, on peut identifier, pour $i \in \{0,1,2\}$, l'ensemble $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\backslash\{z_i = 0\}$ à $\mathbb{C}^2$. Notons alors $E_i = \mathbb{P}^2(\mathbb{C})\backslash\{z_i = 0\}$ pour i variant de 0 à 2. D'après ce qui vient d'être dit, les ensembles $V \cap E_i$ peuvent être considérés comme des sous-variétés analytiques de $\mathbb{C}^2$. On peut donc leurs appliquer le **théorème 3.4** en chacun de leurs points. Ainsi, si on fixe $i \in \{0,1,2\}$, pour tout v de $V \cap E_i$, il existe un voisinage $B_{i,v}$ de v dans $V \cap E_i$ tel que

$$(V \cap E_i) \cap B_{i,v} = U_{B_{i,v}} \cup W_{B_{i,v}}$$

où $U_{B_{i,v}}$ est fini et $W_{B_{i,v}} = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in B_{i,v} \mid y_i{}^k + b_1(x_i)y_i{}^{k-1} + \cdots + b_k(x_i) = 0\}$ avec

$$\begin{cases} x_0 = z_2/z_0 \ ; \ y_0 = z_1/z_0 \\ x_1 = z_2/z_1 \ ; \ y_1 = z_0/z_1 \\ x_2 = z_0/z_2 \ ; \ y_2 = z_1/z_2 \end{cases}$$

De plus, on a le recouvrement $V \subset \cup_{i=0}^2 \cup_{v\in V\cap E_i} B_{i,v}$. Comme l'ensemble V est fermé dans le compact $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, il est aussi compact. Ainsi il existe une énumération fini de points de $\{0,1,2\}\times V$, disons $u_1,\dots,u_N$, telle que $V \subset \cup_{j=1}^N B_{u_j}$. Il en découle que

$$V = (\cup_{j=1}^N U_{B_{u_j}}) \cup (\cup_{j=1}^N W_{B_{u_j}}).$$

où $\cup_{j=1}^N U_{B_{u_j}}$ est un ensemble fini. Il suffit donc de montrer que l'ensemble $W = \cup_{j=1}^N W_{B_{u_j}}$ est algébrique. Quitte à faire un changement de coordonnées, on peut supposer que $(0:1:0) \notin W$. Ainsi la projection p_1 par rapport au point $(0:1:0)$ définie par

$$p_1 : \begin{cases} \mathbb{P}^2(\mathbb{C})\backslash\{(0:1:0)\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ (z_0 : z_1 : z_2) \mapsto (z_0 : z_2) \end{cases}$$

existe bien sur W. En outre, puisque W est compact en tant que fermé de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, la projection p de W est propre. C'est donc aussi le cas pour $W \cap E_0$ et $W \cap E_2$. On peut d'ailleurs remarquer que p_1 induit sur ces ensembles les projections (propres) suivantes :

$$p^0 : \begin{cases} W \cap E_0 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ (1, y_0, x_0) \mapsto (1, x_0) \end{cases} \quad \text{et } p^2 : \begin{cases} W \cap E_2 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ (x_2, y_2, 1) \mapsto (x_2, 1) \end{cases}$$

Et vu les formes locales qu'ont $W \cap E_0$ et $W \cap E_2$, on peut appliquer le **théorème 3.5** dans les deux cas, en utilisant p^0 pour $W \cap E_0$ et p^2 pour $W \cap E_2$. Ainsi, pour tout $i \in \{0, 2\}$, si on désigne par $C_1^i, \ldots, C_{t_i}^i$ les composantes connexes de $p^i(W \cap E_i)$ privées de la composante toujours égale à 1, alors il existe des fonctions holomorphes $f_1^i, \ldots, f_{t_i}^i$, sans facteur jamais nul sur $W \cap E_i$, de telles sortes que

$$\begin{cases} W \cap E_0 = \cup_{j=1}^{t_0} \{(1, y_0, x_0) \in \{1\} \times \mathbb{C} \times C_j^0 \mid f_j^0(x_0, y_0) = 0\} \\ W \cap E_2 = \cup_{j=1}^{t_2} \{(x_2, y_2, 1) \in C_j^2 \times \mathbb{C} \times \{1\} \mid f_j^2(x_2, y_2) = 0\} \\ \forall i \in \{0, 2\},\ \forall j \in \{1, \ldots, t_i\} : f_j^i(., y_i) \in \mathbb{H}_{C_j^i}[y_i] \end{cases}$$

Maintenant, posons $E_{0,2} = E_0 \cap E_2$. Par le changement de variable $x_2 = z_0/z_2 \mapsto z_2/z_0 = x_0$ sur $W \cap E_{0,2}$, on remarque que lorsque x_2 parcourt une composante connexe alors x_0 aussi et inversement. Ainsi, on en déduit[1] que $t_0 = t_2$ et, quitte à renuméroter les composantes connexes, l'écriture de $W \cap E_{0,2}$ ne peut qu'être de la forme :

$$W \cap E_{0,2} = \cup_{j=1}^{t_0} \{(z_0 : z_1 : z_2) \mid (y_0, x_0, x_2, y_2) \in \mathbb{C} \times C_j^0 \times C_j^2 \times \mathbb{C} \mid f_j^0(x_0, y_0) = 0,\ f_j^2(x_2, y_2) = 0\}$$

Or, comme pour $W \cap E_0$ et $W \cap E_2$, l'ensemble $W \cap E_{0,2}$ ne peut être défini que par une unique équation, sans facteur jamais nul sur $W \cap E_{0,2}$, pour chacune de ses composantes connexes. Ainsi, dans l'écriture ci-dessus, $f_j^0(x_0, y_0) = 0$ et $f_j^2(x_2, y_2) = 0$ s'identifient par rapport à leurs variables communes z_0, z_1 et z_2. Afin d'alléger les notations, considérons qu'il n'y a qu'une seule composante connexe et écrivons

$$\begin{cases} f_1^0(x_0, y_0) = {y_0}^k + a_1(x_0){y_0}^{k-1} + \cdots + a_k(x_0) \\ f_1^2(x_2, y_2) = {y_2}^{k'} + b_1(x_2){y_2}^{k'-1} + \cdots + a_{k'}(x_2). \end{cases}$$

On obtient alors les équations

$$\begin{cases} {z_1}^k + {z_0}^1 a_1(x_0){z_1}^{k-1} + \cdots + {z_0}^k a_k(x_0) = 0 \\ {z_1}^{k'} + {z_2}^1 b_1(1/x_0){z_1}^{k'-1} + \cdots + {z_2}^{k'} a_{k'}(1/x_0) = 0. \end{cases}$$

L'identification nous donne donc que $k = k'$ et $\forall j \in \{1, \ldots, k\} : {z_0}^j a_j(x_0) = {z_2}^j b_j(1/x_0)$. Puisque l'on a pris $z_0 \neq 0$, on obtient que

$$\forall j\{1, \ldots, k\} : a_j(x_0) = {x_0}^j b_j(1/x_0)\ ;\ \ \forall x_0 \neq 0$$

et par holomorphie de b_j, la quantité $a_j(x_0)/{x_0}^j$ est bornée lorsque $x_0 \to \infty$. D'après le théorème de Liouville, les a_j pour $j \in \{1, \ldots, k\}$ sont donc des polynômes de degré au plus j. Ainsi $W \cap E_0$ et $W \cap E_2$ sont algébriques pour une même équation, et puisque $(0 : 1 : 0) \notin W$, c'est aussi valable pour W, ce qui prouve le théorème.

□

[1] Lorsque l'on traite les cas où $z_0 = 0$ et $z_2 = 0$ on voit que les composantes que parcourt x_2 sont plus nombreuses que celles de x_0 et inversement.

5 références

[1] János Kollár, *The structure of algebraic threefolds : an introduction to Mori's program*, Bulletin of the American mathematical society, pages 215-218.

[2] Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas, *Exercices de mathématiques oraux X-ens, algèbre1*, Cassini, pages 167 et 194-195.