De la géométrie symplectique à la théorie spectrale inverse : comment résoudre l'équation de Szegő cubique

Thibaut Mazuir — Mingchen Xia
Sous la direction de Joseph Thirouin

13 juin 2016

Table des matières

Introduction

On s'intéresse dans ce mémoire à la résolution de l'équation de Szegő cubique :

$$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u) \; u \in L^2_+(\mathbb{T})$$

où u est dans $L^2(\mathbb{T})$ et Π le projecteur orthogonal sur $L^2_+(\mathbb{T})$:

$$\Pi(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k)e^{ik\theta}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \hat{u}(k)e^{ik\theta}.$$

C'est un exemple de système hamiltonien de dimension infinie associé à la fonction de Hamilton

$$E(u) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |u|^4 d\theta, \; u \in L^4_+(\mathbb{T}).$$

On commence dans un premier temps par donner les notions et théorèmes fondamentaux de la mécanique hamiltonienne en dimension finie [2]. On introduit à cet effet la notion de systèmes intégrables, associée au théorème de Liouville. On montre ensuite que ce formalisme hamiltonien peut se généraliser à la dimension infinie. Il fournit un cadre privilégié à la résolution de l'équation de Szegő, pour laquelle on peut exhiber des lois de conservation idoines. On démontre alors l'existence de solutions globales dans les espaces de Sobolev $H^s_+(\mathbb{T})$ avec $s \geqslant 1/2$.([11],[13])

On change par la suite de point de vue, en introduisant la notion de paires de Lax. Ce cadre ad hoc permet de construire des solutions pour l'équation de Szegő à partir du spectre d'opérateurs bien choisis : on obtient des énoncés de théorie spectrale inverse.([22])

Enfin, on s'intéresse à une généralisation naturelle de l'équation de Szegő. On ne dispose plus pour celle-ci du cadre de la géométrie symplectique. On introduit à cet effet des outils d'analyse harmonique, de théorie du potentiel et d'intégrale singulière.

Première partie
Éléments de mécanique hamiltonienne

On introduit dans cette première partie les notions et théorèmes classiques de la mécanique hamiltonienne en dimension finie. Toutes les fonctions considérées dans cette première partie seront de classe C^∞.

1 Variétés et formes différentielles

1.1 Formes extérieures algébriques

Définition 1.1. On appelle *forme algébrique extérieure de degré k* ou *k-forme algébrique* sur un espace vectoriel E de dimension finie $\mathbb{R}^n$, une fonction k-linéaire et antisymétrique sur $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des k-formes algébriques sur E forme un espace vectoriel qu'on notera $\Lambda^k E$.

Exemple.
1. À tout vecteur $A \in \mathbb{R}^3$ euclidien orienté, on associe $\omega_A^1(x) := \langle A|x\rangle$.
2. À tout vecteur $A \in \mathbb{R}^3$ euclidien orienté, on associe $\omega_A^2(x, y) := det(A, x, y)$.

On souhaite désormais définir un produit entre formes algébriques extérieures. Commençons par le définir sur les 1-formes algébriques.

Définition 1.2. Soient k 1-formes algébriques $\omega_1, \ldots, \omega_k$ sur E. On définit le produit extérieur de ces k 1-formes et on note

$$(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k)(x_1, \ldots, x_k) := \begin{vmatrix} \omega_1(x_1) & \cdots & \omega_k(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_1(x_k) & \cdots & \omega_k(x_k) \end{vmatrix}.$$

Cette définition s'interprète comme suit : étant donnés k vecteurs $x_1, \ldots, x_k$ de l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^n$ et $\omega_1, \ldots, \omega_k$ k 1-formes algébriques, le produit extérieur $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$ évalué en $(x_1, \ldots, x_k)$ est le volume orienté de l'image du parallélépipède $(x_1, \ldots, x_k)$ par l'application $x \mapsto (\omega_1(x), \ldots, \omega_k(x))$. Cette interprétation géométrique sera fondamentale pour la suite.

Aucun des résultats suivants ne sera démontré, ces-derniers résultants tous de propositions classiques sur l'algèbre extérieure associée à $\mathbb{R}^n$.

Proposition. *En reprenant les notations de la définition précédente, on a :*
(a) $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k \in \Lambda^k E$.
(b) $(\omega_1, \ldots, \omega_k) \mapsto \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$ *est antisymétrique.*

On fixe désormais une base $(x_1, \ldots, x_n)$ de E et on note $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ la base duale. On dispose alors du théorème suivant :

Théorème 1.1. *La famille* $(x_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge x_{i_k}^*, i_1 < \ldots < i_k)$ *forme une base de* $\Lambda^k E$.

Naturellement, le produit sur ΛE, l'ensemble des formes extérieures sur E, est défini comme suit :

Définition 1.3. Soient $f = \sum_{i_1<\ldots<i_k} a_{i_1,\ldots,i_k} x_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge x_{i_k}^* \in \Lambda E$ et $g = \sum_{i_1<\ldots<i_l} b_{i_1,\ldots,i_l} x_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge x_{i_l}^* \in \Lambda E$. On définit le produit extérieur de f et g par :

$$f \wedge g := \sum_{i_1<\ldots<i_k, i_1<\ldots<i_l} a_{i_1,\ldots,i_k} b_{j_1,\ldots,j_l} x_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge x_{i_k}^* \wedge x_{j_1}^* \wedge \ldots \wedge x_{j_l}^* \in \Lambda E$$

Cette quantité est bien définie.

Théorème 1.2. *Le produit extérieur est distributif, associatif et anticommutatif, c'est-à-dire que si* $f \in \Lambda^k E$ *et* $g \in \Lambda^l E$, $f \wedge g = (-1)^{kl} g \wedge f$.

Enfin, étant données $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ une application linéaire et $\omega \in \Lambda^k \mathbb{R}^n$, on définit sur $\mathbb{R}^m$ une nouvelle k-forme $f^*\omega : x \in \mathbb{R}^m \mapsto \omega(f(x_1), \ldots, f(x_n))$. De plus, f^* conserve le produit extérieur, soit $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2$.

1.2 Variétés et formes différentielles

On se donne pour la suite de cette section une variété différentiable M.

Définition 1.4. On appelle forme différentielle de degré 1 ou 1-forme sur M une application différentiable $\omega : TM \mapsto \mathbb{R}$, linéaire sur toute espace tangent T_xM.

En d'autres termes, c'est une 1-forme algébrique sur T_xM et « différentiable par rapport à x ».
Dans le cas particulier où $M = \mathbb{R}^n$, on dispose du théorème suivant :

Théorème 1.3. *Toute 1-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ dans lequel on a choisi pour coordonnées $x_1, \dots, x_n$ s'écrit de façon unique :*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)dx_i,$$

où les coefficients $a_i(x)$ sont des fonctions différentiables.

Définition 1.5. On appelle k-forme différentielle ω_x au point x d'une variété M une k-forme extérieure sur l'espace T_xM. Si une telle forme est donnée en chaque point de M et si elle est différentiable, on dit qu'est donnée une k-forme ω sur la variété M.

On peut à nouveau dire qu'une k-forme différentielle est une k-forme extérieure sur les T_xM, « différentiable par rapport à x ».
À nouveau, dans le cas particulier où $M = \mathbb{R}^n$, les k-formes prennent la forme naturelle suivante :

Théorème 1.4. *Toute k-forme différentielle sur $\mathbb{R}^n$ dans lequel on a choisi pour coordonnées $x_1, \dots, x_n$ s'écrit de façon unique :*

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1,\ldots,i_k}(x)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

où les coefficients $a_{i_1,\ldots,i_k}(x)$ sont des fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^n$.

2 Variétés symplectiques

On introduit désormais la notion de variétés symplectiques, idoine dans la formulation de la mécanique hamiltonienne.

2.1 Structure symplectique et hamiltoniens

2.1.1 Variété symplectique et espaces cotangents

On admet le théorème suivant :

Définition - Théorème 1. *Soit ω une k-forme sur M. Alors, il existe une $(k + 1)$-forme $d\omega$ sur M telle que dans un système local de coordonnées, on ait*

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1,\ldots,i_k}(x)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \text{ et } d\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} da_{i_1,\ldots,i_k}(x)dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}.$$

$d\omega$ s'appelle la dérivée extérieure de ω. De plus, $\omega \mapsto d\omega$ est linéaire.

Définition 2.1. Soit M une variété différentiable de dimension paire. Une *structure symplectique* sur M est la donnée d'une 2-forme différentielle ω sur M telle que :
(a) la dérivée extérieure de ω est nulle : on dit que ω est fermée ;
(b) pour tout $\alpha \neq 0$ dans T_xM, il existe β dans T_xM tel que $\omega(\alpha,\beta) \neq 0$.
Le couple (M,ω) est alors appelé *variété symplectique*.

Définition 2.2. Soit M une variété différentiable de dimension n. *L'espace cotangent* à M en un point $x \in M$ est le dual de T_xM. On le note T_x^*M et ses éléments sont les *vecteurs cotangents à M en x*.

2.1.2 Champs de vecteurs et flots hamiltoniens

On va désormais définir un isomorphisme entre l'espace des vecteurs tangents et celui des 1-formes.

Soient (M, ω) une variété symplectique et $x \in M$. À tout $\xi \in T_xM$ on associe la 1-forme $\omega_\xi : \eta \in T_xM \mapsto \omega(\eta, \xi)$. On définit de la sorte un isomorphisme entre T_xM et T_x^*M. On note $J_x : T_x^*M \mapsto T_xM$ son inverse.
Enfin, on se donne H une fonction sur la variété symplectique M. Alors dH est une 1-forme différentielle sur M à laquelle en chaque point de M est associé un vecteur cotangent à M. L'application notée JdH : $x \in M \mapsto J_x(dH(x)) \in T_xM$ est alors un champ de vecteurs sur M :

Définition 2.3. Le champ de vecteurs JdH est appelé *champ de vecteurs hamiltonien* associé à la *fonction hamiltonienne* H ou plus simplement au *hamiltonien* H.

Sous certaines hypothèses, la théorie de Cauchy-Lipschitz assure qu'on peut associer à JdH un groupe à un paramètre de difféomorphismes $g^t : M \mapsto M$, tel que

$$\forall x \in M : \frac{dg^t(x)}{dt}(0) = JdH(x)$$

Ce groupe est alors appelé flot hamiltonien de fonction de Hamilton H.

2.2 Algèbre de Lie des champs de vecteurs

2.2.1 Algèbre de Lie

Définition 2.4. On appelle *algèbre de Lie* un espace vectoriel E muni d'une opération bilinéaire antisymétrique $(A, B) \in E \times E \mapsto [A, B] \in E$ vérifiant l'identité de Jacobi, c'est-à-dire telle que $\forall A, B, C \in E$,

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

$[A, B]$ se lit alors « commutateur de A et B ».

2.2.2 Algèbre de Lie des champs de vecteurs

Soient M une variété différentiable et A un champ de vecteurs sur M. Sont attachés à ce champ deux objets fondamentaux :

1. Moyennant quelques hypothèses sur M, la théorie de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'un groupe à un paramètre de difféormorphismes $A^t : M \mapsto M$ tel que $\forall x \in M : \frac{dA^t(x)}{dt}(0) = A(x)$.
2. Un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 L_A de différentiation suivant la direction du champ A : il associe à toute fonction $f : M \mapsto \mathbb{R}$ la fonction

$$L_A f : x \in M \mapsto \frac{d(f(A^t(x))}{dt}(0)$$

Exemple. Par exemple dans le cas $M = \mathbb{R}^n$, l'opérateur L_A est donné par : $L_A = \sum_{i=1}^n A_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ Plus généralement, si $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales sur M, le flot A^t est défini par le système d'équations différentielles :

$$\dot{x_1} = A_1(x), \ldots, \dot{x_n} = A_n(x).$$

L'opérateur L_A est donc donnée dans les coordonnées locales par la même formule que celle vue pour $\mathbb{R}^n$.

On se donne alors deux champs de vecteurs A et B sur une variété M. Il n'y a a priori aucune raison que les flots A^t et B^s commutent $\forall s, t$. On va donc chercher à mesure le degré de non-commutativité des flots A^t et B^s à l'aide d'une quantité idoine. Soit donc une fonction f définie sur M. On pose pour $x \in M$ $\delta(t, s, x) := f(A^t B^s x) - f(B^s A^t x)$. Cette différence est visiblement nulle pour $s = t = 0$. L'utilisation de la formule donnée dans l'exemple précédent donne :

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial s \partial t}(0, 0) = (L_B L_A - L_A L_B) f(x) = \sum_{i,j=1}^n (B_i \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - A_i \frac{\partial B_j}{\partial x_i}) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

avec $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales sur M au voisinage de x. En admettant qu'à tout opérateur différentiel linéaire du premier ordre est associé un champ de vecteurs, à l'opérateur $L_B L_A - L_A L_B$ est associé un champ de vecteurs noté C.

Définition 2.5. On appelle crochet de Poisson ou commutateur de deux champs de vecteurs A et B sur une variété M et on note $[A, B]$ l'unique champ de vecteurs sur M tel que $L_{[A,B]} = L_B L_A - L_A L_B$.

Théorème 2.1. *Le crochet de Poisson transforme l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur la variété M en une algèbre de Lie.*

On choisit alors le crochet de Poisson $[A, B]$ comme quantité pour mesure le degré de commutativité des flots A^t et B^s. On dispose en effet du théorème suivant :

Théorème 2.2. *Les flots A^t et B^s commutent si et seulement si le crochet de Poisson $[A, B]$ est nul.*

Preuve. En effet, l'implication directe est claire. La réciproque est technique ([15]). Montrons que $\forall x \in M$, $A^t B^s(x) = B^s A^t(x)$, ou encore que $\forall F \in C^\infty(M)$ on a $F(A^t B^s(x)) = F(B^s A^t(x))$ $\forall x \in M$. On pose $\xi := A^t B^s(x)$, $\zeta =:= B^s A^t(x)$. On considère le développement en série de Taylor de $F(\xi) - F(\zeta)$ autour de $s = t = 0$. On a :

$$\begin{aligned} F(\xi) - F(\zeta) =& t\left(\frac{\partial}{\partial t}(F(\xi) - F(\zeta))\right)\bigg|_{t,s=0,0} + s\left(\frac{\partial}{\partial s}(F(\xi) - F(\zeta))\right)\bigg|_{t,s=0,0} + \frac{t^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}(F(\xi) - F(\zeta))\right)\bigg|_{t,s=0,0} \\ &+ \frac{s^2}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}(F(\xi) - F(\zeta))\right)\bigg|_{t,s=0,0} + st\left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}(F(\xi) - F(\zeta))\right)\bigg|_{t,s=0,0} + o(t^3, s^3, ts^2, st^2) \end{aligned}$$

On va calculer les différents termes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}F(\xi)\bigg|_{t,s=0,0} &= \frac{\partial}{\partial t}F\left(A^t B^s(x)\right)\bigg|_{t,s=0,0} \\ &= L_A\ F(B^s(x))|_{s=0} \\ &= L_A F(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}F(\zeta)\bigg|_{t,s=0,0} &= \frac{\partial}{\partial t}F\left(B^s A^t(x)\right)\bigg|_{t,s=0,0} \\ &= L_A\ F(A^t(x))\big|_{t=0} \text{ où } G :=\ F(B^s)|_{s=0} \\ &= L_A G(x) \\ &= L_A\ F(B^s(x))|_{s=0} \\ &= L_A F(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{\partial}{\partial t}(F(\xi) - F(\zeta))\big|_{t,s=0,0} = 0$
Par symétrie, on a de même $\frac{\partial}{\partial s}(F(\xi) - F(\zeta))\big|_{t,s=0,0} = 0$.
Restent les termes de degré 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}F(\xi) =& \frac{\partial}{\partial t}F(A^t(y)) \text{ où } y = B^s(x) \\ =& L_A F(A^t(y)) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}F(\xi) =& \frac{\partial}{\partial t}L_A F(A^t(y)) \\ =& L_A L_A F(A^t B^s(x)) \\ =& L_A L_A F(x) \text{ en } t, s = 0, 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}F(\zeta) =& \frac{\partial}{\partial t}G(A^t(x)) \\ =& L_A G(A^t(x)) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}F(\zeta) =& \frac{\partial}{\partial t}L_A G(A^t(x)) \\ =& L_A L_A G(x) \\ =& L_A L_A F(x) \text{ en } t, s = 0, 0 \end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial^2}{\partial t^2}(F(\xi) - F(\zeta))\Big|_{t,s=0,0} = 0$.

Par symétrie, on a de même que $\frac{\partial^2}{\partial s^2}(F(\xi) - F(\zeta))\Big|_{t,s=0,0} = 0$.

Enfin, on sait que $\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}(F(\xi) - F(\zeta))\Big|_{t,s=0,0} = (L_B L_A - L_A L_B)F(x) = 0$.

Ainsi, $F(A^t B^s(x)) - F(B^s A^t(x)) = o(t^3, s^3, ts^2, st^2)$.

On commence par considérer des temps t et s de l'ordre de ε. Alors, suivant que l'on applique le champ A puis le champ B, ou l'inverse, on obtient un écart de l'ordre de ε^3, soit :

$$F(A^t B^s(x)) - F(B^s A^t(x)) = o(\varepsilon^3)$$

On se donne désormais t et s deux temps fixés quelconques. On quadrille l'espace par des carrés de côté ε. Chaque carré représente le petit espace parcouru pendant un petit temps ε, suivant le champ A ou B. On vient de prouver que lorsque l'espace entre deux chemins diffère d'un carré, on obtient une différence en $o(\varepsilon^3)$. En modifiant par étapes successives le chemin parcouru d'un carré, on obtient :

$$F(A^t B^s(x)) - F(B^s A^t(x)) = \frac{st}{\varepsilon^2} o(\varepsilon^3)$$

sachant qu'on a $\frac{t}{\varepsilon}\frac{s}{\varepsilon}$ étapes intermédiaires. Ceci est valable pour tout ε, ce qui achève la démonstration. □

2.3 Algèbre de Lie et hamiltoniens

2.3.1 Crochet de Poisson de deux hamiltoniens

Soit (M, ω) une variété symplectique. On a vu qu'à une fonction $H : M \to \mathbb{R}$, on peut associer un groupe à un paramètre de difféomorphismes, par exemple le flot de hamiltonien H, qu'on notera par la suite g_H^t. On se donne une autre fonction $F : M \to \mathbb{R}$.

Définition 2.6. On appelle crochet de Poisson de F et H la dérivée de la fonction F suivant la direction du flot de hamiltonien H. On le note

$$(F, H)(x) := \frac{dF(g_H^t(x))}{dt}(0).$$

Proposition. *Pour qu'une fonction F soit intégrale première du flot de hamiltonien H il faut et il suffit que le crochet de Poisson (F, H) soit identiquement nul.*

On peut également voir le crochet de Poisson de la manière suivante, en utilisant l'isomorphisme J introduit plus haut et la définition de g_H^t :

Proposition.

$$(F, H)(x) = dF(x) \cdot JdH(x).$$

On en déduit les deux corollaires suivants :

Corollaire.

$$(F, H)(x) = \omega(JdH(x), JdF(x))$$

Corollaire. *Le crochet de Poisson est une fonction antisymétrique et bilinéaire de F et H.*

2.3.2 Crochet de Poisson et intégrales premières

On souhaite désormais mettre une structure d'algèbre de Lie sur l'ensemble des fonctions de Hamilton. Commençons par les résultats suivants :

Proposition. *Les crochets de Poisson de trois fonctions A, B, C sur M vérifient l'identité de Jacobi.*

Preuve. Voir la sous-section 2.4.3. □

On déduit de cette identité le résultat fondamental suivant :

Théorème 2.3 (Théorème de Poisson)**.** *Le crochet de Poisson de deux intégrales premières (F_1, F_2) d'un système de hamiltonien H est de nouveau une intégrale première.*

2.3.3 Algèbre de Lie et hamiltoniens

On remarque que si l'on se donne $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales sur M, H_A, H_B, H_C des fonctions de Hamilton de champs hamiltoniens A, B, C sur M on a :

$$((H_A, H_B), H_C) = L_C L_B A.$$

On déduit de cette formule le corollaire suivant :

Corollaire. *Soient B et C des champs hamiltoniens de hamiltoniens H_B et H_C. Alors $[B, C]$ est un champ de vecteurs hamiltonien de fonction de Hamilton (H_B, H_C).*

Enfin, de ce dernier corollaire, on déduit la série suivante de résultats sur la stabilité de certaines propriétés liés aux hamiltoniens :

Définition 2.7. On appelle sous-algèbre d'une algèbre de Lie L un sous-espace vectoriel de L qui contient le commutateur de deux quelconques de ses éléments.

Corollaire. *Les champs de vecteurs hamiltoniens sur une variété symplectique engendrent une sous-algèbre de l'algèbre de Lie de tous les champs.*

Corollaire. *Les intégrales premières du flot hamiltonien engendrent une sous-algèbre de l'algèbre de Lie de toutes les fonctions sur M.*

Enfin, on peut naturellement envoyer l'algèbre de Lie des fonctions sur M sur la sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens :

Corollaire. *L'application de l'algèbre de Lie des fonctions sur M sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens est un homomorphisme d'algèbre de Lie.*

2.3.4 Loi de conservation de l'énergie

Théorème 2.4. *Le flot hamiltonien de fonction de Hamilton H admet H pour intégrale première.*

Preuve. En effet, on sait que H est intégrale première du flot hamiltonien g_H^t si et seulement si $\frac{dH(g_H^t(x))}{dt}(0) = 0\ \forall x \in M$. Cela équivaut à $dH(JdH(x)) = 0\ \forall x$ soit $\omega(JdH(x), JdH(x)) = 0\ \forall x$ ce qui est toujours vrai. D'où le résultat. □

2.4 Géométrie symplectique

2.4.1 Résultats de base

Définition 2.8. On appelle *structure symplectique linéaire* sur un espace vectoriel E de dimension paire une 2-forme algébrique non dégénérée, bilinéaire et antisymétrique sur E : cette application sera appelée par la suite *produit scalaire gauche*. On dit alors que E est un *espace vectoriel symplectique*.

Exemple. On se donne $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ des fonctions coordonnées sur $\mathbb{R}^{2n}$ et on pose :

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} p_i \wedge q_i.$$

Le produit scalaire gauche de deux vecteurs est alors égal à la somme des aires de la projection du parallélogramme formé par ces deux vecteurs sur chaque plan $\mathrm{Vect}(p_i, q_i)$. On dit que deux vecteurs α, β sont *orthogonaux gauche* si leur produit scalaire gauche est nul.

Définition 2.9. On appelle base symplectique de (E, ω) une famille de vecteurs $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ telle qu'on ait les formules suivantes :

$$\omega(p_i, p_j) = \omega(p_i, q_j) = \omega(q_i, q_j) = 0\ \forall i \neq j \ \ et \ \ \omega(p_i, q_i) = 1\ \forall i.$$

On vérifie aisément qu'une telle famille est bien une base de E.

Nous allons voir que le choix de l'exemple précédent n'est pas anodin. En effet, on dispose du théorème suivant :

Théorème 2.5. *Soit (E, ω) un espace symplectique. Alors E admet une base symplectique. Mieux, tout vecteur non nul p peut être pris comme premier vecteur de base.*

Preuve. En effet, soit p non nul dans E. Alors, sachant ω non dégénérée, il existe q tel que $\omega(p, q) \neq 0$, donc quitte à diviser par $\omega(p, q)$, tel que $\omega(p, q) = 1$. Comme ω est non dégénérée, en posant $W := Vect(p, q)$, on a $dimW + dimW^{\perp} = 2n$. On voit de plus que la restriction de ω à $W^{\perp}$ est également non dégénérée. On en déduit le résultat par récurrence. □

Alors, on vérifie que dans la base duale de la base symplectique $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$, on a

$$\omega := \sum_{i=1}^{n} p_i^* \wedge q_i^*.$$

Cette écriture est appelée *écriture standard* de ω.

Définition 2.10. On appelle groupe symplectique de l'espace symplectique (E, w) et on notera $Sp(E, w)$, le groupe des applications linéaires qui conservent le produit scalaire gauche c'est-à-dire telles que

$$\forall S \in Sp(E, \omega), \alpha, \beta \in E, \omega(S\alpha, S\beta) = \omega(\alpha, \beta).$$

2.4.2 Lien avec le produit scalaire euclidien

On fixe désormais l'espace (E, ω) qu'on va munir d'une structure euclidienne. Étant donnée une base symplectique $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ de (E, ω), on introduit le produit scalaire :

$$\langle \alpha | \beta \rangle := \sum_{i=1}^{n} p_i^*(\alpha) p_i^*(\beta) + q_i^*(\alpha) q_i^*(\beta).$$

On dispose en fait de la formule suivante :

Proposition.

$$< J\alpha | \beta >= w(\alpha, \beta)$$

avec

$$J := \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

2.4.3 Théorème de Darboux

Définition 2.11. Un atlas d'une variété de dimension $2n$ est dit symplectique si l'espace arithmétique $\mathbb{R}^{2n}$ est muni d'une structure symplectique standard et si l'on passe d'une carte à une autre par une transformation conservant ω.

On vérifie alors qu'un atlas symplectique munit M d'une structure symplectique naturelle.

Le théorème de Darboux assure la réciproque : toute variété symplectique possède un atlas symplectique.

On s'inspirera de [3] pour la preuve.

Théorème 2.6 (Théorème de Darboux)**.** *Soit ω une 2-forme différentielle régulière fermée au voisinage d'un point x de $\mathbb{R}^{2n}$. Alors, dans un voisinage du point x, on peut choisir un système de coordonnées locales telles que ω prenne la forme standard.*

Ce théorème est donc un outil puissant pour généraliser à toute variété symplectique des propositions de caractère local, invariante par transformation canonique et démontrée pour l'espace des phases standard $\mathbb{R}^{2n}$.

En fait, on va prouver un théorème équivalent, qui est le suivant :

Théorème 2.7. *Soient ω_0 et ω_1 deux formes symplectiques sur M une variété symplectique et qui coïncident en x. Alors il existe un voisinage U de x dans M et une application*

$$\psi : (U, x) \to (M, x)$$

avec $\psi^*\omega_1 = \omega_0$, en ayant posé $\psi^*\omega_1(\xi_1, \xi_2) := \omega_1(d\psi(y)\xi_1, d\psi(y)\xi_2)$ $\forall y \in U$, $\forall \xi_1, \xi_2 \in T_yM$.

Remarque. L'application ψ est alors un difféomorphisme local puisque $\omega_0^{\wedge n} = \psi^*\omega^{\wedge n}$ et que ces deux $2n$-formes sont des formes volumes.

Preuve du théorème de Darboux. Prouvons le théorème de Darboux en admettant le théorème pour l'instant. Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{2n}$ et $f : U \to M$ une carte centrée en x. On considère sur U deux formes symplectiques :

1. la forme $f^*\omega$
2. la forme constante $(f^*\omega)_0$.

Par définition, elles coïncident en 0. Le théorème affirme qu'elles sont difféomorphes. Les coordonnées (p_i, q_i) dans une base symplectique pour $(f^*\omega)_0$ transportées par ψ, ont la propriété voulue. □

On pose la notation suivante, qui servira pour la preuve du théorème. Si X est un champ de vecteurs sur M et ω une k-forme différentielle sur M, alors $\iota_X\omega(x_1, \dots, x_{k-1}) = \omega(X, x_1, \dots, x_{k-1})$.

Preuve du théorème. Donnons les grandes lignes de la preuve. La méthode que l'on va appliquer est la méthode dite « du chemin de Moser ». On considère pour $t \in [0, 1]$ la forme $\omega_t := \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$. Il est clair qu'elle est fermée. Comme ω_0 et ω_1 coïncident en x, elle est non dégénérée en x et donc aussi au voisinage de x : la non dégénérescence est une propriété ouverte. $[0, 1]$ étant compact, on peut trouver un voisinage de x sur lequel tous les ω_t sont des formes symplectiques. Comme ω_0 et ω_1 sont fermées, il en est de même de $\omega_0 - \omega_1$. On peut donc trouver au voisinage de x une 1-forme α telle que $d\alpha = \omega_0 - \omega_1$. Soit f une fonction définie sur un voisinage de x et telle que $(df)_x = \alpha_x$. On a alors $(\alpha - df)_x = 0$ et $d(\alpha - df) = d\alpha = \omega_0 - \omega_1$. Quitte à remplacer α par $\alpha - df$, on peut donc supposer que $\alpha_x = 0$. La 2-forme ω_t étant symplectique, elle définit une dualité entre tangent et cotangent, on obtient ainsi pour chaque t un champ de vecteurs X_t dual à α par ω_t, c'est-à-dire tel que $\iota_{X_t}\omega_t = \alpha$. On considère maintenant X_t comme un champ de vecteurs dépendant du temps, nul en x pour tout t. Le flot ϕ_t de X_t fixe x, on peut donc trouver un voisinage U de x sur lequel ϕ_t est définie et satisfait $\phi_t(U) \subset U$. On a alors :

$$\frac{d}{dt}[\phi_t^*\omega_t] = \phi_t^*\left[\frac{d\omega_t}{dt} + d\iota_{X_t}\omega_t + \iota_{X_t}d\omega_t\right] = \phi_t^*[\omega_1 - \omega_0 + \omega_0 - \omega_1] = 0$$

La forme $\phi_t^*\omega_t$ ne dépend donc pas de t, elle vaut ω_0 pour $t = 0$. On en déduit le résultat voulu pour $\psi := \phi_1$. □

On déduit de ce théorème la preuve de l'identité de Jacobi pour les hamiltoniens :

Démonstration. Dans un système local $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ comme dans le théorème de Darboux, on a

$$(F, G) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}$$

Donc

$$((F, G), H) = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)\frac{\partial H}{\partial q_j} - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)\frac{\partial H}{\partial p_j}$$

Les expressions analogues sont vraies pour $((G, H), F)$ et $((H, F), G)$. Donc

$$((F, G), H) + ((G, H), F) + ((H, F), G) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial q_j} + \frac{\partial^2 G}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_j} - \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial^2 G}{\partial p_j \partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_j}$$
$$+ < FGH >= 0$$

où $< FGH >$ désigne les termes analogues après une permutation de F, G, H. □

3 Théorème de Liouville-Arnold et théorème de la moyenne

3.1 Énoncé et démonstration du théorème de Liouville-Arnold

Définition 3.1. Deux fonctions définies sur une variété symplectique sont en involution si leur crochet de Poisson est nul.

On a vu qu'une fonction F est intégrale première d'un système de hamiltoniens H si et seulement H et F sont en involution.

Liouville a démontré le théorème suivant, fondamental dans la théorie des perturbations : si dans un système à n degrés de liberté, on peut trouver n intégrales premières indépendantes en involution, alors ce système s'intègre par quadratures. L'énoncé exact est le suivant :

Théorème 3.1 (Liouville-Arnold)**.** *Soit M une variété symplectique de dimension $2n$. On se donne n fonctions lisses $F_1, \ldots, F_n$ en involution sur M. Soit M_f un ensemble de niveau des fonctions F_i, $M_f := \{x, F_i(x) = f_i, i = 1, \ldots, n\}$. On suppose en outre que sur M_f, les n fonctions F_i sont indépendantes, c'est-à-dire que les n 1-formes dF_i sont linéairement indépendantes en chaque point de M_f. On dispose alors des résultats suivants :*

1. *M_f est une variété différentiable invariante par le flot de hamiltonien $H = F_1$.*
2. *Si la variété M_f est non-vide, compacte et connexe, elle est difféomorphe à un tore de dimension n.*
3. *Sous les hypothèses de 2., le flot de hamiltonien H définit sur M_f un mouvement quasi-périodique, soit en coordonnées angulaires $\phi := (\phi_1, \ldots, \phi_n)$, on a $\frac{d\phi}{dt} = \omega(f)$.*
4. *Si de plus, M est le fibré cotangent d'une variété lisse avec la structure symplectique standard, le système de hamiltonien H est intégrable par quadratures.*

Démonstration. 1. M_f est une variété différentiable en vertu du théorème des fonctions implicites. Elle est invariante par H car $\{F_1, F_i\} = 0$, $\forall i$.

2. Notons X_i les champs de vecteurs duaux des $\mathrm{d}F_i$. On a, par définition, que les X_i sont linéairement indépendants sur M_f. On suppose que M_f est non-vide, compacte et connexe. Alors $\mathbb{R}^n$, en tant que groupe de Lie additif, agit sur M_f par les flots des X_i soit $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto \exp(x_1 X_1)\exp(x_2 X_2)\cdots\exp(x_n X_n)$. C'est un homomorphisme car $[X_i, X_j] = 0$. Fixons $x \in M_f$, soit $H \leqslant G$ son stabilisateur. Notons que H est discret car les X_i sont indépendants. Mais M_f est compact et connexe, donc $H \cong \mathbb{Z}^n$.

3. Prenons ϕ_i comme les coordonnées induites par celles sur $\mathbb{R}^n$ dans la partie précédente. On note qu'on peut transformer tous les X_i en $\frac{\partial}{\partial x_i}$ par une transformation linéaire, donc cette partie est immédiate.

4. Rappelons que $H_1(M_f) \cong \mathbb{Z}^n$. On peut donc prendre n courbes $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sur M_f, représentant une base d'homologie. Soit θ la 1-forme canonique sur M. On définit les variables d'action comme

$$J_i := \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_i}\theta$$

Donc

$$\mathrm{d}\phi^i = \iota_{\frac{\partial}{\partial J_i}}\omega$$

□

Voici un exemple d'application du théorème de Liouville :

Corollaire. *Soit un système canonique à deux degrés de liberté de hamiltonien H et pour lequel on connaît une intégrale première F ne dépendant pas de H. Alors la sous-variété compacte connexe $\{H = h, F = f\}$ de dimension deux de l'espace des phases est un tore invariant sur lequel le mouvement est quasi-périodique.*

3.2 Mouvement quasi-périodique et théorème de la moyenne

Soient $\mathbb{T}^n$ un tore de dimension n et $\phi := (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ des coordonnées angulaires. On appelle mouvement quasi-périodique un groupe à un paramètre de difféomorphismes de $\mathbb{T}^n$ dans $\mathbb{T}^n$, défini par les équations différentielles : $\frac{d\phi}{dt} = \omega$ avec ω une constante.
Ces équations différentielles s'intègrent en $\phi(t) := \phi(0) + \omega t$. Les trajectoires sont appelées des hélices du tore. Les quantités $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sont les fréquences du mouvement. Elles sont dites indépendantes si elles sont linéairement indépendantes sur le corps des rationnels.

Soit $f(\phi) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n)$. On définit les deux quantités suivantes :

Définition 3.2. On appelle moyenne spatiale de f sur le tore $\mathbb{T}^n$ la quantité $\overline{f} := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(x) \mathrm{d}x$.

Définition 3.3. On appelle moyenne temporelle de f sur le tore $\mathbb{T}^n$ la quantité (lorsqu'elle est bien définie) $f^*(\phi_0) := \lim\limits_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi_0 + \omega t) dt$.

Une fois ces deux moyennes définies, on peut se demander s'il est possible de les relier ou non. C'est ce que fait le théorème suivant, dit théorème de la moyenne :

Théorème 3.2 (Théorème de la moyenne)**.** *Supposons les fréquences ω_i indépendantes. Alors la moyenne temporelle est partout définie et se confond avec la moyenne spatiale.*

Preuve. En effet, il suffit de démontrer le résultat pour les polynômes trigonométriques, ce qui est immédiat. On conclut alors par densité de ces polynômes dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n)$. $\square$

Concrètement, le théorème dit la chose suivante : étant données $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{T}^n)$ et des fréquences ω_i indépendantes, il revient au même de moyenner f sur le tore $\mathbb{T}^n$ que de moyenner f sur la trajectoire du mouvement quasi-périodique de point de départ ϕ_0. On déduit intuitivement les corollaires suivants :

Corollaire. *Si les fréquences sont indépendantes, alors toute trajectoire $\{\phi(t)\}$ est dense dans le tore $\mathbb{T}^n$.*

Preuve. En effet, supposons l'existence d'une telle trajectoire de point de départ noté ϕ_0. Alors il existe un ouvert U du tore n'intersectant pas la trajectoire $\{\phi(t)\}$. On construit aisément une fonction f continue, nulle en-dehors de U et telle que $(\overline{f}) = 1$. Alors, la moyenne temporelle de $f^*(\phi_0) = 0$, ce qui contredit le théorème de la moyenne. $\square$

Deuxième partie
L'équation de Szegő cubique

1 Le formalisme hamiltonien pour l'équation de Szegő

1.1 Espaces de Sobolev du tore

On pose $\mathbb{T}$ le tore de dimension 1. Toute fonction ϕ sur $\mathbb{T}$ peut alors être identifiée avec une fonction $\tilde{\phi}$ 2π-périodique sur $\mathbb{R}$:

$$\tilde{\phi}(x) := \phi(e^{ix}).$$

On confond par la suite les deux notations pour ϕ. On munit de plus $\mathbb{T}$ de la mesure de Haar σ. Alors, si $\phi \in L^2(\sigma)$, on a la décomposition en série de Fourier :

$$\tilde{\phi}(\theta) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k)e^{ik\theta} \text{ avec } \hat{u}(k) := \int_{\mathbb{T}} e^{-ik\theta}\phi(\theta)\frac{d\theta}{2\pi}.$$

On introduit enfin les espaces de Sobolev du tore qui nous fourniront un cadre idoine pour la résolution de l'équation de Szegő.

Définition 1.1. Soit $s \geqslant 0$. On définit l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ par l'ensemble :

$$H^s(T) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{T}),\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1 + ||k||^2)^s |\hat{u}(k)|^2 < \infty \right\}.$$

Théorème 1.1. *Soit $s \geqslant 0$. Alors, $||u||_{H^s(\mathbb{T})} := (\sum_{k\in\mathbb{Z}}(1 + ||k||^2)^s|\hat{u}(k)|^2)^{1/2}$ munit $H^s(T)$ d'une structure d'espace de Hilbert. De plus, si $s > 1/2$, $H^s(T)$ est une algèbre pour le produit usuel des fonctions.*

On admet également le théorème suivant sur les espaces de Sobolev du tore,

Théorème 1.2. *Sur $\mathbb{T}$, on a*
1.[Gagliardo–Nirenberg–Sobolev] $W^{k,p} \subset W^{l,q}$ si $k > l$, $1 \leqslant p < q < \infty$ et $\frac{1}{q} - l = \frac{1}{p} - k$.
2. [Morrey] $W^{k,p} \subset C^{r,\alpha}$, où $k - \frac{1}{p} = r + \alpha$.
3.[Rellich–Kondrachov]Les plongements dans 1. et 2. sont compacts.

Enfin on énonce une inégalité qui nous sera utile par la suite :

Proposition. *Soient u et $v \in H^s(T)$, $s > 1/2$. Alors :*

$$||uv||_{H^s(\mathbb{T})} \leqslant ||u||_{L^\infty(\mathbb{T})}||v||_{H^s(\mathbb{T})} + ||u||_{L^\infty(\mathbb{T})}||v||_{H^s(\mathbb{T})}$$

1.2 Le projecteur de Szegő

On pose $L^2_+(\mathbb{T}) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{T}),\ \hat{u}(k) = 0\ \forall k < 0 \right\}$

On dispose en particulier du résultat suivant :

Proposition. *$L^2_+(\mathbb{T})$ est le sous-espace des fonctions u qui s'étendent sur le disque ouvert unité en des fonctions holomorphes :*

$$u(z) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \hat{u}(k)z^k.$$

On munit ensuite $L^2(\mathbb{T})$ du produit scalaire $\langle u|v\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u\overline{v}$.

$L^2_+(\mathbb{T})$ est fermé. Cela nous permet de donner la définition suivante :

Définition 1.2. On appelle projecteur de Szegő et on note Π le projecteur orthogonal sur $L^2_+(\mathbb{T})$.

$$\Pi : L^2(\mathbb{T}) \to L^2_+(\mathbb{T}),\ \Pi(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}(k)e^{ik\theta}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \hat{u}(k)e^{ik\theta}.$$

On appelle alors équation de Szegő cubique l'équation d'évolution suivante :

$$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u)\ u \in L^2_+(\mathbb{T}).$$

1.3 Le formalisme hamiltonien

On veut essayer d'étendre le formalisme hamiltonien de la première partie au cas de la dimension infinie. On prend désormais comme espace de phase $H := H^s_+(\mathbb{T}), s > 1/2$, muni du produit scalaire $\langle|\rangle$ associé à $L^2_+(\mathbb{T})$.

Définition 1.3. Soit $E : H \to \mathbb{R}$. On suppose que H satisfait à la propriété $(*)$ suivante : il existe une application $X_E : H \to H$ telle que pour tout chemin lisse γ de H,

$$\frac{d}{dt}E(\gamma(t)) = 4\mathrm{Im}\langle\dot{\gamma}(t)|X_E(\gamma(t))\rangle.$$

Alors on dit que X_E est le champ hamiltonien associé à E et l'équation correspondante

$$\dot{u} = X_E(u)$$

est appelé système hamiltonien associé à E.

On pose par la suite $\omega(\cdot,\cdot) := 4\mathrm{Im}\langle\cdot|\cdot\rangle$.

Avec ces définitions, il apparaît comme dans le cas de la dimension finie que E est une intégrale première du système :

$$\frac{d(E(u))(t)}{dt} = \omega(X_E(u(t)), X_E(u(t)) = 0.$$

On définit de même le crochet de Poisson de deux fonctions sur H :

Définition 1.4. On appelle crochet de Poisson de deux fonctions $E, F : H \to \mathbb{R}$ satisfaisant $(*)$,

$$\{E, F\} = \omega(X_E, X_F).$$

On déduit, avec la même preuve que plus haut, la proposition suivante :

Proposition. *F est une intégrale première du système de hamiltonien E si et seulement si $\{E, F\} = 0$.*

Introduisons alors

$$E(u) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |u|^4 d\theta,\ u \in L^4_+(\mathbb{T}).$$

E admet sur $H^s_+(\mathbb{T})$ le champ de vecteur hamiltonien : $X_E(u) = -i\Pi(|u|^2u)$.

L'équation de Szegő cubique sur $H^s_+(\mathbb{T})$, $s > 1/2$ est donc le système hamiltonien associé à E sur $H^s_+(\mathbb{T})$.

On pose alors $Q(u) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |u|^2 d\theta = ||u||^2_{L^2(\mathbb{T})}$ et $M(u) := \langle Du|u\rangle,\ D := -i\partial_\theta$. On a $X_Q(u) = -\frac{i}{2}u$ et $X_M(u) = -\frac{i}{2}Du$. On remarque qu'on a $\{E, Q\} = \{E, M\} = 0$. Ce sont donc des intégrales premières associées au hamiltonien H.

2 Résolution de l'équation de Szegő sur $H^{1/2}_+(\mathbb{T})$

2.1 Le problème de Cauchy

Résolvons le problème de Cauchy associé à l'équation de Szegő sous certaines conditions bien choisies :

Théorème 2.1. *Soit $u_0 \in H^{1/2}_+(\mathbb{T})$. Alors il existe une unique solution $u \in C(\mathbb{R}, H^{1/2}_+(\mathbb{T}))$ de l'équation de Szegő. De plus, s'il existe $s > 1/2$ tel que $u_0 \in H^s_+(\mathbb{T})$, u est à valeurs dans $H^s_+(\mathbb{T})$.*

2.2 Preuve du théorème

Le schéma de la preuve est le suivant : prouver l'existence d'une solution au problème de Cauchy pour tout $s > 1/2$ puis traiter le cas $s = 1/2$ en approximant $u_0 \in H^{1/2}_+(\mathbb{T})$ avec une suite de (u^n_0) d'éléments de $H^s_+(\mathbb{T})$ pour $s > 1/2$. La première partie va faire appel au fait que le système hamiltonien associé à l'équation est intégrable.

1. Existence et unicité d'une solution locale pour $s > 1/2$ On commence par démontrer l'existence d'une solution locale. On introduit pour cela la fonction Γ :

$$\Gamma : u \in (H^s_+(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{H^s(\mathbb{T})}) \mapsto \Pi(|u|^2 u) \in (H^s_+(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{H^s(\mathbb{T})}).$$

On vérifie en premier lieu qu'elle est bien à valeurs dans $H^s_+(\mathbb{T})$:

$$\forall v \in H^s_+(\mathbb{T}),\ \|\Pi(|v|^2 v)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leqslant \||v|^2 v\|_{H^s(\mathbb{T})} \leqslant C_1 \|v\|^2_{L^\infty(\mathbb{T})} \|v\|_{H^s(\mathbb{T})} \leqslant C_2 \|v\|^3_{H^s(\mathbb{T})}.$$

Donc Γ est bien à valeurs dans $H^s_+(\mathbb{T})$. Montrons désormais son caractère lipschitzien sur toute boule. Cela découle des inégalités qui suivent : $\forall u, v \in H^s_+(\mathbb{T})$

$$\begin{aligned}
&\|\Pi(|v|^2 v - |u|^2 u)\|_{H^s(\mathbb{T})} \\
=&\|\Pi(|v|^2(v-u) + (|v|^2 - |u|^2)u)\|_{H^s(\mathbb{T})} \\
\leqslant&\||v|^2(v-u) + (|v|^2 - |u|^2)u\|_{H^s(\mathbb{T})} \\
\leqslant&C_1 C_2^2 (\|u\|_{H^s(\mathbb{T})} + \|v\|_{H^s(\mathbb{T})})^2 \|v-u\|_{H^s(\mathbb{T})}.
\end{aligned}$$

D'où le caractère lipschitzien sur tout boule de Γ. Ainsi, par application du théorème de Cauchy-Lipschitz, l'équation de Szegő admet une unique solution maximale à valeurs dans $H^s_+(\mathbb{T})$. On travaille désormais avec cette solution maximale, notée u.

2. La solution maximale est globale : application du lemme de Gronwall généralisé On fait alors l'observation suivante. On a vu que Q et M était des intégrales premières du système hamiltonien associé à E. Or,

$$Q(u) + M(u) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (1+k)|\hat{u}(k)|^2 := \|u\|'_{H^{1/2}(\mathbb{T})}.$$

$\|\cdot\|'_{H^{1/2}(\mathbb{T})}$ est bien évidemment une norme sur $H^{1/2}(\mathbb{T})$ équivalente à $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\mathbb{T})}$. L'égalité précédente assure que $\|\cdot\|'_{H^{1/2}(\mathbb{T})}$ est conservée le long des trajectoires.

On énonce maintenant l'inégalité de Brezis-Gallouët :

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leqslant C_3 \|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{T})} \left(\log\left(2 + \frac{\|u\|_{H^s(\mathbb{T})}}{\|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{T})}}\right)\right)^{1/2}.$$

qui entraîne que

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leqslant C_3 \|u\|'_{H^{1/2}(\mathbb{T})} \left(\log\left(2 + \frac{2\|u\|_{H^s(\mathbb{T})}}{\|u\|'_{H^{1/2}(\mathbb{T})}}\right)\right)^{1/2}.$$

À partir de la conservation de la norme $\|\cdot\|'_{H^{1/2}(\mathbb{T})}$ et de l'inégalité précédente on va pouvoir démontrer que la solution obtenue est bien globale en démontrant qu'elle est bornée sur tout intervalle borné : $\forall t \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{T})} &\leqslant \|u_0\|_{H^s(\mathbb{T})} + \int_0^t \|\Pi(|u|^2 u)\|_{H^s(\mathbb{T})} dx \\
&\leqslant \|u_0\|_{H^s(\mathbb{T})} + C_1 \int_0^t \|u\|^2_{L^\infty(\mathbb{T})} \|u\|_{H^s(\mathbb{T})} dx \\
&\leqslant \|u_0\|_{H^s(\mathbb{T})} + B \int_0^t \|u_0\|'^2_{H^{1/2}(\mathbb{T})} \log\left(2 + \frac{2\|u\|_{H^s(\mathbb{T})}}{\|u_0\|'_{H^{1/2}(\mathbb{T})}}\right) \|u\|_{H^s(\mathbb{T})} dx.
\end{aligned}$$

Soit en posant $f(t) := \frac{2\|u(t)\|_{H^s(\mathbb{T})}}{\|u\|'_{H^{1/2}(\mathbb{T})}}$, on a

$$f(t) \leqslant f(0) + A \int_0^t \log(2 + f(x))\, f(x) dx$$

Il va s'agir d'utiliser le lemme de Gronwall généralisé qu'on rappelle ci-dessous :

Théorème 2.2 (Lemme de Gronwall généralisé)**.** *Soient* $\phi, \psi \in C^0(\mathbb{R})$*,* $t_0 \in \mathbb{R}$*. Supposons que* $\forall t \geqslant t_0,\ \psi(t), \phi(t) \geqslant 0$ *et*

$$\phi(t) \leqslant K + L \int_{t_0}^{t} \phi\psi.$$

Alors,

$$\forall t \geqslant t_0,\ \phi(t) \leqslant K\exp(L\int_{t_0}^{t} \psi).$$

En reprenant l'inégalité précédente, on déduit, en posant $\phi(t) := 2 + f(t)$ et $\psi(t) := \log(2 + f(t))$, que

$$\forall t \geqslant 0,\ \phi(t) \leqslant \phi(0)\exp(A\int_{t_0}^{t} \log(\phi)).$$

En prenant le log et en réappliquant le lemme de Gronwall, on trouve :

$$\forall t \geqslant 0,\ \log(2 + f(t)) \leqslant \log(2 + f(0))\exp(At).$$

3. La solution maximale est globale : adaptation du lemme de sortie des compacts Ainsi, la solution u n'explose pas en temps fini. D'après le théorème suivant, u est défini sur tout $\mathbb{R}_+$:

Théorème 2.3. *Soit X un espace de Banach et $f : X \to X$ lipschitzienne sur tout boule. Soit de plus u une solution maximale de $u' = f(u)$, I_{max} son intervalle de définition et $T := \sup I_{max}$. Alors on a l'alternative suivante :*

(i) $T = +\infty$

(ii) $T < +\infty$ *et $u(t)$ n'est pas bornée.*

Démonstration. En effet, supposons que $T < +\infty$ et $u(t)$ est bornée par une constante absolue M. Soit (t_j) une suite d'éléments qui convergent vers T. Alors, comme f est lipschitzienne sur tout boule, en notant C_M une constante de Lipschitz associée à la boule fermée de rayon M et de centre 0, on a $\|u'(t)\| = \|f(u(t))\| \leqslant C_M\|u(t)\| + \|f(0)\| \leqslant C_M M + \|f(0)\|$. Ainsi, u' est également bornée et on prouve alors aisément que $(u(t_j))$ est de Cauchy. Donc elle converge. On conclut en adaptant la preuve classique du théorème dans le cas où X est de dimension finie. □

On fait une démonstration analogue sur $\mathbb{R}_-$. On a donc démontré l'existence et l'unicité de solutions globales pour le cas $s > 1/2$.

4. Le cas $s = 1/2$: existence d'une solution globale Passons donc désormais au cas $s = 1/2$. Soit $u_0 \in H_+^{1/2}(\mathbb{T})$. On approxime u_0 par une suite de fonctions (u_0^n) d'éléments de $H_+^s(\mathbb{T})$, $s > 1/2$, i.e. $u_0^n \to u_0$ dans $H^{1/2}$. On lui associe la suite (u^n) de solutions globales. La norme $H^{1/2}(\mathbb{T})$ étant conservée, la suite (u^n) est bornée $\forall t \in \mathbb{R}$. Donc, sachant $\|\Pi(|u|^2u)\|_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant \|u\|^3_{L^6(\mathbb{T})} \leqslant C_2\|u\|^3_{H^{1/2}(\mathbb{T})}$, $(\partial_t u^n(t))$ est également bornée en norme $L^2(\mathbb{T})$ $\forall t$. Ainsi, on peut supposer que $(u^n(t))$ converge faiblement vers $u(t)$ dans $H^{1/2}(\mathbb{T})$ par le théorème de Banach-Alaoglu. À nouveau par le théorème de Banach-Alaoglu, on peut supposer que $(\partial_t u^n)$ converge faiblement dans L^2 donc dans $H^{1/2}(\mathbb{T})$. Alors par le théorème d'Arzelà-Ascoli, on peut supposer que la suite converge faiblement localement uniformément en t. Par le théorème de Rellich, $u_n(t)$ converge fortement vers $u(t)$ dans $L^p(\mathbb{T})$ pour tout $p < \infty$. Une telle fonction u est solution de l'équation de Szegő cubique intégrale.

On déduit facilement que u est faiblement continue : si $t_n \to t$ alors $u(t_n) \rightharpoonup u(t)$.

Par convergence faible, $\forall t$, $\|u(t)\|_{H^{1/2}(\mathbb{T})} \leqslant \|u_0\|_{H^{1/2}(\mathbb{T})}$. On obtient l'inégalité inverse en résolvant le problème de Cauchy ayant pour donnée initiale $u_0 = u(t)$. Ainsi, la norme $H^{1/2}(\mathbb{T})$ est conservée. Par conséquent, u est fortement continue.

5. Le cas $s = 1/2$: unicité de cette solution Démontrons pour conclure l'unicité d'une telle solution. On utilisera pour cela le théorème suivant :

Théorème 2.4. *Soit $u \in H^{1/2}(\mathbb{T})$. Alors, $\forall\ 1 \leqslant p < \infty$, $\|u\|_{L^p(\mathbb{T})} \leqslant C\sqrt{p}\|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{T})}$.*

Démonstration. En effet, on suppose sans perte de généralité que : $\|u(t)\|_{H^{1/2}(\mathbb{T})} = 1$. On raisonne pour $p > 2$. Alors, on a

$$\|u\|^p_{L^p(\mathbb{T})} = p\int_0^\infty t^{p-1}\sigma(\{x,\ |u(x)| \geqslant t\})\mathrm{d}t$$

.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_{<\lambda} := \sum_{|k|\leqslant\lambda} \hat{u}(k)e^{ik\theta}$ et $u_{>\lambda} := \sum_{|k|>\lambda} \hat{u}(k)e^{ik\theta}$.

On cherche à bien choisir $\lambda := \lambda_t$ tel que $\|u_{<\lambda}\|_\infty \leqslant t/2$, de sorte à pouvoir obtenir l'inégalité annoncée en manipulant l'expression intégrale de $\|u\|^p_{L^p(\mathbb{T})}$ ci-dessus. Plus précisément :

$$\begin{aligned}
\|u_{<\lambda}\|_\infty &\leqslant \sum_{|k|\leqslant\lambda} |\hat{u}(k)| \\
&\lesssim \left(\sum_{|k|\leqslant\lambda}(1+|k|^2)^{1/2}|\hat{u}(k)|^2\right)^{1/2}(\log(\lambda+1))^{1/2} && \text{(Inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&\lesssim \|u\|_{H^{1/2}(\mathbb{T})}(\log(\lambda+1))^{1/2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\|u_{<\lambda}\|_\infty \leqslant \sum_{|k|\leqslant\lambda} |\hat{u}(k)| \leqslant c(\log(\lambda+1))^{1/2}$. En choisissant λ_t tel que le membre de droite précédent vaille $t/2$, on a notre λ_t annoncé plus haut.

Alors,

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{L^p(\mathbb{T})} &= p\int_0^\infty t^{p-1}\sigma(\{x,\ |u(x)| \geqslant t\})\mathrm{d}t \\
&\leqslant p\int_0^\infty t^{p-1}\sigma(\{x,\ |u_{>\lambda_t}(x)| \geqslant t/2\})\mathrm{d}t \\
&\leqslant 4p\int_0^\infty t^{p-3}\|u_{>\lambda_t}(x)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} && \text{(Inégalité de Markov)} \\
&\leqslant 4p\int_0^\infty t^{p-3}\sum_{|k|\geqslant\lambda_t}|\hat{u}(k)|^2\mathrm{d}t \\
&= 4p\int_0^\infty t^{p-3}\sum_{(log(|k|+1))^{1/2}\geqslant t/2}|\hat{u}(k)|^2\mathrm{d}t \\
&= 4p\int_0^\infty\int_{(log(|k|+1))^{1/2}\geqslant t/2} t^{p-3}|\hat{u}(k)|^2\mathrm{d}\#\mathrm{d}t \\
&= 4p\int_{\mathbb{Z}}\int_0^{(4\log(|k|+1))^{1/2}} t^{p-3}|\hat{u}(k)|^2\mathrm{d}\#\mathrm{d}t \\
&\leqslant 4\frac{p}{p-2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{u}(k)|^2(4\log(|k|+1))^{(p-2)/2}
\end{aligned}$$

Enfin, sachant $(\log(|k|+1))^l \lesssim l^l(|k|^2+1)^{1/2}\ \forall l \in \mathbb{N}$, on obtient l'estimation souhaitée.

Quand $1 \leqslant p \leqslant 2$, on remarque simplement que $\|u\|_{L^p} \leqslant \|u\|_{L^2}$.

□

Soient u et v deux solutions faibles dans $C_w(\mathbb{R}, H_+^{1/2})$ telles que $u(0) = v(0)$, alors

$$\begin{aligned}
|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)-v(t)\|^2_{L^2(x)}| &= 2|\operatorname{Im}\Big((u(t)-v(t)) \mid \Pi(|u|^2u - |v|^2v)\Big)| \\
&\leqslant C\int_{\mathbb{T}} |u-v|^2(|u|^2+|v|^2)\mathrm{d}\sigma \\
&\leqslant C\int_{\mathbb{T}} |u-v|^{2(1-1/p)}(|u|^2+|v|^2)^{1+1/p}\mathrm{d}\sigma \\
&\leqslant C\|u-v\|_{L^2}^{2(1-1/p)}(\|u\|^{2(1+1/p)}_{L^{2(p+1)}} + \|v\|^{2(1+1/p)}_{L^{2(p+1)}}) \\
&\leqslant Cp\|u(t)-v(t)\|^{2(1-1/p)}_{L^2(\mathbb{T})}
\end{aligned}$$

les C étant différents d'une ligne à l'autre, indépendants de u, v et p.

Donc

$$\|u(t)-v(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \leqslant (Ct)^p$$

Pour $t < 1/C$, on a alors $u(t) = v(t)$, C ne dépendant pas de p.

Comme C ne dépend ni de u, ni de v, on conclut l'unicité de proche en proche.

3 Paires de Lax pour l'équation de Szegő

3.1 Paire de Lax

On le répète, la clef pour étudier les systèmes hamiltoniens, en dimension finie ou infinie, est l'étude des lois de conservation du système. L'idée de Lax est d'interpréter les lois de conservation comme les valeurs propres d'un certain opérateur dépendant du temps.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $u : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ une fonction de classe C^1. On suppose également donné $\phi : h \in \mathcal{H} \mapsto L_h \in L(H)$ où L_h est un opérateur auto-adjoint pour tout h. On pose enfin $L(t) := \phi(u(t))$.

On souhaiterait que les valeurs propres de $L(t)$ ne dépendent pas de t. Ce serait le cas s'il existait une famille $t \mapsto U(t)$ d'opérateurs unitaires telle que $U(0) = I$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ L(t) = U(t)L(0)U(t)^*$.

Autrement dit, en rajoutant des hypothèses de différentiabilité, cela revient à demander :

$$\partial_t(U(t)^*L(t)U(t)) = (\partial_t U(t))^*LU + U^*\partial_t(L(t))U + U^*L\partial_t U(t) = 0.$$

Faisons alors le constat suivant : une famille $t \mapsto U(t)$ avec $U(0) = I$ est une famille d'opérateurs unitaires si et seulement si il existe une famille $t \mapsto A(t)$ d'opérateurs antisymétriques telle que U soit solution de $\begin{cases} \partial_t U = A(t)U(t) \\ U(0) = I \end{cases}$.

En effet, pour l'implication directe on pose $A(t) := (\partial_t U)U^*$ et pour la réciproque, il suffit de dériver U^*U et UU^*.

On obtient donc l'équation suivante pour L : $\partial_t L = BL - LB = [B, L]$.

Si un tel couple (L, B) existe pour une fonction u, il est appelé paire de Lax associée à u.

3.2 Cas de l'équation de Szegő

On se place sur $L^2_+(\mathbb{T})$ qu'on munit du produit scalaire usuel. On va voir que l'équation de Szegő admet deux paires de Lax. On introduit pour cela d'abord des opérateurs idoines :

Définition 3.1. Soit $u \in H_+^{1/2}(\mathbb{T})$. L'opérateur de Hankel H_u de symbole u est l'opérateur défini sur $L^2_+(\mathbb{T})$ par $H_u(h) := \Pi(\overline{h}u)$.

H_u est anti-linéaire et H_u^2 est $\mathbb{C}$-linéaire, auto-adjoint et positif. De plus, on peut prouver que H_u^2 est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Définition 3.2. Soit $b \in L^\infty(\mathbb{T})$. L'opérateur de Toeplitz T_b de symbole b est l'opérateur défini sur $L^2_+(\mathbb{T})$ par $T_b(h) := \Pi(bh)$.

T_b est $\mathbb{C}$-linéaire et auto-adjoint dès lors que b est à valeurs réelles.

Le théorème suivant se déduit de calculs sommaires :

Théorème 3.1. *Soit $u \in C(R, H^s(\mathbb{T}))$, $s > 1/2$. Alors, u est solution de l'équation de Szegő cubique si et seulement si $\partial_t H_u = [B_u, H_u]$ où l'on a posé $B_u := \frac{i}{2}H_u^2 - iT_{|u|^2}$ qui est un opérateur antisymétrique.*

On dira de manière abusive que (H_u, B_u) est une paire de Lax pour l'équation de Szegő cubique.

On déduit de ce théorème une infinité de lois de conservation pour l'équation de Szegő. Voyons pourquoi. On dispose déjà du corollaire suivant :

Corollaire. *Soit u la solution de l'équation de Szegő avec $u_0 \in H_+^s(\mathbb{T})$, $s > 1/2$. Alors, la famille $H_{u(t)}^2$ est isospectrale.*

Soit $u \in H_+^s(\mathbb{T})$, $s > 1/2$. L'opérateur H_u^2 est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Le théorème spectral assure l'existence d'une base hilbertienne e_i de $L_+^2(\mathbb{T})$ et d'une suite $(h_i(u))$ de réels décroissant vers 0 telle que pour tout $i, H_u^2(e_i) = h_i(u)e_i$.

On déduit alors du corollaire précédent le corollaire suivant :

Corollaire. *Les h_i sont des lois de conservation pour l'équation de Szegő.*

Exhibons une deuxième paire de Lax pour l'équation de Szegő. Introduisons pour cela un nouvel opérateur :

Définition 3.3. On pose $z : x \to e^{ix}$. Alors l'opérateur de Hankel décalé de symbole u est l'opérateur sur $L_+^2(\mathbb{T})$ par les formules suivantes :

$$K_u := H_u T_z = T_{\bar{z}} H_u.$$

Comme T_z est $\mathbb{C}$-linéaire et continu et H_u^2 compact, K_u^2 est compact.

Théorème 3.2. *En posant, $C_u := -iT_{|u|^2} + \frac{i}{2}K_u^2$, (K_u, C_u) est une deuxième paire de Lax pour l'équation de Szegő cubique.*

De même, l'opérateur K_u^2 est un opérateurs de Hilbert-Schmidt. Le théorème spectral assure l'existence d'une base hilbertienne f_i de $L_+^2(\mathbb{T})$ et d'une suite $(k_i(u))$ de réels décroissant vers 0 telle que pour tout $i, K_u^2(e_i) = k_i(u)f_i$.

4 Paires de Lax et théorie spectrale inverse

4.1 Théorème du min-max et entrelacement des suites (h_i) et (k_i)

Théorème 4.1 (Théorème du min-max)**.** *Soit T un opérateur compact et auto-adjoint positif d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors, la suite (t_i) décroissante des valeurs de son spectre est caractérisée par la formule suivante :*

$$\forall i,\ t_i = \min_{\substack{F \subset L_+^2(\mathbb{T}) \\ \dim F \leqslant i}} \max_{\substack{h \in F^\perp \\ \|h\|=1}} \langle T(h)|h\rangle.$$

Démonstration. En effet, le résultat est immédiat pour $i = 0$ Soit donc $i \geqslant 1$. On se donne (e_i) la base hilbertienne associée aux t_i. Alors, soit F un sous-espace de dimension i. Son orthogonal G est de codimension i. On pose $V := \mathrm{Vect}(e_k,\ o \leqslant k \leqslant i)$ qui est de dimension $i + 1$. Alors,

$$i - \dim(V \cap G) = \dim(V/(V \cap G) \leqslant \dim((V + G)/V) = i - 1$$

Nécessairement, G contient un élément de norme 1 de V. En particulier, en utilisant la décomposition de $h \in G$ sur la base hilbertienne (e_j), on a

$$\max_{\substack{h \in F^\perp \\ \|h\|=1}} \langle T(h)|h\rangle \geqslant t_i.$$

On conclut la preuve en prenant pour F le sous-espace V introduit plus haut. □

On dispose alors du théorème suivant :

Théorème 4.2. *Les suites (h_i) et (k_i) sont entrelacées, autrement dit :*

$$h_0 \geqslant g_0 \geqslant h_1 \geqslant \ldots \geqslant h_i \geqslant g_i \geqslant h_{i+1} \geqslant \ldots.$$

Démonstration. En effet, remarquons en premier lieu qu'on a l'égalité $K_u^2 = H_u^2 - \langle \cdot | u \rangle u$. Par conséquent, $\forall h \in L^2_+(\mathbb{T})$, $\langle K_u^2(h)|h\rangle = \langle H_u^2(h)|h\rangle - |\langle u|h\rangle|^2$.

Cela fournit déjà l'inégalité : $h_i \geqslant k_i \; \forall i$.

Donnons nous ensuite F un sous-espace de dimension au plus j. Alors,

$$\max_{\substack{h\in F^\perp \\ \|h\|=1}} \|K_u^2(h)\| \geqslant \max_{\substack{h\in (F+\mathbb{C}u)^\perp \\ \|h\|=1}} \|K_u^2(h)\| \geqslant \max_{\substack{h\in (F+\mathbb{C}u)^\perp \\ \|h\|=1}} \|H_u^2(h)\| .$$

Ainsi, $F + \mathbb{C}u$ étant au maximum de dimension j, on trouve qu'on a bien $k_i \geqslant h_{i+1}$.

□

4.2 Théorie spectrale inverse

À la lumière de ce que nous venons de faire, on peut désormais se poser la question suivante. Étant données deux suites (a_i) et (b_i) à valeurs positives et entrelacées, peut-on trouver $u \in H_+^{1/2}(\mathbb{T})$ tel que les spectres respectifs de H_u^2 et K_u^2 correspondent aux suites (a_i) et (b_i). Cela est vrai si on suppose les suites finies et à valeurs distinctes. Précisons cela dans le théorème qui suit :

Théorème 4.3. *Soit $u \in H_+^{1/2}(\mathbb{T})$. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{rg} H_u = \mathrm{rg} K_u = N$. Posons $s := s_1^2 > \ldots > s_N^2 > 0$ les N valeurs propres non nulles de H_u^2 et $s' := s_1'^2 > \ldots > s_N'^2 > 0$ les N valeurs propres non nulles de K_u^2. On suppose de plus que $s_1 > s_1' > \ldots > s_n > s_n'$. Alors, il existe $2N$ angles $(\psi, \psi') := (\psi_1, \ldots, \psi_n, \psi_1', \ldots, \psi_n') \in \mathbb{T}^{2N}$ tels que*

$$u(z) = \langle C(z)(\mathbf{1}_N), \mathbf{1}_N \rangle_{\mathbb{C}^N}, \forall |z| \leqslant 1,$$

où $C(z)$ est une matrice $N \times N$ donnée par

$$C(z) := \Big(\frac{s_j e^{i\psi_j} - s_k' e^{i\psi_k'} z}{s_j^2 - s_k^2}\Big)^{-1}_{j,k}$$

où $\mathbf{1}_N$ est le vecteur de $\mathbb{C}^N$ dont toutes les composantes valent 1.

Réciproquement, si on se donne (s, s', ψ, ψ') comme précédemment, il existe un unique $u \in H_+^{1/2}(\mathbb{T})$, défini par la formule précédente, et tel que s (resp. s') est l'ensemble des valeurs propres de H_u^2 (resp. K_u^2).

Démonstration. Soit $W := \mathrm{Im} K_u$. On définit

$$E_u(s_j) = \ker(H_u^2 - s_j^2 I)$$

et

$$F_u(s_j') = \ker(H_u^2 - s_j'^2 I)$$

Alors W admet deux décompositions orthogonales qui sont compatibles avec l'action de H_u.

$$W = \bigoplus E_u(s_j) = \bigoplus F_u(s_j') \tag{1}$$

Notons que tout les composantes de u sont non-nulles, car s_j^2 n'est pas valeur propre de K_u^2. Soit u_j (resp. u_j') les composantes de u dans $E_u(s_j)$ (resp.$F_u(s_j')$). Il est facile de vérifier que

$$u_j = \|u_j\|^2 \sum_k \frac{u_k'}{s_j^2 - s_k'^2}$$

$$u_k' = \|u_k\|^2 \sum_j \frac{u_j'}{s_j^2 - s_k'^2}$$

Posons λ_j les valeurs propres correspondant à u_j. Alors il existe des ψ_j réels tels que $\lambda_j = s_j e^{i\psi_j}$. ψ'_k sont définis de manière analogue.

Notons que $T_z K_u = H_u - (u \mid \cdot)1$. En utilisant les notations précédentes, on l'écrit comme

$$C(z)u'(z) = 1$$

Mais $u = H_u(1) = \sum_j u_j$. Cela achève la démonstration de l'implication directe.

La réciproque est démontrée plus bas. □

Les coordonnées $(s, s', \psi, \psi') \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{T}^{2N}$ sont appelées coordonnées action-angle : les actions s et s' sont constantes dans le temps et les angles ψ et ψ' évoluent linéairement. Ce théorème est donc à rapprocher du théorème de Liouville démontré dans la partie précédente.

Théorème 4.4. *Supposons que $u_0 \in H_+^{1/2}(\mathbb{T})$ satisfasse aux hypothèses du théorème précédent. On note $(s_0, s'_0, \psi_0, \psi'_0)$ les coordonnées action-angle associées. Si u_0 est la solution initiale de l'équation de Szegő, $\forall t \in \mathbb{R}$ correspondent à $u(t)$ les coordonnées action-angle, vérifiant :*

$$\frac{ds_j}{dt} = 0, \frac{ds'_k}{dt} = 0, \frac{d\psi_j}{dt} = s_j^2, \frac{d\psi'_k}{dt} = s'^2_k.$$

Démonstration. D'abord, on suppose que $F(u) = (2s_1^2, \cdots, 2s_n^2, 2s'^2_1, \cdots, 2s'^2_n, \psi_1, \cdots, \psi_n, \psi'_1, \cdots, \psi'_n)$ est une coordonnée symplectique définie sur un ouvert dense de $M(N)$, l'ensemble des fonctions $u \in L^2_+$ tel que $\mathrm{rg} H_u = N$. Dans ce cas-là, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(H_u^4) - \mathrm{Tr}(K_u^4) &= \mathrm{Tr}(H_u^4 - (H_u^2 - < \cdot \mid u > u)^2) \\
&= \mathrm{Tr}(< \cdot \mid u > H_u^2 u + < \cdot \mid H_u^2 u > u - \|u\|^2 < \cdot \mid u > u) \\
&= 2(H_u^2 u \mid u) - \|u\|^4 \\
&= 2J_4 - J_2^2 \\
&= 2\|H_u(u)\|^2_{L^2} - \|u\|^4_{L^2} \\
&= 2\|\Pi(\|u\|^2)\|^2_{L^2} - < |u|^2 \mid 1 >^2 \\
&= E(u)(= \|u\|^4_{L^4})
\end{aligned}$$

C'est-à-dire,

$$E(u) = \sum_j (\lambda_j^4 - \mu_j^4)$$

On obtient bien le résultat souhaité.

On va démontrer l'assertion précédente. D'abord on observe que $(2s_1^2, \cdots, 2s_n^2, 2s'^2_1, \cdots, 2s'^2_n, \psi_1, \cdots, \psi_n, \psi'_1, \cdots, \psi'_n)$ est un difféomorphisme sur une partie ouverte dans le codomaine. En fait, on peut calculer u par sa coordonnée :

$$u(z) = X(I - zA)^{-1} Y$$

où

$$X = (\lambda_j \nu_j e^{-i\phi_j}) \tag{2}$$

$$Y = (\nu_k)^T, \tag{3}$$

$$A_{j,k} = \sum_l \frac{\lambda_k \nu_j \nu_k e^{-i(\phi_k + \theta_l)}}{b_l (\lambda_j^2 - \mu_l^2)(\lambda_k^2 - \mu_l^2)} \mu_l \tag{4}$$

$$\nu_j = \left(1 - \frac{\mu_j^2}{\lambda_j^2}\right)^{1/2} \prod_{k \neq j} \left(\frac{\lambda_j^2 - \mu_k^2}{\lambda_j^2 - \lambda_k^2}\right)^{1/2} \tag{5}$$

$$b_l = \sum_j \frac{\lambda_j^2 \nu_j^2}{\lambda_j^2 - \mu_l^2}^{2} \tag{6}$$

Cela se montre par de simples calculs.

On note

$$\Omega = \{(2\lambda_1^2, \cdots, 2\lambda_n^2, 2\mu_1^2, \cdots, 2\mu_n^2) \in \mathbb{R}^{2N} : \lambda_1 > \mu_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_N > \mu_N > 0\} \tag{7}$$

On pose $\Omega \times \mathbb{T}^n$ l'image de F. On peut calculer directement en utilisant les formules, ou on peut démontrer que F est ouverte et propre. ([14])

F est un symplectomorphisme par un simple calcul.

□

Troisième partie
Généralisation de l'équation de Szegő

On cherche dans cette partie à donner une généralisation naturelle de l'équation de Szegő. On étudie en premier lieu l'espace de Hardy et les transformations de Riesz.

1 Espaces de Hardy

Il y a plusieurs généralisations possibles des espaces de Hardy : pour une surface de Riemann ouverte, voir [18] ou pour $\mathbb{R}^n$, voir [8].

Le façon la plus naturelle de les généraliser est de les traiter comme fonctions sur $\mathbb{R}^n$, comme indiqué dans les papiers de Fefferman et Stein.

1.1 Préliminaires

$\mathbb{D}$ est le disque d'unité ouvert dans $\mathbb{C}$. $\mathbb{T}$ est la frontière de $\mathbb{D}$. On note les espaces de Hardy H_p, et les espaces de Sobolev $H^p = W^{2,p}$.

$\Pi : L^2(X) \to H_2(X)$ est la projection orthogonale définie pour l'équation de Szegő

1.1.1 Noyau de Poisson

Définition 1.1. Soit $r \in [0, 1)$, μ une mesure complexe de Borel sur $\mathbb{T}$. ζ est une variable dans $\mathbb{T}$.

1. On définit le noyau de Poisson par

$$P_r(\zeta) = \operatorname{Re} \frac{1 + r\zeta}{1 - r\zeta} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \operatorname{Re} \zeta + r^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} \zeta^n$$

et le noyau de Poisson conjugué par

$$Q_r(\zeta) = \operatorname{Im} \frac{1 + r\zeta}{1 - r\zeta} = \frac{2r \operatorname{Im} \zeta}{1 - 2r\operatorname{Re}\zeta + r^2}$$

2. On définit l'intégrale de Poisson de μ par

$$P\mu(rz) = P_r * \mu(z)$$

et l'intégrale de Poisson conjuguée par

$$\tilde{P}\mu(rz) = Q_r * \mu(z)$$

On rappelle qu'une mesure complexe est toujours une mesure finie.

Proposition. *Soit μ une mesure complexe de Borel sur $\mathbb{T}$. On pose $u : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ son intégrale de Poisson. Alors,*

1. u est harmonique sur $\mathbb{D}$.

2. Si μ est différentiable au point $\zeta \in \mathbb{T}$, alors

$$\lim_{\lambda \in \Omega_\zeta^\delta, \lambda \to \zeta} u(\lambda) = \left. \frac{d\mu}{dm} \right|_\zeta$$

où Ω_ζ^δ est l'enveloppe convexe de $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \delta\} \cup \{\zeta\}$. m est la mesure de Lebesgue, $\delta \in (0, 1)$.

3. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$ réelle, alors $Pf + i\tilde{P}f$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$, coïncidant avec f sur $\mathbb{T}$ au sens de 2.

4. Soit $f \in L^1(\mathbb{T})$, pour que Pf soit holomorphe, il faut et il suffit que $\hat{f}(n) = 0$ pour tout $n < 0$.

5. L'opérateur $P : L^p(\mathbb{T}) \to h^p(\mathbb{D})$ est continue pour $1 < p < \infty$. De plus, Pf coïncide avec f sur T, au sens suivant : $Pf_r \to f$ dans $L^p(\mathbb{T})$ quand $r \to 1-$.

6. Pour $f \in \mathrm{C}(\mathbb{T})$, $Pf_r \to f$ quand $r \to 1-$ uniformément.

Tous ces résultats sont bien connus et faciles à démontrer. Le point 3 est le théorème de Hermann Schwarz.

1.1.2 Analyse complexe

On rappelle la définition de l'espace de Hardy.

Définition 1.2. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$. Pour $r \in [0, 1)$ et $\infty > p \geqslant 1$, on définit

$$M_p(f, r) = \left(\int_{\mathbb{T}} |f(re^{it})|^p t\right)^{1/p}$$

et

$$M_\infty(f, r) = \max_t |f(re^{it})|$$

L'espace de Hardy H_p est l'espace des fonctions holomorphes f sur $\mathbb{D}$ telles que

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{0 \leqslant r < 1} M_p(f, r) < \infty$$

où $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

On rappelle que H_p est un espace de Banach. Ces espaces sont décroissants par rapport à p. La convergence au sens de H_p entraîne la convergence sur tout sous-ensemble compact dans $\mathbb{D}$.

Théorème 1.1 (Fatou)**.** *Considérons l'opérateur P défini ci-dessus. $P : L_+^p(\mathbb{T}) \to H_p(\mathbb{D})$ est un isomorphisme pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

Démonstration. 1. Supposons que $1 < p \leqslant \infty$. Ce cas est trivial, car on sait déjà que P est continue (inégalité de Young) et injective (comme solution du problème de Dirichlet). Il suffit de démontrer que quel que soit $f \in H_p(\mathbb{D})$, il existe $g \in L_+^p(\mathbb{T})$ tel que $g = Pg$. On peut prendre $r_i \to 1-$, tel que $f_{r_i} \to g \in L_+^p(\mathbb{T})$ faiblement dans L^p. Alors, $Pg = f$.

2. Pour $p = 1$, par la même méthode, il suffit d'observer que $L_+^1 = VMO^*$.

□

Remarque. 1. Le cas $p = \infty$ est le théorème original de Fatou. Il peut se formuler comme suit : toute fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{D}$ admet une unique extension radicalement continue à $\bar{\mathbb{D}}$.

2. Rappelons le théorème de F.Riesz et M.Riesz : on peut remplacer L_+^p par l'espace des mesures dont tous les coefficients de Fourier sont positifs.

3. Après une petite modification, ce théorème est aussi vrai pour $h_p(\mathbb{D})$. En particulier, on a le théorème de Herglotz : une fonction harmonique positive u sur $\mathbb{D}$ correspond à une unique mesure positive finie de Borel μ sur $\mathbb{T}$, au sens de

$$u = P(\mu)$$

4. On abandonne dorénavant la notation L_+^p.

5. Un théorème associé est le théorème de Carleson ([6]).

Théorème 1.2 (Factorisation intérieure-extérieure)**.** *Pour $f \in H_1$ non nulle, f admet une unique factorisation (à une constante multiplicative de module 1 près) $f = BSu$, où B est le produit de Blaschke, S est intérieure singulière et u est extérieure.*

Remarque. Il se démontre en combinant les théorèmes de Beurling, Szegő et F.Riesz.

Corollaire (Factorisation de Riesz)**.** *Soit $f \in \mathbb{D}$, alors pour que $\|f\|_{H_1} \leqslant 1$ il faut et il suffit qu'il existe $g, h \in H_2(\mathbb{D})$ tel que $f = gh$, et que $\|g\|_{H_1}, \|h\|_{H_1} \leqslant 1$.*

Démonstration. Supposons que $\|f\|_{H_1} \leqslant 1$, avec les notations du théorème 1.2, $g = \sqrt{Su}$, $h = Bg$. □

1.2 Opérateur de Hankel

On rappelle que pour une fonction $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, l'opérateur de Hankel $\Gamma : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ associé à α est l'opérateur de matrice $(\alpha_{i+j})_{i,j\geqslant 0}$, relativement à la base naturelle.

Théorème 1.3 (Nehari, [16])**.** *Γ est de type (2,2) ssi $\exists\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, tel que $\alpha_m = \hat{\psi}(m)$ quel que soit $m \geqslant 0$. De plus, dans ce cas là, on a $\|\Gamma\|_{(2,2)} = \inf\{\|\psi\|_\infty : \hat{\psi}(m), \forall m \geqslant 0\}$. Autrement dit, l'espace des opérateurs de Hankel de type (2,2) est isomorphe à* BMOA = BMO $\cap$ H_1.

1.3 Analyse fonctionnelle basique

Nous avons besoin des théorèmes d'injection de Sobolev.

Théorème 1.4. *Sur $\mathbb{R}^n$ ou une variété compacte avec une frontière C^1 de dimension n, on a*
1.[Gagliardo–Nirenberg–Sobolev] $W^{k,p} \subset W^{l,q}$ si $k > l$, $1 \leqslant p < q < \infty$, $\frac{1}{q} - \frac{l}{n} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$.
2. [Morrey] $W^{k,p} \subset C^{r,\alpha}$, où $\frac{k}{n} - \frac{1}{p} = \frac{r+\alpha}{n}$.
3.[Rellich–Kondrachov] Dans le cas de la variété compacte, et dans le cas où les inégalités dans 1 ou 2 sont strictes, l'inclusion est compacte.

On va généraliser ce résultat plus tard.

Théorème 1.5 (Hardy-Littlewood-Sobolev)**.** *Soit $q = \frac{pn}{n-\alpha p}$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < q < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, alors*

$$\|(-\Delta)^{\alpha/2}\|_{L^q} \ll_p \|f\|_p$$

1.4 Espace de Hardy sur $\mathbb{R}^n$

On rappelle la définition de $H_s(\mathbb{R}^n)$ dans le cas $s > 1$.

Définition 1.3. L'espace $H_s(\mathbb{R}^n)$ $(s > 1)$ est l'espace des fonctions $f \in L^s(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{>0})$, étant l'intégrale de Poisson d'une fonction sur $\mathbb{R}^n$ et telles que $\|f\|_{H_s}^s := \sup_{y>0} \int |f(\mathbf{x}, y)|^s \mathrm{d}\mathbf{x} < \infty$.

Cette définition est naturelle mais peu utile pour généraliser les espaces de Hardy. En fait, on peut démontrer que cette définition est équivalente à plusieurs autres définitions. On donne la seule que l'on va utiliser.

Définition 1.4. Une fonction $f \in L^s(\mathbb{R}^n)$ $(s > 1)$ est dans H_s [](s > (n − 1)/n) ssi $R_j(f) \in L^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout j.

Ici R désigne les transformations de Riesz. On rappelle que R_j est borné $L^p \to L^p$. Elle est bornée entre espaces de Besov par interpolation.

2 Espaces de Besov

2.1 Notations

$\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. $\mathrm{B}(x, r)$ est la boulé centrée en x d rayon r. $T(a, b) = \{x : a \leqslant |x| \leqslant b\}$, e_j désigne la base standard de l^2. $l^p_s(1 \leqslant p \leqslant \infty, s \in \mathbb{R})$ désigne l'espace de Banach des suites $\xi = \{\xi_j\}$ telles que la norme

$$\|\xi\|_{l^p_s}^p = \sum_j 2^{jsp}|\xi_j|^p$$

soit finie.

2.2 Théorie des distributions

Pour cette partie, voir [19].

Dans cette section, on rappelle quelques notions de théorie des distributions. Le but est de fixer les notations. Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^n$. On adopte la convention suivante : quand Ω est omis, $\Omega = \mathbb{R}^n$.

2.2.1 Espaces des fonctions généralisées

$\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions complexes lisses sur $\mathbb{R}^n$ à support compact contenu dans Ω. La topologie est la topologie de Fréchet usuelle. $\mathcal{D}'(\Omega)$ est son dual muni de la topologie faible-*, c'est-à-dire, l'espace des distributions.

Remarque. Il y a une action continue naturelle de $C^\infty(\Omega)[\partial_1, \ldots, \partial_n]$ sur $\mathcal{D}'(\Omega)$. Notons que les distributions forment un faisceau à valeur dans la catégorie des espaces vectoriels complexes. En particulier, on a une notion de *support* d'une distribution.

$\mathcal{S}$ est l'espace des fonctions de Schwartz muni de la topologie de Fréchet. $\mathcal{S}'$ est son dual muni de la topologie *forte*, c'est-à-dire, l'espace des distributions tempérées. On a l'inclusion $\mathcal{S}' \to \mathcal{D}'$. Notons que $\mathcal{S}'$ n'est pas un sous-espace topologique de $\mathcal{D}'$.

Remarque. $\mathcal{S}[x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n]$ agit continûment sur $\mathcal{S}'$.

$\mathcal{E} = C^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions lisses sur Ω. La topologie est la topologie usuelle de Fréchet. $\mathcal{E}'$ est son dual muni de la topologie faible-*, c'est-à-dire, l'espace des distributions à support compact. On a les inclusions $\mathcal{E}' \to \mathcal{S}'$ et $\mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$.

Enfin, on a

$$\mathcal{E}' \to \mathcal{S}' \to \mathcal{D}'$$

et

$$\mathcal{E}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

On rappelle que l'ordre d'une distribution $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)$ est défini comme le minimum de $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que quel que soit $K \subset \Omega$, il existe une inégalité de la forme $|\Lambda\phi| \ll \|\phi\|_N$, $\forall \phi \in \mathcal{D}_K$. Ici $\|\phi\|_N = \sum_{|\alpha| \leqslant N} \|D^\alpha \phi\|_{L^\infty}$.

Théorème 2.1.
1. *$\mathcal{D}(\Omega)$ est complet.*
2. *Si $u_m \to 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, il existe un sous-ensemble compact $K \subset \Omega$, tel que* $\operatorname{Supp} u_m \in K$*, $\forall m$.*
3. *Les distributions dont le support est vide ou $= \{0\}$ sont exactement $\mathbb{C}[\partial_1, \ldots, \partial_n]\delta$, où δ est le Dirac en 0.*

2.2.2 Convolutions et transformée de Fourier

On peut définir la convolution dans les cas suivants :

1. $\mathcal{D} \times \mathcal{D}' \to C^\infty$
2. $\mathcal{E}' \times \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$
3. $\mathcal{S} \times \mathcal{S}' \to C^\infty$

La convolution des distributions obéit aux règles usuels, en particulier

Proposition. *Quand $u * v$ est définie, on a*

$$\operatorname{Supp} u * v \subset \operatorname{Supp} u + \operatorname{Supp} v$$

La convolution est donc une fonction :

$$\mathcal{E}' \times \mathcal{E}' \to \mathcal{E}'$$
$$\mathcal{E}' \times C^\infty \to C^\infty$$
$$\mathcal{E}' \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$

En particulier, $\mathcal{E}'$ est un anneau commutatif.

Rappelons que la transformée de Fourier est définie comme suit :

1. $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$
2. $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$

Dans les deux cas, la transformée de Fourier est continue et d'ordre 4 pour la composition.

2.3 Analyse harmonique

2.3.1 Inégalités pour les fonctions maximales

On va étudier les inégalité associées aux fonctions maximales de Fefferman et Stein.

Théorème 2.2. *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to l^1$ *une fonction mesurable.* $1 < p, r < \infty$, $\alpha > 0$. *Alors,*

1. $$\|(Mf_k)\|_{L^p(l^r)} \ll_{r,p} \|(f_k)\|_{L^p(l^r)}$$

2. $$\|(Mf_k)\|_{L^{1,w}(l^r)} \ll_r \|(f_k)\|_{L^1(l^r)}$$

3. *Pour* $(f_k) \in L^\infty(l^r)$,
$$\|(Mf_k)\|_{l^r} \in \exp(L^r)$$

Démonstration. On observe que le cas $p = 1$ dans 1. est le cas analogue au cas scalaire. Pour 2., on utilise une décomposition de Calderón-Zygmund relativement à $\alpha > 0$ et $\|(f_k)\|_{l^r}$. Soient Q_k, Ω, F de manière usuelle. Soient $b_k = f_k 1_F$, $g_k = f_k - b_k$. Il suffit de traiter les deux parties séparément. Pour b_k, en utilisant l'inégalité de Chebyshev et le cas $p = 1$, on se ramène à estimer

$$\|(b_k)\|^r_{L^r(l^r)} \leqslant \|(b_k)\|_{L^1(l^r)} \|(b_k)\|^{r-1}_{L^\infty} \leqslant \alpha^{r-1} \|(f_k)\|_{L^1(l^r)}$$

Pour l'autre partie, on peut supposer que les g_k sont constantes sur chaque Q_j, en prenant la valeur moyenne. On a

$$\|(g_k)\|^r_{L^r(l^r)} \leqslant |\Omega| \|(g_k)\|^r_{L^\infty(l^r)} \leqslant |\Omega| \left(\fint_{Q_j} \|(f_k(y))\|_{l^r} \mathrm{d}y \right)^r \ll |\Omega| \alpha^r \ll |\Omega| \alpha^{r-1} \|(f_k)\|_{L^1(l^r)}$$

Le cas $p \leqslant r$ s'en déduit, et un argument de dualité entraîne 1..

On n'a pas besoin de 3, pour une démonstration voir [10]

□

2.3.2 Intégrales singulières et multiplicateur de Fourier

Pour cette partie, voir [21].

Dans cette partie, on rappelle quelques résultats de la théorie de C-Z. Soient H, H_1, H_2 des espaces de Hilbert séparables. $K : \mathbb{R}^n \to B(H_1, H_2)$ un noyau mesurable (au sens faible). On a $\hat{K} : \mathbb{R}^n \to B(H_1, H_2)$ lorsque c'est bien défini.

Pour une fonction mesurable (au sens faible) $f : \mathbb{R}^n \to H_1$. $K * f : \mathbb{R}^n \to H_2$ lorsque c'est bien défini .

K est appelé le noyau de Calderón-Zygmund s'il existe $B > 0$ tel que

1. K est localement intégrable.
2. $|K(x)| \leqslant B|x|^{-n}$
3. (Condition de Hömander) $\sup_{y \neq 0} \int_{|x| \geqslant 2|y|} |K(x - y) - K(x)| \mathrm{d}x \leqslant B$
4. $\int_{r_1 \leqslant |x| \leqslant r_2} K(x) \mathrm{d}x = 0$, $\forall 0 < r_1 < r_2 < \infty$.

Dans ce cas-là, on appelle opérateur d'intégrale singulière un opérateur de C-Z.

Théorème 2.3. *Un opérateur de C-Z est de type* (p, p) *pour* $1 < p < \infty$ *et de type faible* $(1, 1)$.

Remarque. Dans le cas scalaire, l'opérateur de C-Z envoie $L^\infty \to$ BMO de manière continue.

On dispose d'un autre théorème bien connu :

Théorème 2.4. *Soit K de carré intégrable. S'il existe* $B > 0$ *tel que*

1. $\|\hat{K}\|_{L^\infty} \leqslant B$
2. *(Condition de Hömander)* $\sup_{y \neq 0} \int_{|x| \geqslant 2|y|} |K(x - y) - K(x)| \mathrm{d}x \leqslant B$

alors l'opérateur d'intégrale singulière correspondant est de type (p, p) *pour* $1 < p < \infty$ *et de type faible* $(1, 1)$.

On va démontrer un théorème moins connu. En fait, au lieu de l'hypothèse sur K, on peut également utiliser des propriétés de multiplicateur de Fourier. On va supposer que K est tempéré au sens faible de sorte que la transformée de Fourier ait du sens.

Théorème 2.5. *Soit K tempérée et régulière (i.e. localement L^1). Supposons que $\hat{K}$ est régulière et de dérivée classique jusqu'à l'ordre $[\frac{n}{2}]+1$ sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$. De plus, on suppose qu'il existe une constante $B > 0$ tel que $\forall R > 0$, et pour tout multi-indice α d'ordre inférieur ou égal à $[\frac{n}{2}]+1$,*

$$\int_{\frac{R}{2}\leqslant|\xi|\leqslant R} | \|D^\alpha \hat{K}\|_{\mathrm{HS}}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \leqslant B^2 R^{n-2|\alpha|}$$

Alors l'opérateur d'intégrale singulière correspondant est de type (p,p) pour $1 < p < \infty$.

Remarque. Le cas scalaire est connu comme le théorème du multiplicateur de Hörmander–Mikhlin. ([20]).

Démonstration. Il est idoine de traiter ce problème en fixant une base, donc l'équation devient

$$\int_{\frac{R}{2}\leqslant|\xi|\leqslant R} \sum_{i,j} |D^\alpha \hat{K}_{ij}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \leqslant B^2 R^{n-2|\alpha|}$$

Soit $K_{ij} = \sum_l K_{ij,l}$ la décomposition de L-P de $K_i j$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + 2^{2l}|x|^2)^{[\frac{n}{2}]+1} \sum_{i,j} |K_{ij,l}|^2 \mathrm{d}x \leqslant cB^2 2^{ln}$$

Définissons $K_{ij;N} = \sum_{r=-N}^{N} K_{ij,r}$.

On va démontrer que cela vérifie les conditions du lemme qui suit dans le cas $q = 1$. Pour cela, il faut estimer la norme d'opérateur de $K_{ij;N}$. On le fait par une estimation de la norme d'une matrice.

$$\int_{|x|\geqslant t} (\sum_{i,j} |K_{ij,l}(x)|^2)^{1/2} \mathrm{d}x \leqslant cB(2^l t)^{\frac{n}{2}-[\frac{n}{2}]-1}$$

Ce n'est pas suffisant car cela n'est pas homogène en t. En supposant $2^l t \leqslant 1$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i,j} |D^\alpha[(1 - e^{-iy\cdot\xi})K_{ij,l}](\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \leqslant cB^2 2^l(n - 2|\alpha|) 2^{2l} t^2$$

Mettons les deux estimations ensemble, on a

$$\int_{|x|\geqslant 2t} \|K^N(x-y) - K^N(x)\| \mathrm{d}x \leqslant cB \sum_l \min\left((2^l t)^{\frac{n}{2}-[\frac{n}{2}]-1}, 2^l t\right) \leqslant cB$$

De plus, l'opérateur d'intégrale singulière est de type $(2,2)$ grâce à l'identité de Parseval et sa norme $(2,2)$ est même dans L^1. On conclut par le lemme suivant et un passage à la limite. □

Pour $q \in \mathbb{R}_{>0}$, $(p,r) \in \mathbb{R}^2$ est appelée q-admissible si $1 < p, r < \infty$ et $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{q}$.

Lemme. *Soit A_i un espace de Banach réflexif, $K : \mathbb{R}^n \to B(A_1, A_2)$ un noyau dans L^1_{loc}. Supposons qu'on a $1 \leqslant q < \infty$, $B, C > 0$, tel que $\forall t > 0$, $|y| < B^{-1}$,*

$$\int_{|x|\geqslant B} \|K(t(x-y)) - K(tx)\|^q \mathrm{d}x \leqslant C^q t^{-n}$$

On suppose que l'opérateur d'intégrale singulière correspondant à K est de type (p,r) pour une paire q-admissible (p,r). Alors, la même chose est vraie pour toute partie q-admissible. De plus, les normes sont deux à deux équivalentes par une borné dépendant seulement des indices, n and B.

Finalement,

Théorème 2.6. *Soit $K : \mathbb{R}^n \to l^1(\mathbb{Z})$ tempérée et régulière. Soit K_j les coordonnée de K par rapport à la base canonique. Supposons que $\hat{K}$ est régulière et a une dérivée classique jusqu'à l'ordre $[\frac{n}{2}] + 1$ sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$. S'il existe $B > 0$ tel que $\forall R > 0$ et α de l'ordre $\leqslant [\frac{n}{2}] + 1$,*

$$\sum_j \int_{\frac{R}{2} \leqslant |\xi| \leqslant R} |D^\alpha \hat{K}_j(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \leqslant B^2 R^{n-2|\alpha|}$$

alors l'opérateur d'intégrale singulière est borné $L^p(\mathbb{R}^n, l^r) \to L^p(\mathbb{R}^n, l^r)$ pour $1 < r, p < \infty$.

La preuve suit les mêmes lignes que la précédente. Le fait que K est diagonal assure qu'on peut estimer sa norme en tant qu'opérateur $l^r \to l^r$ en utilisant la norme sup des éléments diagonaux, donc ils sont encore majorés par la norme l^2 des éléments de la matrice.

Remarque. Le cas $L^p(l^2)$ peux être démontré par une technique d'intégrale singulière (voir les notes de J. Peyrière).

Remarque. Dans toutes les situations précédentes, la norme de l'opérateur d'intégrale singulière ne dépend que de B, n, r, p (si cela a un sens).

2.3.3 Théorie de Paley-Wiener

Soit $R > 0$, pour $0 \leqslant p \leqslant \infty$, on définit

$$P_R^p = \left\{ f \in \mathcal{S}' \cap L^p : \operatorname{Supp} \hat{f} \in B(0, R) \right\}$$

On prend la convention suivante : L^0 est l'espace des fonctions mesurables.

On rappelle le théorème classique de Paley-Wiener-Schwartz.

Théorème 2.7. *P_R^0 est l'espace des fonctions entières f(restreintes à $\mathbb{R}^n$) telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que*

$$|f(z)| \ll (1 + |z|)^N e^{r|\operatorname{Im} z|}$$

De plus, le plus petit tel N est égale à l'ordre de $\hat{f}$.

Théorème 2.8. *Soient $f \in P_R^p$, $0 < p \leqslant \infty$,*

1. *Pour $\kappa > 0$ assez petit (indépendant de R),*

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} |f(\kappa k)|^p \right)^{1/p} \sim \|f\|_{L^p}$$

2. *Pour $\infty \geqslant q \geqslant p$, et tout α,*

$$\|D^\alpha f\|_{L^q} \ll \|f\|_{L^p}$$

3. *Pour $\kappa > 0$,*

$$\sup_z \frac{|\nabla f(x - z)|}{1 + |z|^{n/\kappa}} \ll \sup_z \frac{|f(x - z)|}{1 + |z|^{n/\kappa}} \ll (M|f|^\kappa)^{1/\kappa}(x)$$

2.3.4 Théorie de Littlewood-Paley

Soit $\gamma : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ une fonction lisse telle que

1. $\operatorname{Supp} \gamma \subset \mathrm{B}(0, 1)$.
2. $\gamma(x) = 1$, $\forall x \in \mathrm{B}(0, 1/2)$.

Soit $\phi_j(x) = \gamma(2^{-j}x) - \gamma(2^{-j+1}x)$, $\forall j \in \mathbb{Z}$. Observons que

1. $\phi_j \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. $\operatorname{Supp} \phi_j \subset \mathrm{T}(2^{j-2}, 2^j)$.
3. $\sum_j \phi_j(x) = 1$, $\forall x \neq 1$.

On pose alors $\phi := \phi_1$.

On aura parfois besoin de fonctions ϕ, ψ, tel que $\psi = 1$ sur $\operatorname{Supp}\phi$. Dans ce cas-là, on utilisera les notations f_j^ϕ, f_j^ψ.

Définition 2.1. Pour $f \in L^p(1 < p < \infty)$, on définit la projection de Littlewood-Paley par

$$f_k = \widehat{\phi_k} * f$$

Notons que $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $f = \sum_k f_k$ sont dans L^p et convergent presque-partout.

Plus généralement, on peut faire la même chose pour tout distribution tempérée, mais la convergence se fait désormais au sens des distributions tempérées.

L'opérateur de L-P $S : L^p(\mathbb{R}^n) \to (C^\infty(\mathbb{R}^n))^{\mathbb{Z}}$ est défini par $(Sf)_k = f_k$.

On verra bientôt que $Sf \in L^p(\mathbb{R}^n, l^2(\mathbb{Z}))$.

Le théorème majeur est alors le suivant :

Théorème 2.9. *For $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|Sf\|_{L^p(\mathbb{R}^n, l^2(\mathbb{Z}))} \sim \|f\|_p$$

Démonstration. Définissons $K : \mathbb{R}^n \to l^2(\mathbb{Z})$ par $K(x) = \sum \widehat{\phi}_j e_j$. On observe que l'estimation souhaitée est la suivante : $\|K * f\|_{l^2(\mathbb{Z})} \sim \|f\|_{L^p}$. On note en premier lieu que K est un noyau de Carderon-Zygmund. Donc une des implications est immédiate.

Regardons désormais la convolution avec K comme un opérateur $T : L^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) \to L^p(\mathbb{R}^n, (l^2(\mathbb{N}))^N)$ pour un $N \in \mathbb{Z}_+$. Il est aisé de voir que l'adjoint de T est donné par

$$\sum f_j e_j \to \sum f_j * \widehat{\phi_j}$$

en supposant qu'on somme un nombre fini de termes. On obtient une borne de la forme

$$\|\sum f_j * \widehat{\phi_j}\|_p \ll_p \|(f_j)\|_{L^p(\mathbb{R}^n, l^2(\mathbb{Z}))}$$

si RHS est fini.

En particulier, en prenant f_j comme $f * \widehat{\phi_j}$, en remplaçant ϕ_1 par une fonction ψ_1 à support plus grand que celui de ϕ_1, égale à 1 sur le support de ϕ_1, et en posant ψ_i de manière adéquate, on obtient le résultat souhaité. □

Remarque. On évoque une petite variante de la théorie, qui sera utile. On garde f_k invariante pour $k \geqslant 0$ mais on rassemble tous les autres termes en un nouvel f_{-1}. Le théorème légèrement modifié est alors encore vérifié.

2.4 Espaces de Besov

2.4.1 Espaces de Sobolev dans la théorie L-P

Pour cette partie, voir [1].

Dans cette partie on adoptera le point de vue de la remarque 2.3.4. On prend pour la suite la notation suivante : $S_n(f) = \sum_{j=-1}^{n-1} f_j$. On supposera désormais $p = 2$.

Lemme. *1. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout multi-indice α, $j \geqslant -1$, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|\partial^\alpha f_k\|_2 \leqslant C2^{k|\alpha|}\|f\|_2, \quad \|\partial^\alpha S_k(f)\|_2 \leqslant C2^{k|\alpha|}\|f\|_2 \tag{8}$$

2. Pour $s \in \mathbb{R}$, $k \geqslant 0$,

$$\|f_k\|_{H^s} \sim 2^{ks}\|f_k\|_2 \tag{9}$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Cela tombe directement de

$$\|f_k\|_{H^s}^2 = (2\pi)^{-n}\int(1 + |\xi|^2)^s\phi^2(2^{-k}\xi)|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

□

On a un lemme similaire :

Lemme. *1. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout multi-indice α, $j \geqslant -1$, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$,*

$$\|\partial^\alpha f_k\|_\infty \leqslant C2^{k|\alpha|}\|f\|_\infty, \quad \|\partial^\alpha S_k(f)\|_\infty \leqslant C2^{k|\alpha|}\|f\|_\infty \tag{10}$$

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $l > 0$,

$$\sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha f_l\|_\infty \sim 2^{kl}\|f_l\|_\infty \tag{11}$$

pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Grâce à la propriété immédiate d'invariance de la transformée de Fourier des noyaux en questions, la seule chose à démontrer est l'inégalité de la seconde partie. Soit χ une fonction test égale à 1 au voisinage de $\operatorname{Supp}\phi$. Alors

$$\phi(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} \xi^\alpha \chi_\alpha(\xi)\phi(\xi)$$

où

$$\chi_\alpha(\xi) = \frac{\xi^\alpha \chi(\xi)}{\sum_{|\alpha|=k}(\xi^\alpha)^2}$$

Donc

$$\widehat{f_l}(\xi) = 2^{-lk} \sum_{|\alpha|=k} \widehat{\chi}_\alpha(2^{-l}\xi)\widehat{\partial^\alpha f_l}(\xi)$$

i.e.

$$2^{lk} f_l(x) = \sum_{|\alpha|=k} 2^{ln}\chi_\alpha(-2^l x) * \partial^\alpha f_l$$

L'inégalité de Young permet de conclure la preuve. □

Théorème 2.10. *Pour $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$,*

1.

$$\|f\|_{H^{s,p}} \sim \|(f_j)\|_{L^p(l^2_s)}$$

2.

$$\|f\|_{W^{s,2}} \sim \|(f_j)\|_{l^2_s(L^2)} \sim \|f\|_{H^s}$$

Ici $H^{s,p}$ est l'espace du potentiel de Bessel. $W^{s,p}$ est l'espace de Sobolev-Slobodeckij.

Démonstration. 1. C'est une application directe du théorème de Mekhlin-Hörmander. Soit $f \in H^{s,p}$. Alors

$$\|f\|_{L^p(l^2_s)} \ll \|(2^{sj}\langle D\rangle^{-s}\phi_j * \langle D\rangle^s f)\|_{L^p(l^2)} \ll \|\langle D\rangle^s f\|_{L^p} = \|f\|_{H^{s,p}}$$

La réciproque se démontre de manière analogue.

2. est similaire. □

Pour appliquer ce résultat, on prouve le théorème suivant

Théorème 2.11. *Si $u, v \in H^s(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($s \geqslant 0$), il en est de même de uv, de plus,*

$$\|uv\|_{H^s} \ll \|u\|_{L^\infty}\|v\|_{H^s} + \|v\|_{L^\infty}\|u\|_{H^s}$$

Lemme. *Soit $s, C > 0$, $(a_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de fonctions L^2, telles que*

$$\operatorname{Supp}\widehat{a_k} \subset \mathrm{B}(0, 2^k C)$$

et que

$$\|a_k\|_2 2^{ks} \leqslant c_k$$

avec $(c_k) \in l^2$. Set $u = \sum_{k\geqslant -1} a_k$, alors $u \in H^s$, $\|u\|_{H^s} \ll C\|(c_k)\|_{l^2}$.

Démonstration. Avec la condition sur les supports,on a clairement qu'il existe N tel que

$$u_k = \sum_{l \geqslant k-N} (a_l)_k$$

Donc

$$\begin{aligned}\|u_k\|_2 &\ll \sum_{l \geqslant k-N} \|a_l\|_2 \leqslant \sum_{l \geqslant k-N} c_l 2^{-ls} \\ &= \sum_{l \geqslant k-N} c_l 2^{-(l+k)s/2} 2^{-(l-k)s/2} \ll 2^{-ks} \sum_{l \geqslant k-N} c_l^2 2^{-(l-k)s}\end{aligned}$$

Une simple addition conclut la preuve. □

Preuve du théorème. Notons

$$uv = \sum_{k,l} u_k v_l = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

Cela dépend de la position de k par rapport à 1. D'après le lemme et la symétrie évidente, il suffit d'estimer

$$\|S_k(u) v_k\|_2 \leqslant \|S_k(u)\|_\infty \|v_k\|_2 \ll \|u\|_\infty \|v\|_{H^s} 2^{-ks} c_k$$

avec $c_k \in l^2$. □

Remarque. Par la méthode classique du potentiel de Bessel, on déduit aisément que, si $s > n/2$,

$$\|uv\|_{H^s} \ll \|u\|_{H^s} \|v\|_{H^s}$$

Cette remarque est évidemment moins forte que le théorème.

2.4.2 Espaces de Besov et espaces de Triebel-Lizorkin

Pour cette partie, voir [4] et [23].
On adopte un point de vue L-P pour les espaces de Besov.

Définition 2.2. Pour $s \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$

1. Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, posons
$$B^s_{pq} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{B^s_{pq}} = \|f_j\|_{l^q_s(L^p)} < \infty \right\}$$
C'est un espace de Banach appelé espace de Besov.
2. Pour $1 < p < \infty$, posons
$$F^s_{pq} = \left\{ f \in \mathcal{S}' : \|f\|_{F^s_{pq}} = \|f_j\|_{L^p(l^q_s)} < \infty \right\}$$
C'est un espace de Banach appelé espace de Triebel-Lizorkin.

Remarque. En fait, tous les cas $0 < p \leqslant \infty$, $0 < q \leqslant \infty$ peuvent être traités. On ne le fera pas ici, ceci étant très technique.

On doit montre que la définition est indépendante de la décomposition spectrale choisie ϕ_j.

Théorème 2.12. *1. Dans le cas $s > 0$ $1 < p < \infty$, la définition de l'espace de Besov coïncide avec la définition classique.*
2. Dans le cas $s > 0$, $C^s_Z = B^s_{\infty\infty}$.
3. $F^s_{p2} = H^{sp}$.
4. $F^s_{pp} = B^s_{pp}$.

C^s_Z désigne ici l'espace de Zygmund. B^s_{pp} sont les espaces de Sobolev-Slobodeckij.

Démonstration. 1. Voir [17].
2. Voir [23].
3. On l'a vu plus tôt.
4. Trivial. □

Mentionnons également que $F^0_{p2} = h^0_p$ (espace local de Hardy) pour tout $p > 0$. Voir à cet effet [5].

On a une caractérisation simple de $F^s_{p,q}$:

Lemme.

$$\|f\|_{F^s_{p,q}} \sim \|f_{-1}\|_{L^p} + \|(|D|^s f_k)\|_{L^p(l^q)}$$

Ce lemme facile n'est pas démontré.

2.4.3 Prolongements de Besov

L'avantage fondamentale de l'approche L-P pour les espaces de fonctions est qu'il transforme un problème concernant un espace abstrait en un problème familier concernant une fonction entière d'ordre fini. Un corollaire simple est le suivant :

Théorème 2.13. *Supposons $1 < p \leqslant q < \infty$, $-\infty < t \leqslant s < \infty$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $s - n/p = t - n/q$*

1.

$$B^s_{p,r} \subset B^t_{q,r}$$

2. Supposons de plus $1 < r < \infty$, alors

$$F^s_{p,r} \subset F^t_{q,r}$$

Démonstration. 1. provient de

$$\|f_k\|_{L^q} \leqslant \|\psi_k\|_{L^\sigma}\|f * \phi_k\|_{L^p} \ll 2^{kn(1-1/\sigma)}\|f_k\|_{L^p}$$

où $1/\sigma + 1/p - 1 = 1/q$.

2. On peut supposer $p < q$. Par le lemme 2.4.2, il suffit d'estimer $\|D\|^t f_k$, ce qui est simple dans le cas de fonctions de Schwarz :

$$|D|^t f_k \ll \|x\|^{n-n(1/p-1/q)} * |D|^s f_k$$

Donc $\|(|D|^t f_k)\|_{l^r} \ll \|x\|^{n-n(1/p-1/q)} * \|(|D|^s f_k)\|_{l^r}$. Le résultat provient de l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev.

De manière générale, cela provient du fait que les fonctions de Schwarz sont denses dans les espaces de Triebel-Lizorkin, ce que l'on ne prouve pas ici. □

Théorème 2.14. *Supposons $1 < p < \infty$, $t \geqslant 0$, alors*

1.

$$B^{n/p+t}_{p,1} \subset C^t$$

2. Pour un nombre non-entier t et $1 \leqslant r \leqslant \infty$,

$$B^{n/p+t}_{p,r} \subset C^t$$

3. Pour un nombre non entier t et $1 < r < \infty$,

$$F^{n/p+t}_{p,r} \subset C^t$$

Démonstration. 1. Le cas $t \in \mathbb{N}$ se prouve de la même manière que 1 dans le théorème précédent. Les autres cas se déduisent par interpolation.

2. Cela se déduit par interpolation de 1.

3. On applique le prolongement des espaces de Triebel-Lizorkin dans les espaces de Besov. □

Remarque. Ces deux théorèmes peuvent être vus comme une généralisation des inégalités classiques de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev et de Morrey.

On énonce encore quelques résultats qu'on utilisera sans prouver :

Théorème 2.15. *([23]) Pour $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $1 < p < \infty$, $1 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant \infty$, on a*

$$B^{s+\varepsilon}_{p,\infty} \subset B^s_{p,1} \subset B^s_{p,q_1} \subset B^s_{p,q_2} \subset B^s_{p,\infty} \subset B^{s-\varepsilon}_{p,1}$$

Théorème 2.16. *([23]) Pour $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, on a*

$$\begin{aligned} B^s_{p,q} \subset F^s_{p,q} \subset B^s_{p,p}, \qquad 1 < q \leqslant p < \infty \\ B^s_{p,p} \subset F^s_{p,q} \subset B^s_{p,q}, \qquad 1 < p \leqslant q < \infty \end{aligned}$$

De plus, $B^s_{p,p} = F^s_{p,p}$.

Théorème 2.17. *([4]) For $s \geqslant 0$, $p > 1$*

$$B^s_{p,1} \subset L^{p_1}$$

où $s - \frac{n}{p} = -\frac{n}{p_1}$.

2.5 Espaces d'interpolation

Théorème 2.18. *([4])*

Soient

$$0 < \theta < 1, \quad 1 \leq p, p_0, p_1, q, q_0, q_1 \leq \infty, \quad s, s_0, s_1 \in \mathbf{R} \tag{12}$$

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad s_\theta = (1-\theta)s_0 + \theta s_1 \tag{13}$$

Alors,

$$\left(H^{s_0}_{p_0}, H^{s_1}_{p_1}\right)_\theta = H^{s_\theta}_{p_\theta}, \qquad s_0 \neq s_1,\ 1 < p_0, p_1 < \infty \tag{14}$$

$$\left(B^{s_0}_{p_0,q_0}, B^{s_1}_{p_1,q_1}\right)_\theta = B^{s_\theta}_{p_\theta,q_\theta}, \qquad s_0 \neq s_1,\ 1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty \tag{15}$$

$$\left(H^{s}_{p_0}, H^{s}_{p_1}\right)_{\theta,p_\theta} = H^{s}_{p_\theta}, \qquad 1 \leq p_0, p_1 \leq \infty \tag{16}$$

$$\left(H^{s_0}_{p}, H^{s_1}_{p}\right)_{\theta,q} = B^{s_\theta}_{p,q}, \qquad s_0 \neq s_1,\ 1 \leq p, q \leq \infty \tag{17}$$

$$\left(B^{s_0}_{p,q_0}, B^{s_1}_{p,q_1}\right)_{\theta,q} = B^{s_\theta}_{p,q}, \qquad s_0 \neq s_1,\ 1 \leq p, q, q_0, q_1 \leq \infty \tag{18}$$

$$\left(B^{s}_{p,q_0}, B^{s}_{p,q_1}\right)_{\theta,q} = B^{s}_{p,q_\theta}, \qquad 1 \leq p, q_0, q_1 \leq \infty \tag{19}$$

$$\left(B^{s_0}_{p_0,q_0}, B^{s_1}_{p_1,q_1}\right)_{\theta,q_\theta} = B^{s_\theta}_{p_\theta,q_\theta}, \qquad s_0 \neq s_1,\ p_\theta = q_\theta,\ 1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty \tag{20}$$

3 Équation de Szegő généralisée

On donne dans cette partie une solution locale du problème de Cauchy pour une version généralisée de l'équation de Szegő.

3.1 L'équation de Szegő cubique

Gérard a considéré l'équation suivante sur le cercle unité([12]) :

$$i\partial_t u = \Pi(|u|^2 u)$$

où $\Pi : L^2 \to H_2$ est la projection orthogonale sur l'espace de Hardy. On cherche à la généraliser à la dimension finie quelconque. Comme dans [9], le point de vue correct à adopter est celui de l'analyse harmonique, la théorie de l'intégrale singulière et la théorie du potentiel, au lieu des méthodes complexes plus classiques. On peut facilement réécrire l'équation comme suit

$$\partial_t a = a^2 Ha + (Ha)^3 + H(a^3) + H((Ha)^2 a)$$

où $u = a + iHa$, H désigne la transformée de Hilbert sur le cercle unité. La généralisation est facile :

$$\partial_t u = a_i u^2 \mathrm{R}_i u + b_{ijk} \mathrm{R}_i u \mathrm{R}_j u \mathrm{R}_k u + c_i \mathrm{R}_i(u^3) + d_i \mathrm{R}_i(u \mathrm{R}_j u \mathrm{R}_j u)$$

où on a utilisé la convention d'Einstein. R_i désigne la i-ème transformé de Riesz, u est une fonction réelle sur $\mathbb{R}^n$. On impose la condition de Cauchy

$$u(0, \cdot) = u_0$$

Il y a plusieurs restrictions possibles sur les coefficients. Les cas les plus faciles consistent à prendre des fonctions localement constantes (au sens dyadique) ou des fonctions de $H^s(s > n/2)$. Le fait que cette équation est localement bien posée dans $H^s(s > n/2)$ est triviale dans le premier cas et facile en utilisant un théorème classique de Sobolev dans le second. Donc, une intuition de type John-Nirenberg nous invite à penser que le problème est aussi facile pour les coefficients de type BMO ou au de type L^∞. Mais l'on ne possède aucune estimation de la norme de Sobolev inhomogène de produits de la forme $a_i u^2 \mathrm{R}_i u$ si aucune condition sur l'intégrabilité de a_i n'est faite (comme dans le cas constant). On ne possède de plus aucune loi de conservation *a priori*.

On travaillera par la suite exclusivement dans les espaces de Besov.

3.2 Estimations

La seule difficulté est de donner une estimation de la partie non-linéaire. Cela nous permettra de résoudre le problème de Cauchy localement de manière usuelle.

Les estimations sont assez complexes, nous n'expliciterons que la première en détail, les autres se traitant de manière analogue.

Supposons que $a_i \in L^\infty$ et que $D^\varepsilon a_i \in H^{s-\varepsilon}$ pour un $\varepsilon > 0$ à spécifier plus tard. Cette condition est plus faible que les deux cas introduits précédemment. On suppose aussi que $s > 1$ et que $s > \frac{n}{p}$, $p \geqslant 2$. Soit m un entier $\geqslant s$.

En utilisant le lemme 3.3 de [7] et les notations associées, on déduit que

$$\begin{aligned}\Delta_l^m(a_i u^2 \mathrm{R}_i u, x) \ll_m & \sum_{k=1}^{m\wedge 4} \sum_{j=0}^{m} (|a_i(x+jl)|^{4-k} + |u(x+jl)|^{4-k} + |\mathrm{R}_i u(x+jl)|^{4-k}) \\ & \sum_{\substack{j_1+\cdots j_k = m \\ j_i \in \mathbb{Z}_+}} \prod_{q=1}^{k} (D_{j_q}(a_i(x), a_i(x+l), \cdots, a_i(x+ml)) + D_{j_q}(u(x), u(x+l), \cdots, u(x+ml)) \\ & + D_{j_q}(\mathrm{R}_i u(x), \mathrm{R}_i u(x+l), \cdots, \mathrm{R}_i u(x+ml)))\end{aligned} \tag{21}$$

La somme se décompose en

$$\begin{aligned} S_1 &= \left(\sum_{j=0}^{m} |a_i(x+jl)|^3 + |u(x+jl)|^3 + |\mathrm{R}_i u(x+jl)|^3\right)(D_m(a_i) + D_m(u) + D_m(\mathrm{R}_i u)) \\ S_2 &= \left(\sum_{j=0}^{m} |a_i(x+jl)|^2 + |u(x+jl)|^2 + |\mathrm{R}_i u(x+jl)|^2\right)\sum_{j=1}^{m-1}(D_j(a_i) + D_j(u) + D_j(\mathrm{R}_i u))(D_{m-j}(a_i) + D_{m-j}(u) + D_{m-j}(\mathrm{R}_i u)) \\ S_3 &= \left(\sum_{j=0}^{m} |a_i(x+jl)| + |u(x+jl)| + |\mathrm{R}_i u(x+jl)|\right)\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{r=1}^{m-1-j}(D_j(a_i) + D_j(u) + D_j(\mathrm{R}_i u)) \\ & \quad (D_r(a_i) + D_r(u) + D_r(\mathrm{R}_i u))(D_{m-j-r}(a_i) + D_{m-j-r}(u) + D_{m-j-r}(\mathrm{R}_i u)) \\ S_4 &= \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{r=1}^{m-1-j}\sum_{v=1}^{m-1-j-r}(D_j(a_i) + D_j(u) + D_j(\mathrm{R}_i u))(D_r(a_i) + D_r(u) + D_r(\mathrm{R}_i u)) \\ & \quad (D_v(a_i) + D_s(u) + D_v(\mathrm{R}_i u))(D_{m-j-r-v}(a_i) + D_{m-j-r-v}(u) + D_{m-j-r-v}(\mathrm{R}_i u)) \end{aligned}$$

Donc

$$\|a_i u^2 \mathrm{R}_i u\|_{\dot{B}^s_{p,2}}^2 \ll \int_0^\infty \left\{ t^{-s} \sup_{|l|\leqslant t} \|S_1 + S_2 + S_3 + S_4\|_{L^p} \right\}^2 t^{-1} \mathrm{d}t \tag{22}$$

où $0 < s < m$.

On pose

$$I_i = \left(\int_0^\infty \left\{ t^{-s} \sup_{|l|\leqslant t} \|S_i\|_{L^p} \right\}^2 t^{-1} \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$$

Estimons S_i.

Terme S_1 : Décomposons S_1 en 9 termes $S_1^1, \dots, S_1^9$,

$$S_1^1 = \sum_{j=0}^{m} |a_i(x + jl)|^3 D_m(a_i)$$

Les autres cas sont similaires. On décompose I_1 en neuf termes $I_1^1, \dots, I_1^9$. Alors

$$I_1^1 = \left(\int_0^\infty t^{-2s-1} \| \sum_j |a_i(x + jl)|^3 D_m(a_i) \|_p^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t$$

Pour γ_1, γ_2 positives telles que

$$\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} = \frac{1}{p}$$

on a

$$I_1^1 \ll \left(\int_0^\infty t^{-2s-1} \|a_i\|_{3\gamma_1}^6 \sup_{|l| \leqslant t} \|D_m(a_i)\|_{\gamma_2}^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \ll \|a_i\|_{3\gamma_1}^3 \|a_i\|_{\dot{B}^s_{\gamma_2,2}}$$

Posons

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}.$$

En particulier,

$$I_1^1 \ll \|a_i\|_\infty^3 \|a_i\|_{\dot{B}^s_{p,2}}$$

Les estimations similaires sont encore valables pour $I_1^2, \dots, I_1^9$.

De manière similaire, I_2 se décompose en 27 termes, disons

$$S_2^1 = \sum_j |a_i(x + jl)|^2 \sum_j D_j(a_i) D_{m-j}(a_i)$$

L'intégrale correspondante est majorée par

$$\begin{aligned}
I_2^1 &\ll \|a_i\|_{2\gamma_3}^2 \left(\int_0^\infty \sum_j t^{-2s-1} \sup_{|l| \leqslant t} \|D_j a_i\|_{\gamma_4}^2 \|D_{n-j} a_i\|_{\gamma_5}^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\ll \|a_i\|_{2\gamma_3}^2 \sum_j \left(\int_0^\infty t^{-2s-1} \sup_{|l| \leqslant t} \|D_j a_i\|_{\gamma_4}^{\gamma_6} \mathrm{d}t \right)^{1/\gamma_6} \left(\int_0^\infty t^{-2s-1} \sup_{|l| \leqslant t} \|D_j a_i\|_{\gamma_5}^{\gamma_6^\dagger} \mathrm{d}t \right)^{1/\gamma_6^\dagger} \\
&\ll \sum_j \|a_i\|_{2\gamma_3}^2 \|a_i\|_{\dot{B}^{2s/\gamma_6}_{\gamma_4,\gamma_6}} \|a_i\|_{\dot{B}^{2s/\gamma_6^\dagger}_{\gamma_5,\gamma_6^\dagger}}
\end{aligned}$$

où $\frac{1}{\gamma_6^\dagger} + \frac{1}{\gamma_6} = \frac{1}{2}$.

Les paramètres sont tous positifs, et on leur impose les restrictions suivantes :

$$\frac{1}{\gamma_3} + \frac{1}{\gamma_4} + \frac{1}{\gamma_5} = \frac{1}{p} \tag{23}$$

$$2 < \gamma_6 \tag{24}$$

$$j > \frac{2s}{\gamma_6} \tag{25}$$

$$m - j > \frac{2s}{\gamma_6^*} \tag{26}$$

On permet à γ_6 de dépendre de j. Notons qu'une solution γ_6 existe toujours.

De manière similaire, I_3 se décompose en 81 termes. On a

$$I_3^1 \ll \|a_i\|_{L^\infty} \max_{j,r} \|a_i\|_{\dot{B}^{2s/\gamma_{10}}_{\gamma_7,\gamma_{10}}} \|a_i\|_{\dot{B}^{2s/\gamma_{11}}_{\gamma_8,\gamma_{11}}} \|a_i\|_{\dot{B}^{2s/\gamma_{12}}_{\gamma_9,\gamma_{12}}}$$

où on a fait les restrictions suivantes sur les paramètres :

$$\gamma_7, \gamma_8, \gamma_9 > p \tag{27}$$

$$\gamma_{10}, \gamma_{11}, \gamma_{12} > 2 \tag{28}$$

$$\frac{1}{\gamma_7} + \frac{1}{\gamma_8} + \frac{1}{\gamma_9} = \frac{1}{p} \tag{29}$$

$$\frac{1}{\gamma_{10}} + \frac{1}{\gamma_{11}} + \frac{1}{\gamma_{12}} = \frac{1}{2} \tag{30}$$

$$j > \frac{2s}{\gamma_{10}} \tag{31}$$

$$r > \frac{2s}{\gamma_{11}} \tag{32}$$

$$m - j - r > \frac{2s}{\gamma_{12}} \tag{33}$$

Finalement, I_4 se décompose en 81 termes et on dérive

$$I_4^1 \ll \max_{j,r,v} \|a_i\|_{\dot{B}^{2s/\gamma_{13}}_{p,\gamma_{13}}} \|a_i\|_{\dot{B}^{2s/\gamma_{14}}_{p,\gamma_{14}}} \|a_i\|_{\dot{B}^{2s/\gamma_{15}}_{p,\gamma_{15}}} \|a_i\|_{\dot{B}^{2s/\gamma_{16}}_{p,\gamma_{16}}}$$

où on a fait les restrictions suivantes sur les paramètres :

$$\frac{1}{\gamma_{13}} + \frac{1}{\gamma_{14}} + \frac{1}{\gamma_{15}} + \frac{1}{\gamma_{16}} = \frac{1}{2} \tag{34}$$

$$j > \frac{2s}{\gamma_{13}} \tag{35}$$

$$r > \frac{2s}{\gamma_{14}} \tag{36}$$

$$v > \frac{2s}{\gamma_{15}} \tag{37}$$

$$m - j - r - v > \frac{2s}{\gamma_{16}} \tag{38}$$

Reformulons certaines estimations faites plus haut pour les appliquer à notre problème de Cauchy.

Remarquons que les restrictions faites de γ_{13} à γ_{16} ont toujours une solution, comme on a supposé que $0 < s < m$.

En utilisant les prolongements classiques de Sobolev/Besov

$$\dot{H}^{2s/\gamma_3 - \varepsilon - \frac{n}{p} + \frac{n}{2}} \subset \dot{W}^{2s/\gamma_{13} - \varepsilon, p} \subset \dot{B}^{2s/\gamma_{13}}_{p,2}$$

on trouve $I_4^1 \ll 1$, où la constante O dépend de a_i.

Les termes de la forme I_4^k ($k \geqslant 2$) comprennent la norme de Besov de u ou de $\mathrm{R}_i u$. Avec le prolongement de Besov

$$\dot{B}^s_{p,2} \subset \dot{B}^{s+\varepsilon}_{p,\gamma_{14}}$$

et les théorèmes de bornes sur les transformées de Riesz. On conclut finalement que

$$I_4 \ll 1 + \|u\|^4_{\dot{B}^s_{p,2}}$$

Des estimations similaires valent pour I_1, I_2, I_3, donc on conclut que

$$\|a_i u^2 \mathrm{R}_i u\|_{\dot{B}^s_{p,2}} \leqslant C_1(1 + \|u\|^4_{\dot{B}^s_{p,2}})$$

3.3 Le problème de Cauchy

On peut enfin s'intéresser au problème de Cauchy dans le cas sous-critique, à savoir

$$s - \frac{n}{p} > 0$$

Dans ce cas, il s'agit de se souvenir que l'on a un prolongement de Besov $B^s_{p,2} \subset L^\infty$.

Théorème 3.1. *Supposons que toutes les restrictions faites sur les coefficients dans la section précédente sont encore vrais.*

Dans le cas sous-critique, l'équation de Szegő cubique est localement bien posée dans $B^s_{p,2}$. *En particulier si* $s > \frac{n}{2}$, *l'équation de Szegő cubique est localement bien posée dans* H^s.

Démonstration. On utilise la méthode usuelle de point fixes. L'espace considéré est

$$X = \{u \in L^\infty(0, T; B^s_{p,2}) : \|u\|_{L^\infty(0,T;\dot{B}^s_{p,2} \leqslant M)}\}$$

avec la métrique de $L^\infty(t, x)$.

En utilisant l'astuce usuelle d'analyse fonctionnelle, il est aisé de voir que X est non vide et est un espace métrique complet. Puis, la méthode classique permet de conclure en utilisant les estimations faites dans la section précédente. □

Références

[1] Serge Alinhac and Patrick Gérard. *Pseudo-differential operators and the Nash-Moser theorem*, volume 82. American Mathematical Soc., 2007.

[2] Vladimir Arnold and Djilali Embarek. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique.[Les].* Editions Mir, Halsted Press, 1978.

[3] Michèle Audin. *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité, Cours Spécialisés,.* SMF et EDP Sciences, 2001.

[4] Jöran Bergh and Jorgen Lofstrom. *Interpolation spaces : an introduction*, volume 223. Springer Science & Business Media, 2012.

[5] Qui Bui Huy. Some aspects of weighted and non-weighted hardy spaces. kôkyûroku res. *Inst. Math. Sci.*, 383 :38–56, 1980.

[6] Lennart Carleson. An interpolation problem for bounded analytic functions. *American Journal of Mathematics*, 80(4) :921–930, 1958.

[7] Thierry Cazenave and Fred B Weissler. The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in h^s. *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, 14(10) :807–836, 1990.

[8] Charles Fefferman and Elias M Stein. H^p spaces of several variables. *Acta mathematica*, 129(1) :137–193, 1972.

[9] Charles Fefferman and Elias M Stein. H^p spaces of several variables. *Acta mathematica*, 129(1) :137–193, 1972.

[10] Charles Fefferman and Elias Menachem Stein. Some maximal inequalities. *American Journal of Mathematics*, 93(1) :107–115, 1971.

[11] Patrick Gérard. Long time estimates of solutions to hamiltonian nonlinear PDEs. Technical report, Université Paris Sud, 2016.

[12] Patrick Gérard and Sandrine Grellier. L'équation de Szegö cubique. *Séminaire Équations aux dérivées partielles*, pages 1–19, 2008.

[13] Patrick Gérard and Sandrine Grellier. The cubic Szegő equation. *Annales Scientifiques de L'École Normale Supérieure*, pages 761–773, 2010.

[14] Patrick Gérard and Sandrine Grellier. Inverse spectral problems for compact Hankel operators. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, 13(02) :273–301, 2014.

[15] A Lesfari. Le théorème d'Arnold-Liouville et ses conséquences. *Elemente der Mathematik*, 58(1) :6–20, 2003.

[16] Zeev Nehari. On bounded bilinear forms. *Annals of Mathematics*, pages 153–162, 1957.

[17] J. Peetre. Sur les espaces de Besov. *Sci. Paris Sér. AB*, 264 :A281–A283, 1967.

[18] Walter Rudin. Analytic functions of class H^p. *Transactions of the American Mathematical Society*, 78(1) :46–66, 1955.

[19] Walter Rudin. *Functional analysis. International series in pure and applied mathematics*. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[20] Eliahu Shamir. A remark on Mikhlin-Hörmander multipliers theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 16(1) :104–107, 1966.

[21] Elias M Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions*, volume 2. Princandon University Press, 1970.

[22] Joseph Thirouin. L'équation de Szegő, un cas d'école de système hamiltonien. 2013.

[23] Hans Triebel. *Interpolation theory*. 1995.