

# Modèles cinétiques pour les plasmas dans les tokamaks

Xavier Lachaume et Nicolas Laillet

Septembre 2009

sous la direction de  
Xavier Garbet (C.E.A) et Laure Saint-Raymond (E.N.S)

## Table des matières

<b>1</b>	<b>De la dynamique particulière au système Vlasov-Poisson</b>	<b>4</b>
1.1	Dynamique d'une particule soumise à un champ électromagnétique	4
1.2	Effets collectifs dans les plasmas	5
1.2.1	Oscillations, écrantage et longueur de Debye	6
1.2.2	Collisions dans les plasmas	7
1.3	Modèle cinétique	7
1.3.1	Le système d'équations de Vlasov-Poisson	7
1.3.2	Plasmas fluides - grandeurs fluides	9
1.3.3	L'équation d'Euler	10
<b>2</b>	<b>Le système d'équations de Vlasov-Poisson</b>	<b>10</b>
2.1	Première approche : le système, solutions fortes, solutions faibles	11
2.2	Estimations sur les équations de transport	11
2.2.1	Conservation des normes $L^p$ et principe du maximum	11
2.2.2	La méthode des caractéristiques	12
2.3	Existence globale de solutions faibles	14
2.3.1	Estimations supplémentaires	14
2.3.2	Le théorème d'existence	15
2.3.3	Quelques remarques	16
<b>3</b>	<b>L'approximation gyrocinétique</b>	<b>17</b>
3.1	Motivation et travail préliminaire	17
3.2	Résultats en dimension 2	18
3.2.1	Théorème	18
3.2.2	Commentaires	19
3.2.3	Preuve du théorème (3.1)	20
<b>4</b>	<b>Interprétation physique des résultats. Discussion.</b>	<b>26</b>
4.1	Le modèle centre-guide	26
4.2	La gyromoyenne	28
4.2.1	L'opérateur de gyromoyenne	28
4.2.2	Application à la fonction de partition	30
4.3	Ordres de grandeur	31
4.3.1	Paramètres pertinents, retour sur le théorème 3.1	31
4.3.2	Exemples de plasmas réels	32
4.4	Quelques précisions	33

## Introduction

Un plasma est un ensemble de particules chargées positivement (des ions) et d'électrons (chargés négativement) : il s'agit d'un état de la matière où l'énergie est suffisante pour arracher les électrons aux atomes. Présents naturellement (ionosphère, aurores boréales, ...), ils sont aussi utilisés afin d'étudier la fusion nucléaire : on soumet un plasma à un champ magnétique intense qui fait tourner les particules du plasma à très grande vitesse.

L'étude naïve d'un plasma revient donc à étudier la dynamique de chaque particule de ce plasma. Or on ne peut réduire cette étude à celle d'une particule soumise à un champ électromagnétique (partie 1.1). En effet, il faut considérer des effets collectifs dans les plasmas, qu'ils soient dus aux champs induits ou aux collisions : nous les considérerons dans la partie 1.2.

Ces différents effets, qu'ils soient propres à une particule isolée ou collectifs, ont lieu sur des échelles de temps et d'espace bien définies : les rapports entre les différentes échelles nous permettront de simplifier le problème initial à  $N$  particules. Simplifications qui se feront par l'intermédiaire d'une fonction de densité dans l'espace des phases  $f$ . Cette fonction est connue à l'équilibre thermodynamique (Boltzmann) : nous cherchons à l'exprimer à la fois le plus simplement et le plus justement possible. C'est à l'aide de l'équation de Liouville (vraie quelles que soient les approximations utilisées) et d'approximations successives que nous parviendrons à établir l'équation vérifiée par  $f$ , dite de Vlasov-Poisson, équation simplifiée par rapport à l'équation initiale qu'il faudrait avoir si l'on voulait considérer chaque particule indépendamment :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (0.1)$$

On insistera dans la partie 1.17 sur le fait que cette équation découle d'une simplification qu'on obtient grâce à l'introduction de grandeurs fluides relatives au plasma, comme la vitesse moyenne d'écoulement ou la pression.

On s'attachera ensuite à montrer les propriétés de cette équation – conservation de l'énergie par exemple – pour ensuite déterminer des situations où on peut en trouver des solutions fortes. On insistera enfin sur un résultat dû à Arsenév [3] prouvant l'existence de solutions faibles de cette équation sous certaines hypothèses sur la condition initiale.

Cependant, afin d'exhiber plus clairement des propriétés de la fonction de distribution  $f$  ou de grandeurs qui lui sont liées (la densité spatiale par exemple, qu'on obtient en intégrant  $f$  sur l'espace des vitesses), nous allons effectuer dans la partie 3 une nouvelle série d'approximations, dues à la petitesse de rapports d'échelles de temps exhibées précédemment. Nous obtiendrons après deux approximations un système modifié qui, dans la limite où les rapports considérés tendent vers 0, montrera que la densité vérifie une équation d'Euler

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n \mathbf{V} = 0. \quad (0.2)$$

Cependant la réalité physique du problème est bien plus complexe. Il pourra être utile de considérer l'équation de Vlasov-Poisson lorsque les paramètres mis en jeu sont petits mais non nuls : nous ébaucherons ce raisonnement dans la partie 4.

Ce mémoire de maîtrise a été réalisé sous la direction de Laure Saint-Raymond que nous remercions pour son aide précieuse et sa patience. La partie physique du problème est due en grande partie aux échanges avec X. Garbet et son équipe au C.E.A. de Cadarache : nous les remercions d'une part de nous avoir accueillis pendant une semaine et d'autre part pour leurs conseils, leurs disponibilités et la richesse des échanges que nous avons eus.

# 1 De la dynamique particulaire au système Vlasov-Poisson

## 1.1 Dynamique d'une particule soumise à un champ électromagnétique

On va tenter ici d'exhiber des paramètres pertinents dans notre étude des plasmas.

**Mouvement d'une particule dans un champ électromagnétique** On considère dans l'espace à trois dimensions une particule de charge  $q$  et de masse  $m$ , plongée dans un champ électrique  $\mathbf{E}(t)$  uniforme mais dépendant du temps, et un champ magnétique  $\mathbf{B}$  homogène et stationnaire<sup>1</sup>. Elle est soumise à la force de Lorentz  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$  où  $\mathbf{v}$  désigne la vitesse de la particule. L'équation du mouvement est donc donnée par

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.1)$$

Une particule soumise à un champ électrique et un champ magnétique effectue une trajectoire hélicoïdale, soit la composée d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation. Or ces deux mouvements ne s'effectuent pas du tout à la même échelle : pour les décrire, on considère  $\mathbf{B}$  suivant  $\mathbf{u}_z$ , puis  $\mathbf{u}_x$  et  $\mathbf{u}_y$  dans le plan orthogonal à  $\mathbf{B}$  afin de former une base orthonormée directe de l'espace. On notera aussi, si  $\mathbf{A}$  est un vecteur,  $\mathbf{A}_{\parallel} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_z) \mathbf{u}_z$  et  $\mathbf{A}_{\perp} = \mathbf{u}_z \times (\mathbf{A} \times \mathbf{u}_z)$ . Ces notations nous permettent d'explicitier plus facilement les mouvements de translation et de rotation de la particule.

**Propriété 1.1.** *Dans la direction du champ magnétique la particule subit une accélération due au champ électrique. Plus précisément, on a*

$$\mathbf{v}_{\parallel}(t) = \mathbf{v}_{\parallel}(t_0) + \frac{q}{m} \int_{t_0}^t \mathbf{E}_{\parallel}(u) du \quad (1.2)$$

Les résultats les plus intéressants sont ceux dans le plan perpendiculaire.

**Propriété 1.2.** *Dans le plan perpendiculaire, la particule subit plusieurs mouvements, issus d'un développement en les dérivées de  $\mathbf{E}_{\perp}$ . À l'ordre 0, on a deux mouvements*

---

<sup>1</sup>En première approximation il s'agit de la configuration des tores comme le Tore Supra.

– un mouvement de rotation de pulsation

$$\omega_c = \frac{qB}{m} \quad (1.3)$$

appelée **pulsation cyclotronique**. Ce mouvement s'effectue autour d'un **centre-guide**, de position  $\mathbf{r}_{GC}$ , de vitesse  $\mathbf{v}_{GC}$ . Le rayon de cette trajectoire circulaire, appelé **rayon de Larmor** et noté  $\rho_C$ , est

$$\rho_c = \frac{v_{GC}}{\omega_c}.$$

– un mouvement de dérive dépendant du champ électrique perpendiculaire  $\mathbf{E}_\perp$ . Plus précisément, la particule est animée d'une vitesse de dérive électrique de champs croisés.

$$\mathbf{v}_E(t) = \frac{\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (1.4)$$

**Preuve 1.** La démonstration faisant apparaître les différents termes de dérive (car il y en a bien d'autres) sera abordée en dernière partie. Nous nous contenterons ici du cas simple où  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont stationnaires. On a donc l'équation

$$m \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

soit, dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ ,

$$m \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} Bv_y \\ -Bv_x \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

On obtient alors en résolvant le système d'équations :

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \sin(\omega_c t) + E_y/B \\ v_y = v_{0y} \cos(\omega_c t) - E_x/B \end{cases} \quad (1.7)$$

On reconnaît bien un premier terme correspondant au mouvement de rotation et un deuxième terme correspondant à la vitesse de dérive.

□

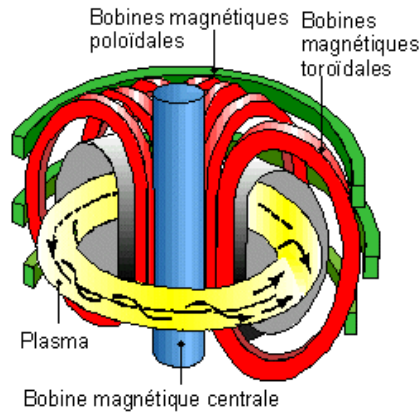


FIG. 1 – Les différentes bobines d'un tokamak

**Lien avec le tore Supra** Cette décomposition des mouvements se comprend très bien dès qu'on la relie avec la technologie utilisée dans le tore supra : Les bobines torroïdales créent un champ  $\mathbf{B}$  ; cependant, à cause du champ électrique créé par l'ensemble des particules, on observe une déviation du plasma, ce qui pose un problème, le rôle premier d'un tokamak étant de confiner un plasma. Pour contrebalancer ce mouvement de déviation, on installe des bobines poloïdales. Enfin on utilise courant électrique créé par les charges en mouvement : les bobines ohmiques centrales permettent, par induction, de créer un champ magnétique, de sorte qu'au final les lignes de champ du tokamak ressemblent à ceci :

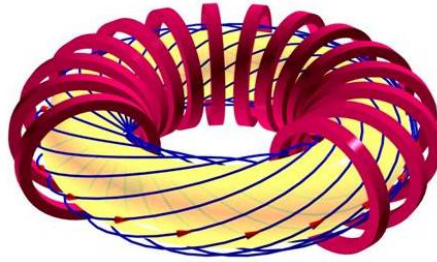


FIG. 2 – Le mouvement cyclotronique

## 1.2 Effets collectifs dans les plasmas

Les grandeurs  $\omega_c$  et  $\rho_c$  sont des grandeurs intrinsèques à chaque particule. Mais les particules créent aussi des champs auto-induits causant de nouveaux phénomènes de nouvelles échelles de temps : ainsi en est-il des phénomènes d'écrantage. Il semble cependant logique que dans un plasma, étant donné le grand nombre de particules, des **effets collectifs** aient lieu et que des grandeurs liées à ces phénomènes apparaissent dans les *scalings* utilisés. De plus le nombre de particules peut impliquer l'existence de collisions, qu'il faudra alors considérer.

### 1.2.1 Oscillations, écrantage et longueur de Debye

On rappelle ici très brièvement la manière dont on introduit la fréquence de Langmuir  $\omega_p$  et la longueur de Debye  $\lambda_D$  : c'est en comparant ces échelles de temps et d'espace avec  $\rho_c$  et  $\omega_c$  que nous pourrions approximer au mieux l'équation de Vlasov-Poisson.

**Oscillations dans un plasma.** On considère un plasma à l'équilibre et on le perturbe, de sorte que tous les électrons d'un plan donné  $x = x_0$  soient déplacés dans le plan  $x = x_0 + \xi(x_0, t)$ . Les électrons situés entre  $x = x_0$  et  $x = x_0 + \xi$  sont alors aussi déplacés. L'inhomogénéité de la distribution de charges créée alors un champ électrique, facilement calculable avec le théorème de Gauss :

$$E = \frac{n_0 e \xi(x_0, t)}{\varepsilon_0}, \quad (1.8)$$

ce qui donne l'équation du mouvement suivante

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} \xi = 0. \quad (1.9)$$

D'où une oscillation autour du point d'équilibre  $x_0$ , avec une fréquence

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}}. \quad (1.10)$$

Cette échelle de temps est donc caractéristique de l'effet collectif des forces coulombiennes (on traitera des collisions dans la partie 1.2.2). Lors d'une oscillation dans un plasma avec dissipation, l'inverse de cette pulsation correspond au temps de retour à la neutralité. Remarquons aussi qu'on a ici utilisé un argument de **moyennage du champ électrique**, qui sera réexplicité par la suite.

**Écrantage et longueur de Debye.** Nous étudierons le phénomène d'écrantage dans le cas de particules d'énergie  $eV$  très inférieure à  $kT$ . Pour une démonstration avec moins d'approximations, on regardera [1], p. 83. On utilise le résultat facilement démontrable suivant : si on plonge une particule de charge  $q'$  dans un ensemble de particules de charge  $q$  alors la densité  $n(r)$  repérée à partir de la particule ajoutée obéit à la loi de Boltzmann (à l'équilibre thermodynamique)

$$n(r) = n_0 e^{-\frac{qV}{kT}}.$$

Pour un plasma, on a donc une densité de charge de la forme  $\rho = -2en_0 \text{sh}\left(\frac{eV}{kT}\right) \approx -\frac{2e^2 V(r) n_0}{kT}$ . Ceci implique une équation de Poisson sous la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2e^2 n_0}{kT \varepsilon_0} V(r)$$

soit, en posant  $U = rV$ , et puisque  $V$  est radial, l'équation en  $U$

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{2e^2 n_0}{kT \varepsilon_0} U = 0$$

ce qui conduit à un potentiel de la forme suivante (après application des conditions aux limites)

$$V(r) = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{\lambda_D}}$$

où

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 kT}{n_0 e^2}}. \quad (1.11)$$

est appelée **longueur de Debye**. C'est la longueur à partir de laquelle le potentiel créé par une particule est écranté, c'est-à-dire qu'on ne ressent plus son effet. C'est donc l'échelle spatiale à partir de laquelle on pourra considérer le plasma quasi neutre.

### 1.2.2 Collisions dans les plasmas

On peut naturellement vouloir considérer les collisions entre particules dans les plasmas. Il n'est pas possible, contrairement à ce que nous verrons par la suite pour les potentiels d'interaction, de considérer les collisions comme un phénomène global moyennable. Il faudra déjà considérer que les collisions n'empêchent pas tout mouvement de particules et considérer que le libre parcours moyen est grand devant leur taille. Un tel *scaling* conduit à l'approximation dite de Boltzmann-Grad, que nous n'explicitons pas ici. En effet, dans la plupart des cas, on considère d'autres modèles moins exacts mais mathématiquement plus simples : on citera par exemple l'équation de Fokker-Planck qui prend en compte les collisions qui, dans notre étude physique, sont dominantes :

$$\begin{cases} \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f &= \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (T \nabla_{\mathbf{v}} f + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) f) \\ \mathbf{u} &= \frac{\int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \mathbf{v} d\mathbf{v}}{\int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}} \text{ (il s'agit de la vitesse moyenne d'écoulement)} \\ T &= \frac{1}{3} \frac{\int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 d\mathbf{v}}{\int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}} \text{ (température).} \end{cases} \quad (1.12)$$

### 1.3 Modèle cinétique

Deux équations, relativement faciles à obtenir par des méthodes physiques, vont guider notre réflexion : l'équation de Vlasov et l'équation de Poisson.

#### 1.3.1 Le système d'équations de Vlasov-Poisson

**L'équation de Liouville** À partir des équations de Hamilton, on montre le

**Théorème 1.1** (Liouville). *Pour un système hamiltonien, dans un espace à 6 dimensions, on a les propriétés suivantes (équivalentes) :*

1. *Le volume élémentaire de l'espace des phases  $\prod dq_i dx_i$  reste constant le long d'une trajectoire.*
2. *Si  $\mathcal{F}(\mathbf{p}_i, \mathbf{x}_i, t)$  est la densité dans l'espace des phases à  $6N$  dimensions ( $N$  étant le nombre de particules), on a*

$$\frac{D\mathcal{F}}{Dt} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{6N} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0. \quad (1.13)$$

Or les grandeurs physiques pertinentes telles la densité électrique  $\rho$ , la pression  $P$ , ... se déduisent de la fonction de distribution dans l'espace des phases à 6 dimensions  $f(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = \int \mathcal{F}(\mathbf{p}_i, \mathbf{x}_i, t) d\mathbf{p}_i d\mathbf{x}_i$ . Si on écrit le hamiltonien  $H = \sum \mathbf{p}_i^2/2m + \sum_{i<j} \mathcal{V}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) + \sum \phi(t, \mathbf{x})$  on obtient pour  $f$  l'équation

$$\partial_t f + \frac{p}{m} \partial_x f - \partial_x \phi \partial_p f - N \int \partial_x \mathcal{V}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \partial_p f^{(2)}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) d\mathbf{y} d\mathbf{q} = 0 \quad (1.14)$$

où  $f^{(2)}$  est une "fonction de densité à deux corps" ou fonction de corrélation encore appelée deuxième marginale. On pourrait continuer ainsi à trouver des relations entre  $f^{(2)}$  et  $f^{(3)}$ , etc ... Ce système d'équations couplées correspond à ce qu'on nomme la hiérarchie BBGKY. On aboutit ainsi à un système de  $N$



équations couplées. L'idée est alors de se ramener à une équation uniquement sur la première marginale, du type :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0,$$

où, dans notre cas,  $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ .

**Modèles de champ moyen et équation de Vlasov** Pour pouvoir simplifier le terme de l'équation (1.14), il faut travailler avec certaines hypothèses : un très grand nombre  $N$  de particules (afin de donner du sens à l'introduction d'une fonction de distribution statistique, et pour pouvoir moyenner les effets collectifs). Si le volume considéré est fini, il faudra de plus considérer que la taille des particules est très petite devant leur libre parcours moyen, afin que les fonctions de corrélation ne soient pas prépondérantes.

Il faut ensuite considérer l'effet global du potentiel d'interaction  $\mathcal{V}$  sur chaque particule, afin qu'il soit indépendant de la position relative des particules. Cette approximation demande aux phénomènes microscopiques d'être négligeables devant les forces de Lorenz. Le potentiel d'interaction  $\mathcal{V}$  et le potentiel  $\phi$  seront "réduits" dans un seul potentiel  $\varphi$ , transformant l'équation 1.14 en un système de trois équations

$$\begin{cases} \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + q\mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f & = 0 \\ \mathbf{E} & = -\nabla\phi \\ -\epsilon_0\Delta\phi & = -e \int f dv. \end{cases}$$

les deux dernières équations étant simplement les équations de l'électrostatique. On remarquera que la première équation résume simplement les deux effets à distinguer : le transport, représenté par l'opérateur  $\partial_t + \mathbf{v}\nabla_x$ , et l'effet du champ électrique (cf. partie 1.3.1).

De même on remarquera qu'un tel système, obtenu après moyennage de l'influence des différentes marginales de  $f$  est plus adapté à la recherche de solutions faibles du problème.

**Systèmes de Vlasov.** Après ce premier *scaling* ou "échelonnage" (c'est-à-dire qu'on a comparé différentes échelles de temps et d'espace afin de négliger ou de considérer plus petites certaines grandeurs devant d'autres), il reste différents moyens de formuler le système de Vlasov :

1. Le système de **Vlasov-Poisson** qui, comme son nom l'indique, concernera les plasmas dans un régime électrostatique :

$$\begin{cases} \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f & = 0 \\ \mathbf{E} & = -\nabla\phi \\ -\epsilon_0\Delta\phi & = -e \int f dv \end{cases} \quad (1.15)$$

On remarquera qu'on n'exclut en aucun cas la possibilité d'avoir un champ magnétique constant (c'est cette situation que nous étudierons par la suite).

2. Le système de **Vlasov-Maxwell** qui, comme son nom l'indique, concernera les plasmas dans le cas le plus général et utilisera donc les 4 équations

de Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{e}{\epsilon_0} \int f dv \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \\ -\frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{B} = -\mu_0 e \int f dv. \end{array} \right. \quad (1.16)$$

Cette description beaucoup plus complexe est nécessaire là où il y a une réelle création de champ magnétique par les charges, dans les interactions laser-plasma par exemple.

3. Le système de **Vlasov-Maxwell relativiste**. Il s'agit du système de Vlasov-Maxwell (1.16) dans lequel on a remplacé la vitesse  $\mathbf{v}$  par  $\frac{\mathbf{p}c}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + (mc)^2}}$ , prenant ainsi en compte les effets relativistes. Dans la suite nous nous placerons dans la limite non-relativiste.
4. le système de **Vlasov-Poisson collisionnel**. On prend en compte les collisions avec l'opérateur décrit au 1.2.2. Dans la suite, nous considérerons un plasma non-collisionnel.

### 1.3.2 Plasmas fluides - grandeurs fluides

Comme nous l'avons déjà dit, ce n'est pas la fonction de distribution en elle-même que nous pourrions mesurer mais des grandeurs qui lui sont liées, en particulier ses différents **moments**.

**Moments de la fonction de distribution et grandeurs fluides.** On définit ainsi

$$\text{la densité} \quad n(\mathbf{x}, t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}, \quad (1.17a)$$

$$\text{la vitesse fluide} \quad \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{\int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \mathbf{v} d\mathbf{v}}{n(\mathbf{x}, t)}, \quad (1.17b)$$

$$\text{la pression} \quad \mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = m \int [\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}] [\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}] f d\mathbf{v}. \quad (1.17c)$$

On peut définir des moments d'ordre supérieur ; pour l'étude que nous ferons nous n'aurons que ces trois grandeurs à considérer. Elles permettront, après de nouvelles approximations, d'exprimer plus concrètement et plus physiquement la réalité des plasmas dans les tokamaks.

### 1.3.3 L'équation d'Euler

Nous avons aussi besoin d'établir une autre équation, l'équation d'Euler. Elle interviendra dans les deux dernières sections. En rappelant que  $\mathbf{V}$  est une des grandeurs fluides définies en (1.17), correspondant à la vitesse eulérienne du fluide, on va montrer les deux relations suivantes :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot n\mathbf{V} = 0, \quad (1.18a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{nm} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \quad (1.18b)$$

**Preuve 2.** On utilise la nullité du moment d'ordre 1 de  $\frac{Df}{Dt}$  :

$$\int \mathbf{v} \cdot (\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f) d\mathbf{v} = 0.$$

On a tout d'abord

$$\int \mathbf{v} \partial_t f d\mathbf{v} = \partial_t \int \mathbf{v} f d\mathbf{v} = \frac{\partial n \mathbf{V}}{\partial t}.$$

Puis, en réécrivant le produit tensoriel  $\mathbf{v}\mathbf{v} = (\mathbf{v} - \mathbf{V})(\mathbf{v} - \mathbf{V}) - \mathbf{V}\mathbf{V} + \mathbf{v}\mathbf{V} + \mathbf{V}\mathbf{v}$ , on peut écrire

$$\int \mathbf{v} \cdot \left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right) d\mathbf{v} = \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{P}}{m} + n \mathbf{V}\mathbf{V} \right).$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \int \mathbf{v} \cdot \left( \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right) d\mathbf{v} &= \int \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot f \right) d\mathbf{v} \\ &= \int \left( \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot f \right) d\mathbf{v} \\ &= -n (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}). \end{aligned}$$

D'où au final, l'équation

$$\frac{\partial n \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla \cdot n \mathbf{V}\mathbf{V} + \frac{1}{m} \nabla \cdot \mathbf{P} - \frac{q}{m} n (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) = 0,$$

ce qui conclut la preuve. □

## 2 Le système d'équations de Vlasov-Poisson

Ici on va étudier le système de Vlasov-Poisson, après approximations faites en première partie. On le rappelle ici :

$$\begin{cases} \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{q}{m} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \\ \mathbf{E} = -\nabla_{\mathbf{x}} \phi, \quad -\varepsilon_0 \Delta_{\mathbf{x}} \phi = -e \int f d\mathbf{v} \end{cases} \quad (2.1)$$

On rappelle aussi qu'on notera  $\rho(t, \mathbf{x}) := -e \int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}$  la densité de charges, et  $\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) := -e \int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \mathbf{v} d\mathbf{v}$  la densité de courants. Dans toute la suite  $d$  désignera la dimension de l'espace où se situe le problème. L'idée sera d'expliquer plus précisément la distinction solution forte/solution faible et de montrer des cas où des solutions fortes existent, pour enfin ébaucher la preuve de l'existence de solutions faibles, due à Arsenev.

## 2.1 Première approche : le système, solutions fortes, solutions faibles

Pour rester cohérent avec la réalité des plasmas et de la physique du problème, on utilise la définition suivante :

**Définition 2.1.** Une densité initiale  $f^{in}$  ou  $f_0 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  est dite **physiquement acceptable** si les quantités suivantes sont finies :

- la charge totale,  $\int \rho(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$  ( $\rho$  est alors finie presque partout),
- l'énergie totale,  $\mathcal{E}(0) = \iint f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{1}{2} m v^2 d\mathbf{x} d\mathbf{v} + \int \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}_0(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$  où  $\mathbf{E}_0(\mathbf{x})$  est le champ électrique initial induit par  $f_0$ .

L'objectif, étant donnée une densité initiale  $f_0$  physiquement acceptable, est de répondre au problème de Cauchy correspondant au système de Vlasov-Poisson (2.1), i.e. d'établir l'existence et l'unicité d'une solution de (2.1) coïncidant avec  $f_0$  en  $t = 0$ .

Pour utiliser efficacement les algorithmes de point fixe qui peuvent résoudre ce genre de systèmes, il faut se placer dans des espaces à forte régularité, c'est-à-dire prendre des données initiales fortement régulières. Les solutions obtenues sont alors régulières et uniques, mais peuvent n'être définies qu'en un temps fini. De plus, l'ensemble des données initiales qui conviennent est maigre (au sens de Baire), bien que dense dans l'ensemble des données initiales physiquement acceptables. De plus, si grâce au théorème de conservation de l'énergie (que nous montrerons ultérieurement) les normes uniformes sont contrôlées, il n'en est pas de même pour celles utilisées dans le théorème de point fixe. Ainsi, sans estimation supplémentaire, ces normes peuvent exploser en un temps fini. Rien ne garantit *a priori* que la régularité de  $f_0$  se propage en tout temps.

Une approche plus satisfaisante consiste donc à rechercher des solutions dans un sens plus faible. On peut ainsi considérer toutes les données initiales physiquement acceptables, et en outre un théorème de contrôle de la charge et de l'énergie nous garantit que les solutions resteront physiquement acceptables en tout temps. Comme de telles fonctions ne sont pas, en général, régulières, on se contente de leur imposer de vérifier le système de Vlasov-Poisson au sens des distributions. On parle alors de solutions faibles. Elles ne sont pas uniques en général, et peuvent ne pas correspondre à une solution physique. Avant de construire ces solutions, quelques remarques sur les équations de transport sont nécessaires.

## 2.2 Estimations sur les équations de transport

### 2.2.1 Conservation des normes $L^p$ et principe du maximum

Revenons au cas général : un gaz, dont chaque particule de vitesse  $\mathbf{v}$  voit sa position devenir  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  avec  $d\mathbf{x} = \mathbf{v}dt$  après un temps infinitésimal  $dt$ , et soumis à un champ de force  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$  de divergence nulle en  $\mathbf{v}$  (i.e. vérifiant  $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{F} = 0$ ), voit sa densité vérifier (en prenant les constantes comme la masse et la charge égales à 1) :

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}}) f = 0. \quad (2.2)$$

L'opérateur  $\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$  a déjà été vu dans la première partie, et est appelé l'**opérateur de transport libre**. On appelle **équation de transport** toute équation qui le fait intervenir.

**Lemme 2.1.** *Si  $f$  est une solution forte de (2.2), de donnée initiale  $f_0$ , qui décroît "suffisamment vite" en  $|\mathbf{x}|$  et en  $|\mathbf{v}|$ , alors*

$$\begin{aligned} \forall p \in [1, \infty[, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|f(t, \cdot, \cdot)\|_{L^p_{\mathbf{x}, \mathbf{v}}} &= \|f_0\|_{L^p_{\mathbf{x}, \mathbf{v}}} && \text{(conservation des normes } L^p) \\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|f(t, \cdot, \cdot)\|_{L^\infty_{\mathbf{x}, \mathbf{v}}} &= \|f_0\|_{L^\infty_{\mathbf{x}, \mathbf{v}}} && \text{(principe du maximum).} \end{aligned}$$

**Preuve 3.** *Pour toute fonction  $\varphi$  régulière, on a*

$$\partial_t(\varphi \circ f) + \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{v} \varphi \circ f) + \nabla_{\mathbf{v}}(\mathbf{F} \varphi \circ f) = (\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f)(\varphi \circ f) = 0.$$

*En prenant  $\varphi : y \mapsto y^p$ , puis en intégrant en  $\mathbf{x}$  et en  $\mathbf{v}$ , on obtient la conservation de  $\|f\|_{L^p_{\mathbf{x}, \mathbf{v}}}$  (car  $f$  décroît suffisamment vite en  $|\mathbf{x}|$  et en  $|\mathbf{v}|$  pour que les termes de bord soient nuls)*

*On pose  $g = f + \|f_0\|_{L^\infty_{\mathbf{x}, \mathbf{v}}}$ ; alors  $(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}})(\varphi \circ g) = 0$  pour toute fonction  $\varphi$  régulière. En particulier pour toute fonction  $\varphi$  régulière, positive, et nulle sur  $\mathbb{R}_+$ . Alors (à la même condition de décroissance rapide), et pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$\iint \varphi \circ g(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = \iint \varphi \circ g(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} = 0.$$

*Ainsi  $g \geq 0$  et  $-f \leq \|f_0\|_{L^\infty_{\mathbf{x}, \mathbf{v}}}$ . On montre de même que  $f \leq \|f_0\|_{L^\infty_{\mathbf{x}, \mathbf{v}}}$ . Alors  $\|f(t)\|_{L^\infty_{\mathbf{x}, \mathbf{v}}} \leq \|f_0\|_{L^\infty_{\mathbf{x}, \mathbf{v}}}$ . En utilisant une troncature de Stampacchia, et le même argument que pour le premier point, on peut montrer que  $\|f(t)\|_{L^\infty_{\mathbf{x}, \mathbf{v}}} = \|f_0\|_{L^\infty_{\mathbf{x}, \mathbf{v}}}$ .*

□

## 2.2.2 La méthode des caractéristiques

**Définition 2.2.** *Etant donnée une équation de transport (2.2), on définit les courbes **caractéristiques** comme étant les solutions du système :*

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) & \text{avec } \mathbf{X}(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{x} \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) & \mathbf{V}(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}. \end{cases}$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, dès que  $\mathbf{F}$  est continue et localement lipschitzienne en  $\mathbf{x}$  et en  $\mathbf{v}$ , il existe un unique couple  $(\mathbf{X}, \mathbf{V})$  solution maximale. Si  $\mathbf{F}$  est bornée, ce couple est même défini en tout temps. Sous des hypothèses plus fortes, on obtient le résultat suivant :

**Lemme 2.2.** *Si  $\mathbf{F}$  et  $f_0$  sont de classe  $C^1$ , alors, sur son domaine de définition  $[0, T[$  (où  $T$  est dans  $\overline{\mathbb{R}_+}$ ), la solution forte du problème de Cauchy (2.2) avec  $f_0$  comme donnée initiale est donnée par :*

$$f(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

*La densité est propagée le long des caractéristiques.*

**Preuve 4.** *Premièrement, pour tout  $t \in [0, T[$ ,  $\Psi_t : (\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mapsto (\mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}))$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  par le théorème de Cauchy-Lipschitz. On peut*

donc bien définir  $f$  comme précédemment.

Ensuite,

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) &= (\partial_t f + \frac{d\mathbf{X}}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f)(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) \\
&= (\partial_t + \mathbf{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) \cdot \nabla_{\mathbf{v}}) \\
&\quad f(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc pour tout  $t \in [0, T[$ ,  $f(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) = f(0, \mathbf{X}(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}(0, \mathbf{x}, \mathbf{v})) = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ .

□

D'après le principe du maximum montré plus haut, une telle solution est unique. Cette méthode fonctionne également dans le cas des solutions faibles. Comme elles ne sont pas régulières, il faut définir  $f$  à l'aide de

$$(\tilde{\mathbf{X}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) := \Psi_t^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{v})$$

Il s'agit du point de l'espace des phases dont est issue la courbe qui se situe au temps  $t$  en  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ .

**Lemme 2.3.** Si  $\mathbf{F}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $f_0$  dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ , alors sur son domaine de définition  $[0, T[$  une solution faible du problème de Cauchy (2.2) avec  $f_0$  comme donnée initiale est donnée par :

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = f_0(\tilde{\mathbf{X}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})).$$

**Preuve 5.** Soit  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T[ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$  une fonction test. Alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f_0(\tilde{\mathbf{X}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \tilde{\mathbf{V}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) (\partial_t \varphi + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \varphi + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \varphi)(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} dt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) (\partial_t \varphi + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \varphi + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \varphi)(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) d\mathbf{x} d\mathbf{v} dt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{d}{dt} (\varphi(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}))) d\mathbf{x} d\mathbf{v} dt = 0.
\end{aligned}$$

$f$  ainsi définie est donc bien une solution faible. La première égalité est justifiée par le fait que le jacobien du changement de variable vaut 1 : posons

$$J(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) := \frac{\partial \Psi_t((\mathbf{x}, \mathbf{v}))}{\partial(\mathbf{x}, \mathbf{v})} = \det(d\mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), d\mathbf{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial t}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) &= \sum_i \det(dX_1, \dots, d\partial_t X_i, \dots, dX_d, dV_1, \dots, dV_d) \\
&\quad + \sum_i \det(dX_1, \dots, dX_d, dV_1, \dots, d\partial_t V_i, \dots, dV_d) \\
&= \sum_i \det(dX_1, \dots, dV_i, \dots, dX_d, dV_1, \dots, d\partial_t V_i, \dots, dV_d) \\
&\quad + \sum_i \sum_j \det(dX_1, \dots, dX_d, dV_1, \dots, \partial_{x_j} F_i dX_j + \partial_{v_j} F_i dV_j, \dots, dV_d) \\
&= \sum_i \det(dX_1, \dots, dX_d, dV_1, \dots, \partial_{v_i} F_i dV_i, \dots, dV_d) \\
&= J(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \nabla_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{F}(t, \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{V}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) = 0
\end{aligned}$$

car  $\mathbf{F}$  est de divergence nulle en  $\mathbf{v}$ . Ainsi pour tout  $t \in [0, T[$ ,  $J(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = J(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = 1$ .

□

D'après le principe du maximum, si une solution faible est régulière, elle est alors l'unique solution forte. Montrons maintenant que dans le cas de Vlasov-Poisson, des solutions faibles existent pour tout temps (solutions dites globales).

### 2.3 Existence globale de solutions faibles

Dans cette partie, nous prendrons  $d = 3$ , et cesserons de prendre les constantes physiques égales à 1.

#### 2.3.1 Estimations supplémentaires

Le théorème d'existence nécessite l'énoncé des estimations suivantes, spécifiques au modèle de Vlasov-Poisson :

**Lemme 2.4.** *Soit  $f$  une solution régulière du système de Vlasov-Poisson, décroissant suffisamment vite à l'infini :*

$$\begin{cases} \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{q}{m} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0 \\ \mathbf{E} = -\nabla_{\mathbf{x}} \phi, \quad -\varepsilon_0 \Delta_{\mathbf{x}} \phi = -e \int f d\mathbf{v} \end{cases}$$

de donnée initiale  $f_0 \geq 0$ . Alors l'énergie est conservée :

$$\mathcal{E}(t) = \iint f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{1}{2} m v^2 d\mathbf{x} d\mathbf{v} + \int \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \mathcal{E}(0).$$

**Preuve 6.** *Montrons la conservation de l'énergie, due à la non-linéarité du*

systeme d'equations :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \iint f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 d\mathbf{x} d\mathbf{v} &= \iint \left( \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} - \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) d\mathbf{x} d\mathbf{v} \\
&= \iint f \left( -e \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) d\mathbf{x} d\mathbf{v} \\
&= -e \int \mathbf{E} \cdot \left( \int f \mathbf{v} d\mathbf{v} \right) d\mathbf{x} \\
&= -e \int \phi \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \int f \mathbf{v} d\mathbf{v} \right) d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

en integrant par parties, pourvu que  $f$  decroisse suffisamment vite à l'infini. En integrant l'equation de transport sur les vitesses, on obtient par ailleurs que  $\partial_t (\int f d\mathbf{v}) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\int f \mathbf{v} d\mathbf{v}) = 0$ , d'où

$$\begin{aligned}
-e \int \phi \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left( \int f \mathbf{v} d\mathbf{v} \right) d\mathbf{x} &= +e \int \phi \partial_t \left( \int f d\mathbf{v} \right) d\mathbf{x} \\
&= \varepsilon_0 \int \phi \partial_r (\Delta_{\mathbf{x}} \phi) d\mathbf{x} \\
&= -\varepsilon_0 \int \nabla_{\mathbf{x}} \phi \cdot \partial_t (\Delta_{\mathbf{x}} \phi) d\mathbf{x} \text{ si } \nabla_{\mathbf{x}} \phi \text{ décroît suffisamment vite,} \\
&= -\frac{\varepsilon_0}{2} \int \partial_t |\nabla_{\mathbf{x}} \phi|^2 d\mathbf{x} \\
&= -\frac{d}{dt} \left( \int \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}(t, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right).
\end{aligned}$$

□

A partir de ce lemme, on peut utiliser des arguments d'interpolation qui seront détaillés dans la troisième partie, et de régularité elliptique (comme les inégalités de Gagliardo-Nirenberg) dus à l'ellipticité du système de Vlasov-Poisson. On obtient alors le résultat suivant. Nous n'en expliciterons pas la preuve :

**Lemme 2.5.** *Si  $f$  est une solution régulière de (2.1) de donnée initiale  $f_0 \geq 0$  vérifiant :*

- $\|f_0\|_{L_{\mathbf{x},\mathbf{v}}^\infty} < +\infty$ ,
  - $\mathcal{E}(0) = \iint f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 d\mathbf{x} d\mathbf{v} + \int \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}_0(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} < +\infty$ ,
- alors on a trois constantes réelles  $C_1, C_2$  et  $C_3$  telles que
- $\|\rho(t, \cdot)\|_{L_x^{5/3}} \leq C_1 \|f_0\|_{L_{\mathbf{x},\mathbf{v}}^\infty}^{2/5} \mathcal{E}(0)^{3/5}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,
  - $\|\mathbf{j}(t, \cdot)\|_{L_x^{5/4}} \leq C_2 \|f_0\|_{L_{\mathbf{x},\mathbf{v}}^\infty}^{1/5} \mathcal{E}(0)^{4/5}$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,
  - il existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  tel que, pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}^3$

$$t \in \mathbb{R}_+, \|\mathbf{E}(t, \cdot)\|_{W^{1,5/3}(K)} + \lambda \|\partial_t \mathbf{E}(t, \cdot)\|_{L^{5/4}(K)} \leq C_3.$$

### 2.3.2 Le théorème d'existence

Grâce aux estimations précédentes, nous pouvons énoncer le théorème suivant :



**Théorème 2.1.** *Soit  $f_0$  une fonction positive appartenant à  $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  et d'énergie  $\mathcal{E}(0)$  finie.*

*Alors il existe une solution faible globale de (2.1) ayant pour donnée initiale  $f_0$ .*

**Preuve 7.** *La démonstration est due à Arsen'ev, dans son article de 1975. L'idée est d'utiliser des approximations régularisantes du problème, de construire pour chacune une solution régulière et de montrer que ces solutions approchées convergent vers une solution faible. Nous n'écrivons ici que les principales étapes, en simplifiant les notations comme auparavant avec les constantes égales à 1.*

*Si l'on ne peut construire de solution du système avec la méthode des caractéristiques, c'est à cause du champ de force  $\mathbf{E}$  qui n'est pas de classe  $C^1$ . La première étape consiste donc à régulariser ce champ : pour  $\eta > 0$ , on considère donc le système approché :*

$$\begin{cases} \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f + \mathbf{E}_\eta \cdot \nabla_v f = 0 \\ \mathbf{E}_\eta = \nabla_x(-\Delta_x^{-1} + \eta(-\Delta_x)^s)\rho \end{cases} \quad (2.3)$$

*avec  $s$  arbitrairement grand. On construit maintenant l'opérateur  $\mathcal{T}$  de la façon suivante : soit  $\mathbf{E} \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ . Par la méthode des caractéristiques, il existe une solution faible  $f$  de l'équation de transport  $\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f + \mathbf{E} \cdot \nabla_v f = 0$ . Si  $s$  est suffisamment grand, on a des caractéristiques définies pour tout temps. On définit alors l'image de  $\mathbf{E}$  par  $\mathcal{T}$  par  $\mathcal{T}\mathbf{E} = \nabla_x(-\Delta_x^{-1} + \eta(-\Delta_x)^s)\rho$ . On a :*

$$\mathcal{T} : \mathbf{E} \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^3) \longmapsto \mathcal{T}\mathbf{E} \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^3).$$

*Grâce à la conservation de la masse par l'équation de Vlasov et à la majoration de l'énergie, on peut montrer que pour tout  $\mathbf{E}$ ,  $\mathcal{C}\mathbf{E}$  est uniformément bornée dans  $C^1([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ . On peut même obtenir que  $\mathcal{T}$  est continue et compacte. D'après le théorème du point fixe de Schauder, le système (2.3) admet une solution  $f_\eta$ , unique ; elle est en outre globale.*

*On souhaite maintenant passer à la limite  $\eta \rightarrow 0$  dans (2.3). On utilise pour cela les contrôles de normes du lemme précédent :*

$$\begin{cases} \|\mathbf{E}_\eta\|_{L^2 \cap W^{1,5/3}} \leq K \\ \|\partial_t \mathbf{E}_\eta\|_{L^{5/4}} \leq K \\ \|f_\eta\|_{L^\infty} \leq K \end{cases}$$

*$(\mathbf{E}_\eta)_\eta$  est donc dans un compact de  $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ , le passage à la limite ne pose pas de problème pour l'instant. Le terme non linéaire, en  $\mathbf{E}_\eta f_\eta$ , est cependant plus délicat : on a besoin de plus de compacité encore. Or par conservation de la masse,  $(f_\eta)_\eta$  est relativement compacte dans  $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ . Soit  $f$  une valeur d'adhérence, on a alors  $f_\eta \rightharpoonup f$  (à une sous-suite près) et ensuite  $\mathbf{E}_\eta \rightarrow \mathbf{E}$  grâce aux lemmes de régularité précédents. On a donc  $\partial_t f_\eta + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f_\eta \rightarrow \partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f$  et  $f_\eta \mathbf{E}_\eta \rightarrow f \mathbf{E}$  au sens des distributions. Tous les passages à la limite sont autorisés, et ainsi  $(f, \mathbf{E})$  est solution faible du système de Vlasov-Poisson.*

### 2.3.3 Quelques remarques

Cette version du théorème n'est pas la plus forte : on peut se contenter de  $f_0 \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$  et d'énergie finie, et même d'une dimension  $d$  différente de 3.

En restant dans le cas général, la solution construite n'est ni régulière, ni unique. Cependant, un théorème dû à Horst permet d'obtenir cette régularité au prix d'une hypothèse supplémentaire :

**Théorème 2.2.** *Soit  $f$  une solution faible de (2.1). S'il existe  $C, T \geq 0$  tels que*

$$\forall t \in [0, T], \quad \|\rho(t, \cdot)\|_{L_x^\infty} \leq C. \quad (2.4)$$

*Alors  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  et  $y$  est l'unique solution régulière.*

Pour obtenir la régularité et l'unicité globales, il suffit donc d'exhiber une fonction  $\xi \in L_{loc}^\infty([0, +\infty[)$  vérifiant

$$\forall t \in [0, T], \quad \|\rho(t, \cdot)\|_{L_x^\infty} \leq \xi(t). \quad (2.5)$$

On a alors le théorème suivant (pour  $d = 3$ , la démonstration est due à Bardos et Degond) :

**Théorème 2.3.** *Si  $d = 2$  ou  $3$  et si  $\|f_0\|_{C^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)}$  est suffisamment petite, le critère (2.5) est vérifié : il existe une unique solution globale continûment différentiable.*

## 3 L'approximation gyrocinétique

### 3.1 Motivation et travail préliminaire

Dans les tokamaks, le champ magnétique extérieur imposé est intense : les expressions de  $\omega_c$  et  $\rho_c$  vues précédemment montrent que le mouvement des particules dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$  est un mouvement de rotation très rapide et d'amplitude très petite. Ceci impliquera l'apparition de nouveaux *scalings* possibles, qui permettront de simplifier encore l'équation de Vlasov-Poisson afin de faciliter, par exemple, des simulations numériques. Dans toute la suite, afin de faciliter notre étude, on se place spatialement dans  $\mathbb{T}^d$  où  $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ .

**Vitesse de dérive électrique et restriction à la dimension 2.** La première partie a permis de rappeler qu'une particule soumise à des champs constants  $E$  et  $B$  avait un mouvement qu'on peut décomposer, en première approximation, en un mouvement dans le plan orthogonal à  $B$  et un mouvement colinéaire à  $B$  (décomposition qui trouve sa légitimité dans la limite  $B \rightarrow \infty$ ) – les autres mouvements étant supposés négligeables. On a en réalité une description un peu plus précise du mouvement :

$$x_{\parallel}(t) = x_{\parallel}(0) + v_{\parallel}(0)t + \frac{q\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}}{m|\mathbf{B}|} \frac{t^2}{2}, \quad (3.1a)$$

$$x_{\perp}(t) = x_{\perp}(0) + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2} t + O\left(\frac{m}{q|\mathbf{B}|}\right) + O\left(\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|}\right). \quad (3.1b)$$

En fait ce résultat fonctionne dans bien d'autres cas : nous en reparlerons en dernière partie.

**Scalings pour l'équation de Vlasov-Poisson.** Ici on va introduire des paramètres sans dimension correspondant à des rapports d'échelles de temps explicitées en première partie.

**Premier *scaling*.** Tout d'abord, il peut être intéressant de comparer  $\omega_c$  et  $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}}$  (remarquons que dans [4],  $\omega_p$  est défini avec  $T_p = mu/q[E]$  et  $\varepsilon_0[E]^2 = m[\rho]u^2$  où  $[\cdot]$  signifie ordre de grandeur, ce qui revient au même). Nous nous intéresserons tout d'abord au *scaling* suivant :

$$\frac{\omega_p}{\omega_c} = \varepsilon. \quad (3.2)$$

Concrètement, cela signifie que le temps de rotation des particules autour des centres guides est beaucoup plus faible que l'échelle de temps du mouvement collectif des électrons : utiliser ce *scaling* revient donc à considérer qu'on moyenne le mouvement des électrons et qu'on s'intéresse donc essentiellement au mouvement des centres. Il s'agit donc d'une première étape vers l'approximation. Cette moyenne consiste concrètement à remplacer dans l'équation

$$\partial_t f + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} f = 0$$

par ces équations où on adimensionne les variables et où on utilise le *scaling*

$$\partial_t f_\varepsilon + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f_\varepsilon + q\mathbf{E}_\varepsilon \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\varepsilon = 0, \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{E}_\varepsilon = -\nabla_x \varphi_\varepsilon, \quad (3.3b)$$

$$-\Delta_x \varphi_\varepsilon = \rho_\varepsilon - \bar{\rho}_\varepsilon, \quad (3.3c)$$

$$\rho_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon dv, \quad \bar{\rho}_\varepsilon = \int_{\mathbb{T}^2} \rho_\varepsilon dx, \quad (3.3d)$$

$$f_\varepsilon(0, x, v) = f_\varepsilon^{\text{in}}(x, v). \quad (3.3e)$$

**Deuxième *scaling*.** Pour ce deuxième *scaling*, on part sur une hypothèse de quasi-neutralité du plasma du point de vue de l'observateur (et non pas des particules, bien sûr...). Ceci implique que, si  $T_o$  est le temps d'observation, on doit avoir  $T_p/T_o = \varepsilon$ . Ceci donne alors l'équation suivante :

$$\varepsilon \partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon + E_\varepsilon \cdot \nabla_v f_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} v^\perp \cdot \nabla_v f_\varepsilon = 0 \quad (3.4)$$

où  $(v_1, v_2)^\perp = (-v_2, v_1)$ .

Ce  $\varepsilon$  devant  $\partial_t f_\varepsilon$  s'explique que ce terme, qui correspond à une dérivée temporelle, correspond à la mesure de l'évolution sur le temps d'observation, donc  $< \varepsilon T_p$ . L'appartition du  $v^\perp$  correspond à l'adimensionnement du système (disparition du terme  $B$ ).

## 3.2 Résultats en dimension 2

### 3.2.1 Théorème

Le principal résultat que nous allons établir dans cette partie concerne la possibilité de "passer à la limite" dans l'équation de Vlasov-Poisson pour les centres-guides. Bien que le petit paramètre  $\varepsilon$  soit, dans la pratique, un paramètre fixé, nous nous interrogerons sur ce qu'il advient lorsqu'il tend vers 0, afin d'avoir en quelque sorte une approximation à l'ordre 0 de la situation réellement étudiée. Il n'est pas possible de passer à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  directement mais nous avons le résultat suivant :

**Théorème 3.1.** *Soit une condition initiale  $f^{in} \in L^\infty \cap L^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$  telle que  $f^{in} \geq 0$  et  $\mathcal{E}(f^{in}) = \iint_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} \frac{1}{2} |v|^2 f^{in}(x, v) dx dv + \int_{\mathbb{T}^2} \frac{1}{2} |E^{in}(x)|^2 dx < \infty$ .<sup>2</sup> Considérons des solutions  $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  du système d'équations (3.3c), (3.3d), (3.3e) et (3.4). On a alors les propriétés suivantes :*

1. *Il existe une sous-suite de  $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  (notée encore  $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ ) et  $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^\infty \cap L^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}_+))$  telle que*

$$f_\varepsilon \longrightarrow f(t, x, |v|) \text{ faible-* dans } L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

2. *Il existe une mesure de défaut  $\nu \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{M}(\mathbb{T}^2 \times S^1))$ <sup>3</sup> telle que pour toute fonction  $\varphi$  continue sur la sphère unité, on ait*

$$\int_{\mathbb{R}^2} [f_\varepsilon(t, x, v) - f(t, x, |v|)] \varphi\left(\frac{v}{|v|}\right) |v|^2 dv \longrightarrow_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S^1} \varphi(\theta) d\nu\theta, \quad (3.5)$$

*cette convergence se faisant au sens des distributions. Mais surtout, si on considère la densité limite*

$$\rho(t, x) = \int_{\mathbb{T}^2} f(t, x |v|) dv, \quad (3.6)$$

*alors on a*

$$\partial_t \rho + \nabla_x \cdot \rho E_\perp = (\partial_1^2 - \partial_2^2) \int_{S^1} \theta_1 \theta_2 d\nu(\theta) + \partial_1 \partial_2 \int_{S^1} (\theta_1^2 - \theta_2^2) d\nu(\theta) \quad (3.7)$$

*avec de plus*

$$\begin{cases} E &= -\nabla_x \varphi \\ -\Delta_x \varphi &= \rho - \bar{\rho} \end{cases} \quad (3.8)$$

*ainsi que les équations habituelles sur la densité :*

$$\rho(0, x) = \int_{\mathbb{R}^2} f^{in} dv, \quad \bar{\rho} = \int_{\mathbb{T}^2} \rho(0, x) dx \quad (3.9)$$

### 3.2.2 Commentaires

Ce théorème appelle à plusieurs commentaires.

**La mesure de défaut.** Elle mesure la quantité d'énergie portée par les particules à très grande vitesse. Il faut d'abord dire que cette mesure de défaut peut être supprimée — dans l'équation d'Euler tout du moins — moyennant des arguments plus fins. On trouvera dans [4] des situations dans lesquelles elle s'annule mais aussi un contre-exemple qui permet de souligner que c'est l'annulation de cette mesure **dans l'équation de continuité** et non pas dans l'équation de Vlasov limite qui est importante.

<sup>2</sup>En clair, la fonction de distribution initiale est bornée, intégrable, positive et l'énergie initiale est finie...

<sup>3</sup> $\mathcal{M}(X)$  désigne l'ensemble des mesures positives sur  $X$  et  $\mathcal{M}_+(X)$  son cône positif.

**Exemples 1.** Soit  $(f_\varepsilon^{in})$  une famille de fonctions positives dans  $C_c^\infty(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$  telle que, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,

$$\iint_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} |v|^2 f_\varepsilon^{in} dx dv \rightarrow 1, \quad \|f_\varepsilon^{in}\|_{L_{x,v}^\infty} = O(\varepsilon^3) \quad (3.10)$$

Soit alors  $(f_\varepsilon)$  une famille de solutions de (3.4)-(3.3c)-(3.3d) avec les données initiales définies ci-dessus. Alors il n'existe aucune sous-suite de  $(f_\varepsilon)$  pour laquelle la mesure de défaut  $\nu$  s'annule.

Cependant sa contribution à l'équation d'Euler s'annule toujours : voir [5] pour une démonstration de ce résultat, à l'aide d'arguments de troncature.

**L'équation fluide.** En oubliant la mesure de défaut, on montre qu'à la limite, même si les centres guides ne vérifient pas directement l'équation de Vlasov-Poisson, ils vérifient une équation fluide (qu'on a établi à l'aide de Vlasov-Poisson et des moments de la fonction  $f$ ).

**Questions physiques.** Cependant, des questions restent en suspens, auxquelles nous répondrons dans la partie 4 : le *scaling* utilisé est-il approprié ? Quelle est la pertinence des approximations utilisées ? Comment font les physiciens qui ne veulent pas directement assimiler les particules aux centres guides et utiliser un ordre d'approximation plus fin ?

### 3.2.3 Preuve du théorème (3.1)

Nous reprendrons ici la démarche utilisée dans [4]. On démontre ce théorème en 5 étapes :

1. On établit une égalité similaire à l'équation (3.7), mais valable pour les  $f_\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_\varepsilon + \nabla_x \cdot \rho_\varepsilon E_{\perp \varepsilon} &= (\partial_1^2 - \partial_2^2) \int_{\mathbb{R}^2} v_1 v_2 f_\varepsilon dv + \partial_1 \partial_2 \int_{\mathbb{R}^2} (v_1^2 - v_2^2) f_\varepsilon dv \\ &\quad + \varepsilon \partial_t \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^2} v_{\perp} f_\varepsilon dv \end{aligned}$$

2. Afin de prouver la convergence des différents termes présents dans l'équation précédente, on a besoin d'établir une inégalité d'interpolation valide dans un cadre très général.
3. On montre à la fois que  $(f_\varepsilon)_\varepsilon$  est relativement compacte dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{M}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2))$  et que ses valeurs d'adhérence sont invariantes par rotation en  $\mathbf{v}$ .
4. On montre la bornitude des  $\rho_\varepsilon$  dans  $\mathcal{C}^{1/2}(\mathbb{R}_+; W^{-2,1}(\mathbb{T}^2))$ , ce qui permettra, avec le second lemme, de montrer la convergence des  $\rho_\varepsilon$  et des  $E_\varepsilon$ .
5. On prouve effectivement le théorème 3.1

**Etape 1.** On va montrer que les fonctions  $f_\varepsilon$  vérifient une pseudo-équation de continuité, résultat formulé dans le

**Lemme 3.1.** Soit une famille de fonctions  $(f_\varepsilon^{in})_\varepsilon$  une famille de fonctions dans  $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$  positives et d'énergie finie. Alors

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \nabla_x \cdot \rho_\varepsilon E^\perp_\varepsilon = (\partial_1^2 - \partial_2^2) \int_{\mathbb{R}^2} v_1 v_2 f_\varepsilon dv + \partial_1 \partial_2 \int_{\mathbb{R}^2} (v_1^2 - v_2^2) f_\varepsilon dv + \varepsilon \partial_t \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^2} v_\perp f_\varepsilon dv. \quad (3.11)$$

**Preuve du Lemme 1.** Pour ce faire, on sait déjà que si  $f_\varepsilon$  est solution de Vlasov-Poisson au sens des distributions, alors la fonction est dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2, dx(1 + |v|^2)dv))$  : ceci se déduit directement de l'inégalité d'énergie que vérifient les  $f_\varepsilon$  :

$$\mathcal{E}(f_\varepsilon(t, \cdot, \cdot)) \leq \mathcal{E}(f^{in})$$

(on rappelle que  $\mathcal{E}(f) = \iint_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} \frac{1}{2} |v|^2 f(x, v) dx dv + \int_{\mathbb{T}^2} \frac{1}{2} |E(x)|^2 dx$ ). Par le même argument,  $E_\varepsilon$  est dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{T}^2))$ . Ces résultats permettent alors de tester l'équation (0.1) avec des fonctions du type  $\varphi_0(t, x) \chi_R(|v|)$  ou  $\varphi_0(t, x) \chi_R(|v|) v$  avec  $\varphi_0(t, x) \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^2)$  et  $\chi_R \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$  égale à 1 sur  $[0, R]$ , et 0 sur  $[R, 2R]$  (pour pouvoir obtenir les résultats voulus par convergence dominée en faisant  $R \rightarrow \infty$ ). Ceci donne, pour  $\varphi_0(t, x) \chi_R(|v|)$

$$\begin{aligned} & \varepsilon \iiint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} \partial_t f_\varepsilon \varphi_0(t, x) \chi_R(|v|) dv dx dt \\ & + \iiint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} v \cdot \nabla_x f_\varepsilon \varphi_0(t, x) \chi_R(|v|) dv dx dt \\ & + \text{termes en } \nabla_v \text{ qui s'annulent quand on les intègre} \\ & + \text{reste qui tend vers 0 lorsque } R \text{ tend vers } \infty = 0 \end{aligned}$$

soit, par convergence dominée et en faisant  $R \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned} & \varepsilon \iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^2} \partial_t \int_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon dv \varphi_0(t, x) dx dt \\ & + \iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^2} \nabla_x \int_{\mathbb{R}^2} v \cdot f_\varepsilon dv \varphi_0(t, x) dx dt = 0 \end{aligned}$$

d'où la relation

$$\partial_t \rho_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_x \int v f_\varepsilon dv = 0.$$

De même on a, pour toute  $\varphi_0$

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^2} \left( \varepsilon \partial_t \int f_\varepsilon \varphi_0(t, x) \chi_R(|v|) v dv + \underbrace{\int v \cdot \nabla_x f_\varepsilon v \chi_R(|v|) dv}_{(1)} \right) \\ & + \underbrace{E_\varepsilon \int v \cdot \nabla_v f_\varepsilon \chi_R(|v|) dv}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \int v^\perp \cdot \nabla_v f_\varepsilon v \chi_R(|v|) dv}_{(3)} dx dt = 0 \end{aligned}$$

(1) permet de faire apparaître le produit tensoriel  $v \otimes v$ , défini par  $(v \otimes v)_{i,j} = v_i v_j$ . Par intégration par parties pour (2) et (3) on aboutit au résultat

$$\partial_t \int v f_\varepsilon dv + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_x \int v \otimes v f_\varepsilon dv - \frac{1}{\varepsilon} \rho_\varepsilon E_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon^2} \int v^\perp f_\varepsilon dv = 0 \quad (3.12)$$

Puis par rotation de  $\pi/2$  et combinaison des deux relations, on obtient le résultat.  $\square$

**Etape 2.** On rappelle d'abord les résultats suivants (cf partie 1.3.1) : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une solution  $f_\varepsilon$  de (3.4), (3.3c), (3.3d) et telle que

$$f_\varepsilon > 0 \text{ p.p.}, \forall t > 0, \iint f_\varepsilon(t, x, v) dx dv = \iint f^{in} dx dv, \|f_\varepsilon\|_{L^\infty} = \|f^{in}\|_{L^\infty}. \quad (3.13)$$

De plus on a l'inégalité sur l'énergie suivante

$$\mathcal{E}(f_\varepsilon(t, \cdot, \cdot)) \leq \mathcal{E}(f^{in}). \quad (3.14)$$

On montre ensuite le lemme d'interpolation suivant :

**Lemme 3.2.** Si  $f$  est une fonction mesurable de  $(\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^d)$  ( $d \geq 0$ ) et positive presque partout, alors pour tout  $m \geq 0$ , pour tout  $k$  tel que  $0 \leq k \leq m$ , il existe une constante  $C(d, k)$  positive dépendant uniquement de  $d$  et de  $k$  telle que

$$\left\| \int f(x, v) |v|^k dv \right\|_{L^{\frac{m+d}{d+k}}} \leq C(d, k) \|f\|_{L^\infty}^{\frac{m-k}{m+d}} \left( \iint f |v|^m dv d\mathbf{x} \right)^{\frac{d+k}{m+d}}. \quad (3.15)$$

**Preuve du Lemme 2.** On remarque que, quel que soit le réel positif  $R$  choisi, on a

$$\begin{aligned} \int f(x, v) |v|^k dv &= \int_{|v| \leq R} f(x, v) |v|^k dv + \int_{|v| \geq R} f(x, v) |v|^k dv \\ &= \|f\|_{L^\infty} \frac{|S^{d-1}|}{k+d} R^{k+d} + \frac{1}{R^{m-k}} \int f |v|^m dv. \end{aligned}$$

(on a ici seulement séparé le terme dépendant des petites vitesses et celui dépendant des grandes vitesses).

Puis on choisit pour démontrer l'inégalité voulue  $R^{m-d} = \frac{\int f |v|^m dv}{\|f\|_{L^\infty}}$ , ce qui donne

$$\int f |v|^k dv \leq \left( 1 + \frac{|S^{d-1}|}{k+d} \right) \|f\|_{L^\infty}^{\frac{m-k}{m+d}} \left( \int f |v|^m dv \right)^{\frac{d+k}{m+d}}.$$

On élève à la puissance  $\frac{m+d}{d+k}$  et on intègre en  $x$ , ce qui donne le résultat.  $\square$

**Etape 3.** On montre ensuite que notre fonction limite est invariante par rotation. On montre même un résultat plus général dans le lemme suivant :

**Lemme 3.3.** Soit  $(f_\varepsilon^{in})$  une famille de fonctions de  $L^\infty \cap L^1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$  vérifiant

$$f_\varepsilon^{in} \geq 0 \text{ presque partout, } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \|f_\varepsilon^{in}\|_{L_{x,v}^\infty} = 0 \text{ et } \sup_\varepsilon \left[ \varepsilon \|f_\varepsilon^{in}\|_{L_{x,v}^\infty} + \mathcal{E}(f_\varepsilon^{in}) \right] < +\infty \quad (3.16)$$

et soit  $(f_\varepsilon)$  une famille de solutions faibles de (3.4)-(3.3c)-(3.3d) avec pour donnée initiale la famille  $(f_\varepsilon^{in})$ . Alors  $(f_\varepsilon)_\varepsilon$  est relativement compacte dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2))$  faible étoile et toutes ses valeurs d'adhérence sont invariantes par les transformations du type  $(t, x, v) \rightarrow (t, x, \mathcal{R}v)$  où  $\mathcal{R} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}^2)$

**Preuve du Lemme 3.** On a déjà, par l'inégalité (3.14),

$$\iint_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} \frac{1}{2} |v|^2 f_\varepsilon(t, x, v) dx dv + \int_{\mathbb{T}^2} \frac{1}{2} |E_\varepsilon(t, x)|^2 dx < \iint_{\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} \frac{1}{2} |v|^2 f^{in}(t, x, v) dx dv + \int_{\mathbb{T}^2} \frac{1}{2} |E^{in}(x)|^2 dx < \infty.$$

Ainsi  $(f_\varepsilon)$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1(dx(1+|v|)dv))$  et donc est faible-\* relativement compacte dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2))$ .

Puis en multipliant (3.4) par  $\varepsilon^2$  :

$$v^\perp \cdot \nabla_v f_\varepsilon = - \underbrace{\partial_t (\varepsilon^2 f_\varepsilon)}_{(1)} - \underbrace{\nabla_x \cdot (\varepsilon v f_\varepsilon)}_{(2)} - \underbrace{\nabla_v \cdot E_\varepsilon f_\varepsilon}_{(3)}$$

La bornitude de  $(f_\varepsilon)$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1(dx(1+|v|)dv))$  implique que les termes (2) et (3) tendent vers 0 au sens des distributions. Le terme (1) disparaît grâce aux égalités (3.13). Ainsi,

$$v^\perp \cdot \nabla_v f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$$

Donc, si  $f$  est une valeur d'adhérence de  $(f_\varepsilon)$ , on a

$$v^\perp \cdot \nabla_v f = 0.$$

Soit, plus explicitement,

$$(-v_2 \partial_{v_1} + v_1 \partial_{v_2}) f_\varepsilon = 0.$$

Or, si on écrit que  $f = f(t, \mathbf{x}, |v| \sin \theta, |v| \cos \theta)$ , on a

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = |v| \cos \theta \frac{\partial f}{\partial v_1} - |v| \sin \theta \frac{\partial f}{\partial v_2} = 0 \text{ d'après (3.17).}$$

Donc  $f$  est radiale, ce qui conclut la preuve. □

**Étape 4.** Il faut avoir des estimations sur le comportement de la densité  $\rho_\varepsilon$  :

**Lemme 3.4.** Soit  $(f_\varepsilon^{in})$  une famille de fonctions dans  $L^\infty \cap L^1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2)$  vérifiant (3.16) et soit  $(f_\varepsilon)$  une famille de solutions faibles de (3.4)-(3.3c)-(3.3d) avec pour donnée initiale la famille  $(f_\varepsilon^{in})$ . Alors la famille des  $(\rho_\varepsilon(t, x))$  est bornée dans  $C^{1/2}(\mathbb{R}_+; W^{-2,1}(\mathbb{T}^2))^4$ .

<sup>4</sup> $g \in W^{-2,1}(\mathbb{T}^2)$  est la dérivée seconde d'une fonction dans  $L^2$



**Preuve du Lemme 4.** On pose

$$\pi_\varepsilon = \rho_\varepsilon - \varepsilon \nabla_x \cdot \int v^\perp f_\varepsilon dv.$$

On va d'abord montrer que  $\partial_t \pi_\varepsilon$  est borné dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+; W^{-2,1}(\mathbb{T}^2))$ . Remarquons déjà que, par le lemme 3.1, on a

$$\partial_t \pi_\varepsilon = \underbrace{-\nabla_x \cdot \rho_\varepsilon E_\varepsilon}_{(1)} + \underbrace{(\partial_1^2 - \partial_2^2) \int_{\mathbb{R}^2} v_1 v_2 f_\varepsilon dv}_{(2)} + \underbrace{\partial_1 \partial_2 \int_{\mathbb{R}^2} (v_2^2 - v_1^2) f_\varepsilon dv}_{(3)}. \quad (3.17)$$

Par l'estimation (3.14) la famille  $(E_\varepsilon)$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{T}^2))$ . On remarque de plus qu'avec les égalités  $\nabla_x \cdot E_\varepsilon = \rho_\varepsilon - \bar{\rho}_\varepsilon$  et  $\nabla_x \cdot E_\varepsilon^\perp$  on a

$$(\rho_\varepsilon - \bar{\rho}_\varepsilon) E_\varepsilon^\perp = \left( \frac{1}{2} \partial_2 (E_{1\varepsilon}^2 - E_{2\varepsilon}^2) - \partial_1 (E_{1\varepsilon} E_{2\varepsilon}), \frac{1}{2} \partial_1 (E_{1\varepsilon}^2 - E_{2\varepsilon}^2) + \partial_2 (E_{1\varepsilon} E_{2\varepsilon}) \right). \quad (3.18)$$

On a donc l'existence d'une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on ait

$$\|\nabla_x \cdot (\rho_\varepsilon E_\varepsilon^\perp)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, W^{-2,1}(\mathbb{T}^2))} \leq C \|E_\varepsilon^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{T}^2))} \leq C \sup_\varepsilon \mathcal{E}(f_\varepsilon^{in}). \quad (3.19)$$

En utilisant de nouveau l'inégalité sur l'énergie avec les termes (2) et (3), on a finalement que  $\frac{\partial t}{\partial \pi_\varepsilon}$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+, W^{-2,1}(\mathbb{T}^2))$ . Puis les formules (3.12) et (3.18) permettent d'obtenir l'existence de  $C > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tous  $0 \leq t \leq t'$  on ait

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left\| \int v^\perp f_\varepsilon(t', x, v) dv - \int v^\perp f_\varepsilon(t, x, v) dv \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \\ & \leq C(t' - t) \left( \|E_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{T}^2))} + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \left\| \int (1 + |v|^2) f_\varepsilon dV \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{T}^2))} \right) \\ & \leq C \sup_{\varepsilon > 0} \left( \frac{1}{2} \|f_\varepsilon^{in}\|_{L^1} + \mathcal{E}(f_\varepsilon^{in}) \right) (t' - t) \left(2 + \frac{2}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

En supposant  $\varepsilon < 1$  (ce qui est légitime puisqu'on s'intéresse à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), on a

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left\| \int v^\perp f_\varepsilon(t', x, v) dv - \int v^\perp f_\varepsilon(t, x, v) dv \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \\ & \leq \varepsilon \left\| \int v^\perp f_\varepsilon(t', x, v) dv \right\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} + \varepsilon \left\| \int v^\perp f_\varepsilon(t, x, v) dv \right\|_{L^1(\mathbb{T}^2)} \\ & \leq 2A\varepsilon \leq 2A\sqrt{t' - t}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

où  $A = \sup_{\varepsilon > 0} \left( \frac{1}{2} \|f_\varepsilon^{in}\|_{L^1} + \mathcal{E}(f_\varepsilon^{in}) \right)$ .

Si de plus  $t' - t \leq \varepsilon^2$  on obtient

$$\begin{aligned} & \varepsilon \left\| \int v^\perp f_\varepsilon(t', x, v) dv - \int v^\perp f_\varepsilon(t, x, v) dv \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \\ & \leq CA(t' - t) \left(2 + \frac{2}{\sqrt{t' - t}}\right) \leq 4CA\sqrt{t' - t}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

En combinant les deux dernières inégalités on a

$$\varepsilon \left\| \int v^\perp f_\varepsilon(t', x, v) dv - \int v^\perp f_\varepsilon(t, x, v) dv \right\|_{W^{-1,1}(\mathbb{T}^2)} \leq (2 + 4C)A\sqrt{t' - t}, \quad (3.23)$$

ce qui conclut la preuve du lemme lorsqu'on combine cette inégalité avec la définition de  $\pi_\varepsilon$  et la bornitude de  $\partial_t \pi_\varepsilon$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+; W^{-2,1}(\mathbb{T}^2))$ .

□

**Etape 5.** Enfin on prouve le théorème grâce aux précédents lemmes.

**Définition de la mesure de défaut** Soit une sous suite de  $(f_\varepsilon)$  notée identiquement par souci de simplicité, convergeant vers une fonction  $f$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2))$  (une telle sous-suite existe grâce au lemme 3.3). Par l'inégalité sur l'énergie (3.14), la suite des  $|v|^2 f_\varepsilon$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2))$ . Ainsi la suite des

$$\mu_\varepsilon = \int_0^\infty r^2 f_\varepsilon(t, x, r\theta) r dr \quad (3.24)$$

est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{T}^2 \times S^1))$ . Ainsi il existe une sous suite de  $(f_\varepsilon)$  qu'on notera  $(f_{\varepsilon'})$  telle que  $\mu_{\varepsilon'}$  converge vers une fonction  $\mu$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{T}^2 \times S^1))$  faible-\*. On définit alors la mesure de défaut associée à la sous-suite  $f_{\varepsilon'}$  par

$$\langle \nu, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \times S^1} \psi(t, x, \theta) d\mu(t, x, \theta) - \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2} \psi\left(t, x, \frac{v}{|v|}\right) |v|^2 df(t, x, v) \quad (3.25)$$

(3.26)

et ce, pour toute fonction  $\psi$  dans  $C_c^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^2 \times S^1)$ .

**Positivité de la mesure de défaut.** Soit  $\chi$  dans  $C_c^0(\mathbb{R}_+)$  telle que  $\chi_{[0,1]}$  soit identiquement égale à 1, telle que  $\chi_{[2,+\infty]}$  soit identiquement nulle et avec  $0 \leq \chi \leq 1$ . Pour  $R > 0$  on définit  $\chi_R(v) = \chi(|v|/R)$ . Pour toute fonction positive  $\psi$  dans  $C_c^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^2 \times S^1)$  et pour  $\varepsilon' > 0$  on a

$$\left\langle |v|^2 f_\varepsilon, \psi\left(t, x, \frac{v}{|v|}\right) \chi_R(v) \right\rangle \leq \left\langle |v|^2 f_\varepsilon, \psi\left(t, x, \frac{v}{|v|}\right) \right\rangle = \langle \mu_\varepsilon, \psi \rangle \quad (3.27)$$

soit, en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0,

$$\left\langle |v|^2 f, \psi\left(t, x, \frac{v}{|v|}\right) \chi_R(v) \right\rangle \leq \langle \mu, \psi \rangle \quad (3.28)$$

En faisant enfin tendre  $R$  vers  $+\infty$  on conclut que  $\nu$  est positive.

**Convergence des différentes quantités mises en jeu.** En appliquant le lemme 3.1 aux  $f_{\varepsilon'}$  et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, le second terme de l'égalité de ce lemme tend au sens des distributions vers

$$(\partial_1^2 - \partial_2^2) \int_{\mathbb{R}^2} v_1 v_2 f dv + \partial_1 \partial_2 \int_{\mathbb{R}^2} (v_1^2 - v_2^2) f dv \quad (3.29)$$

$$+ \varepsilon \partial_t \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}^2} v_\perp f dv \quad (3.30)$$

Comme  $f$  est radiale par le lemme 3.3 on a les termes en  $v_1 v_2$  et en  $(v_1^2 - v_2^2)$  qui s'annulent. Reste à déterminer la limite  $\rho_{\varepsilon'} E_{\varepsilon'}$  quand  $\varepsilon' \rightarrow 0$ . Par l'inégalité sur l'énergie,  $(E_\varepsilon)$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{T}^2))$ . Le principe du maximum (3.13), l'inégalité (3.14) et le lemme d'interpolation 3.2 avec  $k = 0$  et  $m = 2$  assurent alors que

$$\|\rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{T}^2))} \leq \sqrt{2} C(2, 0) \|f^{in}\|_{L^\infty}^{1/2} \mathcal{E}(f^{in})^{1/2} \quad (3.31)$$

Comme  $E_\varepsilon = \nabla_x \Delta_x^{-1}(\rho_\varepsilon - \bar{\rho}_\varepsilon)$ ,  $(E_\varepsilon)$  est borné dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{T}^2))$ . Puis, pour toute fonction  $\psi$  dans  $C_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^2)$ , on sait grâce au lemme 3.4 et aux propriétés des injections de Sobolev que  $(\psi \rho_\varepsilon)$  est bornée dans par exemple  $C^{1/2}(\mathbb{R}_+, H^{-4}(\mathbb{T}^2))$  (ce n'est pas forcément l'espace optimal) ainsi que dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{T}^2))$  par l'inégalité précédente. Par un argument d'interpolation similaire à celui de la démonstration du lemme 3.4, on obtient que les  $(\psi \rho_\varepsilon)$  sont bornés dans  $C^{1/16}(\mathbb{R}_+, H^{-1/2}(\mathbb{T}^2))$  (l'idée étant d'augmenter l'exposant de l'espace de Sobolev afin de pouvoir l'injecter dans  $H^{-1}$ ). Puisque le support des  $(\psi \rho_\varepsilon)$  est inclus dans un support compact,  $(\psi \rho_\varepsilon)$  est relativement compacte dans  $L^\infty(\mathbb{R}_+, H^{-1}(\mathbb{T}^2))$ , donc

$$\psi \rho_\varepsilon' E_{\varepsilon'} \rightharpoonup \psi \rho E \text{ faible-étoile dans } L^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{M}(\mathbb{T}^2)) \quad (3.32)$$

où

$$\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x, v) \text{ et } E = \nabla_x \Delta_x^{-1} \rho \quad (3.33)$$

Ceci conclut la preuve du théorème 3.1. □

## 4 Interprétation physique des résultats. Discussion.

### 4.1 Le modèle centre-guide

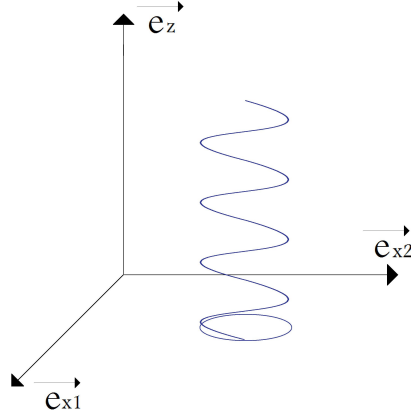


FIG. 3 – Le mouvement cyclotronique

Rappelons les notations que nous utilisons : dans l'espace à trois dimensions, de vecteurs de base  $(\mathbf{e}_{x_1}, \mathbf{e}_{x_2}, \mathbf{e}_z)$ , un vecteur  $\mathbf{A}$  se décomposera en  $(\mathbf{A}_\perp, A_{||})$  avec  $A_{||} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_z$  sa composante selon  $(Oz)$  et  $\mathbf{A}_\perp = \mathbf{A} - A_{||} \mathbf{e}_z$  sa projection sur le plan  $(x_1 O x_2)$ . L'élément générique de l'espace des phases,  $(\mathbf{r}, \mathbf{u})$  pourra être

écrit  $(\mathbf{x}, z, \mathbf{v}, v_z)$  avec  $\mathbf{x} = \mathbf{r}_\perp$  et  $z = r_\parallel$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\perp$  et  $v_z = u_\parallel$ . Enfin, le fait que deux paramètres  $a$  et  $b$  soient du même ordre de grandeur sera noté  $a \approx b$ .

Nous avons vu dans la première partie que le mouvement d'une particule soumise à un champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  avec  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$  constant et uniforme se projetait en un mouvement rectiligne simple à décrire sur l'axe  $(O\mathbf{z})$ , et en un mouvement plus complexe sur le plan  $(\mathbf{x}_1O\mathbf{x}_2)$  qui peut être vu en première approximation comme un mouvement circulaire.

C'est à lui que nous nous intéresserons. Pour simplifier le problème, on peut se contenter d'étudier la trajectoire du centre de la gyration, que l'on appelle **centre-guide**. Le théorème que nous venons de montrer légitime mathématiquement cette démarche :  $\varepsilon \rightarrow 0$  correspond à  $B \rightarrow +\infty$ , donc à une fréquence de gyration  $\omega_c \rightarrow +\infty$ , et un rayon de rotation  $\rho_c \rightarrow 0$ . Ainsi les fonctions de partition  $f_\varepsilon$  tendent vers la fonction de partition des centres-guides, que nous noterons  $f_{GC}$ . Dans le cas physique où  $\varepsilon \ll 1$ , la fonction de partition des particules  $f_\varepsilon$  est donc très proche de celle des centres-guides  $f_{GC}$ . Etudions ce que cette approximation nous apporte.

$f_{GC} = f_{GC}(t, \mathbf{r}, \mathbf{u})$  est une « vraie » fonction de partition, qui vérifie l'équation de Vlasov :

$$\partial_t f_{GC} + \mathbf{u} \cdot \nabla_r f_{GC} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_u f_{GC} = 0.$$

Par ailleurs, indépendamment de la masse et de la charge des particules étudiées, les centres-guides subissent une dérive, dite **dérive des champs croisés** ou **dérive électrique**, de vitesse

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

On peut donc écrire

$$\partial_t f_{GC} + \mathbf{v}_E \cdot \nabla_r f_{GC} + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v}_E \times B) \cdot \nabla_u f_{GC} = 0.$$

Comme  $\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$ , on a  $\mathbf{E} + \mathbf{v}_E \times \mathbf{B} = \mathbf{E} - \mathbf{E} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})\mathbf{B}}{B^2} = E_\parallel \mathbf{e}_z$ . Nous avons posé plus haut que  $\mathbf{B}$  était uniforme, *a fortiori* selon  $(O\mathbf{e}_z)$ . Une hypothèse plus générale consiste à supposer que l'échelle spatiale de variation de  $\mathbf{B}$  selon  $(O\mathbf{e}_z)$  est bien plus grande que celle selon  $(\mathbf{x}_1O\mathbf{x}_2)$ , ce qui est le cas dans les Tokamaks. Nous pouvons l'appliquer également au champ  $\mathbf{E}$ , obtenant ainsi  $E_\parallel \ll |\mathbf{E}_\perp|$  et

$$\partial_t f_{GC} + \mathbf{v}_E \cdot \nabla_x f_{GC} = 0.$$

$f_{GC}$  devient alors une densité de l'espace à deux dimensions ordinaire,  $f_{GC}(t, \mathbf{x})$ , vérifiant une simple équation de transport. En multipliant par la charge de chaque particule, on obtient les équations suivantes sur les densités de charge, couplées à celle de Poisson ; les indices  $i$  et  $e$  correspondent aux ions et aux électrons respectivement.

$$\begin{cases} \partial_t \rho_i + \nabla_x (\rho_i \mathbf{v}_E) = 0, \\ \nabla_x \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e + \rho_i}{\varepsilon_0} = -\Delta_x \phi, \\ \partial_t \rho_e + \nabla_x (\rho_e \mathbf{v}_E) = 0. \end{cases}$$

En notant  $\rho := \rho_i + \rho_e$  la densité de charge totale et  $\psi := \frac{\phi}{B}$  la fonction de courant, on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla_x \cdot \left( \rho \frac{-\nabla_x \phi \times \mathbf{B}}{B^2} \right) &= 0, \\ -\partial_t \Delta_x \psi + \nabla_x \cdot \left( \Delta_x \psi \frac{\nabla_x \psi \times \mathbf{B}}{B} \right) &= 0, \\ -\partial_t \Delta_x \psi + \partial_{x_1} (\Delta_x \psi \partial_{x_2} \psi) + \partial_{x_2} (\Delta_x \psi (-\partial_{x_1} \psi)) &= 0, \\ \partial_t \Delta_x \psi + [\psi, \Delta_x \psi] &= 0.\end{aligned}$$

Avec  $[\cdot, \cdot]$  les crochets de Poisson, il s'agit de l'équation d'un fluide incompressible à deux dimensions. Les centres-guides se comportent ainsi, dans le plan  $(\mathbf{x}_1 O \mathbf{x}_2)$ , comme un fluide incompressible. Le modèle centre-guide permet donc d'obtenir des équations fluides plus simples que les équations cinétiques originales. Il devient alors possible d'étudier les propriétés de turbulence d'un plasma centre-guide. Par exemple, le phénomène de cascade inverse, qui se traduit par l'apparition de vortex de grande taille, joue un rôle important dans le confinement et le transfert de l'énergie.

## 4.2 La gyromoyenne

Dans le paragraphe précédent, nous avons considéré que le rayon de Larmor des particules était nul. Il nous faut préciser par rapport à quel autre paramètre de longueur  $\rho_c$  doit être négligeable pour utiliser le modèle centre-guide. Pour cela, utilisons une autre approche et raisonnons avec un rayon de Larmor non nul. Plaçons-nous dans le plan  $(\mathbf{x}_1 O \mathbf{x}_2)$  dans lequel se déroule la gyration.

### 4.2.1 L'opérateur de gyromoyenne

Dorénavant,  $\psi$  désignera une fonction quelconque de  $\mathbb{R}^2$ , suffisamment régulière et intégrable pour le traitement qui va suivre. Une façon de remplacer les particules par leur centre-guide tout en gardant  $\rho_c$  non nul est de moyenner  $\psi$  sur un cercle de rayon  $\rho_c$  en chaque centre-guide. En effet, si les particules, indiscernables, qui partagent un même centre-guide sont suffisamment nombreuses, la moyenne temporelle qui observe chaque particule tourner autour du centre-guide peut être remplacée par la moyenne spatiale sur ces particules. On dit que l'on applique l'opérateur  $\mathcal{J}_0$  à  $\psi$ , l'**opérateur de gyromoyenne** :

$$\mathcal{J}_0(\psi)(\mathbf{x}_{GC}) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_c}{2\pi} \psi \left( \mathbf{x}_{GC} + \begin{pmatrix} \rho_c \cos \varphi_c \\ \rho_c \sin \varphi_c \end{pmatrix} \right), \quad (4.1)$$

où  $\varphi_c$  est la phase de rotation autour de  $\mathbf{x}_{GC}$ . On pose  $\mathbf{x}_C = \begin{pmatrix} \rho_c \cos \varphi_c \\ \rho_c \sin \varphi_c \end{pmatrix}$ . Appliquons à  $\mathcal{J}_0(\psi)$  la transformée de Fourier  $\mathcal{F}$ , et utilisons le théorème de

Fubini : soit  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{J}_0(\psi))(\mathbf{k}) &= \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{x}_{GC} \mathcal{J}_0(\psi)(\mathbf{x}_{GC}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{GC}} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_c}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{x}_{GC} \psi(\mathbf{x}_{GC} + \mathbf{x}_C) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{GC}} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_c}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{x}_{GC} \psi(\mathbf{x}_{GC}) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_{GC} - \mathbf{x}_C)} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_c}{2\pi} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_C} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{x}_{GC} \psi(\mathbf{x}_{GC}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_{GC}} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_c}{2\pi} e^{ik\rho_c \cos \varphi_c} \mathcal{F}(\psi)(\mathbf{k}) \\
&= J_0(k\rho_c) \mathcal{F}(\psi)(\mathbf{k})
\end{aligned}$$

où  $J_0$  est la fonction de Bessel. Observons son développement en série entière :

$$\begin{aligned}
J_0(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{iz \cos \varphi} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n z^n \cos^n \varphi}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \left( \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \cos^{2n} \varphi \right) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} W_{2n},
\end{aligned}$$

car la série entière a un rayon de convergence infini. On reconnaît la présence des intégrales de Wallis  $W_n$ , que l'on peut expliciter, mais seuls les premiers termes nous intéressent.

En retournant dans l'espace réel à deux dimensions, l'opérateur de gyromoyenne s'écrit donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_0(\psi) &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\mathcal{J}_0(\psi))) \\
&= \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{k} \mapsto J_0(|\mathbf{k}|\rho_c) \mathcal{F}(\psi)(\mathbf{k})) \\
&= \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{k} \mapsto \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{k}^{2n} \rho_c^{2n}}{(2n)!} W_{2n} \mathcal{F}(\psi)(\mathbf{k})) \\
&= \left( \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathbf{k}^{2n} W_{2n}}{(2n)!} \rho_c^{2n} \Delta_x^n \right) \psi.
\end{aligned}$$

C'est donc par rapport à l'échelle spatiale de variation de  $\psi$  que  $\rho_c$  doit être comparé. Notons  $L_\psi$  cette échelle. Si  $\frac{\rho_c}{L_\psi} \ll 1$ , on peut développer  $\mathcal{J}_0$  en ce petit paramètre et obtenir, au second ordre,

$$\mathcal{J}_0(\psi) = \left( 1 + \frac{\rho_c^2}{4} \Delta_x \right) \psi \tag{4.2}$$

Dans la suite, on notera  $\eta_1 := \frac{\rho_c}{L_\psi}$ . C'est le petit paramètre que nous cherchions qui quantifie la gyromoyenne.

#### 4.2.2 Application à la fonction de partition

Y a-t-il d'autres paramètres qui interviennent dans les approximations centre-guide ou gyromoyenne ? Pour le savoir, utilisons l'opérateur de gyromoyenne sur la fonction de partition. En ne considérant que le mouvement de gyration des particules, le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  d'un point en rotation autour de son centre-guide  $\mathbf{x}_{GC}$  peut être décrit par sa norme  $v$  et la phase  $\varphi$  à laquelle se situe le point.

On pose  $\mu := \frac{\frac{1}{2}mv^2}{B}$ , le **premier invariant adiabatique** des centres-guides ; l'adiabaticité étant le fait de se placer à une échelle de temps bien supérieure à celle cyclotronique. Alors les quatre paramètres  $(x_1, x_2, v_1, v_2)$  nécessaires pour décrire un point de l'espace des phases peuvent être remplacés par  $(x_{GC_1}, x_{GC_2}, \mu, \varphi)$ . La gyromoyenne consiste à faire disparaître le paramètre  $\varphi$ .

On note maintenant  $\bar{\psi} := \mathcal{J}_0(\psi)$ . La différence entre la valeur de  $f$  en un point,  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}_{GC}, \mu, \varphi)$ , et la valeur gyromoyennée au centre-guide,  $\bar{f}(\mathbf{x}_{GC}, \mu)$ , peut être développée en puissances de  $\eta_1$ . Au premier ordre, cette différence est nulle. Au second ordre, on a la relation suivante :

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}_{GC}, \mu, \varphi) = \bar{f}(\mathbf{x}_{GC}, \mu) + \frac{q}{B} \frac{\partial f_0}{\partial \mu} (\phi(\mathbf{x}) - \bar{\phi}(\mathbf{x}_{GC})), \quad (4.3)$$

où  $f_0(\mu)$  est la fonction de partition moyennée sur les positions et sur les directions des vitesses. En intégrant cette relation sur les vitesses, on obtient :

$$n(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \int \bar{f}(\mathbf{x}_{GC}, \mu) d\mathbf{v} + \int \frac{q}{B} \frac{\partial f_0}{\partial \mu} d\mathbf{v} (\phi(\mathbf{x}) - \bar{\phi}(\mathbf{x}_{GC})).$$

Rappelons que  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{GC} + \mathbf{x}_C$ , que  $\mu := \frac{\frac{1}{2}mv^2}{B}$ , et donc que  $d\mu = \frac{mv dv}{B}$ . Alors

$$n(\mathbf{x}) = \int \bar{f}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_C, \mu) d\mathbf{v} + \int \frac{q}{B} \frac{\partial f_0}{\frac{mv dv}{B}} d\mathbf{v} (\phi(\mathbf{x}) - \bar{\phi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_C)).$$

Or  $\bar{\psi}(\mathbf{x}) = \int \frac{d\varphi_c}{2\pi} \psi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_C)$ . Donc en choisissant maintenant  $\mathbf{x}$  constant et  $\mathbf{x}_{GC}$ ,  $\mathbf{x}_C$  dépendants de  $\varphi_c$ , et en intégrant sur  $\varphi_c$  :

$$\begin{aligned} n(\mathbf{x}) &= \int \frac{d\varphi_c}{2\pi} n(\mathbf{x}) \\ &= \iint \frac{d\varphi_c}{2\pi} d\mathbf{v} \bar{f}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_C, \mu) + \iint \frac{q}{m} \frac{\partial f_0}{v \partial v} v dv d\varphi_c (\phi(\mathbf{x}) - \bar{\phi}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_C)) \\ &= \int \bar{\bar{f}}(\mathbf{x}, \mu) d\mathbf{v} + \frac{q}{m} \int_{v=0}^{\infty} \frac{\partial f_0}{\partial v} d\mathbf{v} (\phi(\mathbf{x}) - \bar{\bar{\phi}}(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

On a montré qu'au second ordre en  $\eta_1$ ,  $\bar{\psi} = \left(1 + \frac{\rho_c^2}{4} \Delta_x\right) \psi$ . Donc

$$\bar{\bar{\psi}} = \left(1 + \frac{\rho_c^2}{4} \Delta_x\right)^2 \psi = \left(1 + \frac{\rho_c^2}{2} \Delta_x\right) \psi \quad (4.4)$$

et ainsi

$$n(\mathbf{x}) = \bar{\bar{n}}(\mathbf{x}) + \frac{q}{m} (-f_0(0)) \left(-\frac{\rho_c^2}{2} \Delta_x \phi(\mathbf{x})\right).$$

Si l'on considère les ions immobiles par rapport aux électrons et créant une densité de charge uniforme  $n_0e$ , la relation de Poisson s'écrit

$$-\varepsilon_0 \Delta_x \phi(\mathbf{x}) = n_e(\mathbf{x})(-e) + n_0e.$$

En injectant dans l'expression précédente, on obtient

$$+\varepsilon_0 \Delta_x \phi(\mathbf{x}) = \overline{n_e}(\mathbf{x}) - \frac{e^2 \rho_{ce}^2}{2m_e} f_0(0) \Delta_x \phi(\mathbf{x}) - n_0e,$$

et finalement

$$\left( \varepsilon_0 + \frac{e^2 \rho_{ce}^2}{2m_e} f_0(0) \right) \Delta_x \phi = e(\overline{n_e} - n_0). \quad (4.5)$$

Si maintenant l'on considère que les électrons se déplacent suffisamment vite pour créer autour des ions une densité de charge uniforme  $-n_0e$ , on obtient

$$\left( \varepsilon_0 + \frac{e^2 \rho_{ci}^2}{2m_i} f_0(0) \right) \Delta_x \phi = -e(\overline{n_i} - n_0). \quad (4.6)$$

### 4.3 Ordres de grandeur

#### 4.3.1 Paramètres pertinents, retour sur le théorème 3.1

Les relations (4.5) et (4.6) sont des équations de Poisson modifiées. Pour que le modèle de gyromoyenne soit cohérent, il faut que l'erreur entre elles et les équations de Poisson exactes soit négligeable. Si nous ne nous sommes pas contentés de l'expression  $\overline{n} = \left( 1 + \frac{\rho_c^2}{2} \Delta_x \right) n$ , c'est qu'avec notre développement (4.3) un rapport autre que  $\eta_1$  apparaît : pour les deux espèces, il s'agit de

$$\eta_2 := \frac{e^2 \rho_c^2 f_0(0)}{2m\varepsilon_0}.$$

Nous pouvons nous interroger sur l'interprétation physique de  $\eta_1$  et  $\eta_2$ . Pour cela, il nous faut préciser l'ordre de grandeur de  $f_0(0)$ . En moyenne, à l'équilibre thermique à la température  $T$ , la distribution en fonction des vitesses est une maxwellienne :  $f_0(v) \propto e^{-\frac{1}{2}mv^2/k_B T}$ . On définit  $v_T := \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$  la **vitesse thermique**. La vitesse  $v_T$  est très proche de la vitesse la plus probable, c'est-à-dire que dans les rapports de grandeur,  $v \approx v_T$ . En normalisant avec une densité moyenne  $n_0$ , on obtient  $f_0(v) = \frac{n_0}{\pi v_T^2} e^{-v^2/v_T^2}$ .

Rappelons les expressions des grandeurs suivantes :

- la pulsation cyclotronique,  $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$ ,
- le rayon de Larmor,  $\rho_c = \frac{v}{\omega_c} = \frac{mv_T}{|q|B}$ ,
- la pulsation plasma,  $\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}}$ ,
- la longueur de Debye,  $\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{n_0 e^2}}$ ,
- la longueur typique de variation de  $\phi$ ,  $L_\phi$ .



On a alors  $\omega_p^2 \lambda_D^2 = \frac{v_T^2}{2}$ ,  $\eta_1 = \frac{\rho_c}{L_\phi}$ , et  $\eta_2 = \frac{e^2 \rho_c^2 f_0(0)}{2m\varepsilon_0} = \frac{e^2 \rho_c^2 n_0}{2m\varepsilon_0 \pi v_T^2} = \frac{\rho_c^2}{4\pi \lambda_D^2} \approx \frac{\rho_c^2}{\lambda_D^2}$ . La pertinence des modèles centre-guide et gyromoyenne dépend donc des trois longueurs caractéristiques,  $\rho_c$ ,  $L_\phi$ , et  $\lambda_D$ .

Revenons au théorème 3.1 : il peut être perçu comme la justification de l'un ou l'autre de ces modèles. Dans son énoncé, le *scaling* utilisé est

$$\varepsilon = \frac{T_c}{T_p} = \frac{T_p}{T_0} \rightarrow 0,$$

avec  $T_c = \omega_c^{-1}$ ,  $T_p = \omega_p^{-1}$ , et  $T_0$  le temps d'observation du mouvement, décrit comme suffisant pour voir le centre-guide dériver. On peut par exemple choisir  $T_0$  comme le temps nécessaire pour parcourir une distance de quelques  $\rho_c$ , à la vitesse de dériver  $\mathbf{v}_E$  :  $\rho_c \leq T_0 v_E$ .

Reste à déterminer l'échelle de  $v_E$ . On introduit  $R$ , l'échelle de la taille totale du système, et  $P(\mathbf{r})$  la pression du gaz qui y réside. En imaginant le gaz à l'équilibre hydrostatique, on aurait  $ne|\mathbf{E}| = |\nabla_r P|$ . Il se trouve que la réalité n'est pas très éloignée :  $E \approx \frac{\nabla_r P}{ne} \approx \frac{\nabla_r k_B T}{e}$ , et ainsi

$$v_E = \frac{E}{B} \approx \frac{\nabla_r k_B T}{eB} = \frac{\nabla_r k_B T}{k_B T} \times \frac{k_B T}{eB}. \quad (4.7)$$

Or les gradients de température, et ceux du potentiel  $\phi$  avec le même argument que précédemment, sont du même ordre que la taille du système :  $L_T \approx L_\phi \approx R$ , soit  $v_E \approx \frac{1}{R} \times \frac{k_B T}{eB} \approx \frac{1}{R} \rho_c v_T$ .

Ainsi  $T_0 \approx \frac{\rho_c}{v_E} \approx \frac{R}{v_T}$ . Finalement,

$$\frac{T_p}{T_0} \approx \frac{v_T}{\omega_p R} \approx \frac{\lambda_D}{L_\phi}, \quad \text{et} \quad \frac{T_c}{T_p} = \frac{\omega_p}{\omega_c} \approx \frac{\rho_c}{\lambda_D}. \quad (4.8)$$

Donc avec le *scaling* du théorème 3.1, on a  $\eta_1 = \varepsilon^2 = \eta_2$ . Ce théorème traite du cas où  $\eta_1$  et  $\eta_2$  sont très petits, c'est un modèle centre-guide et gyromoyenne.

### 4.3.2 Exemples de plasmas réels

Lorsque nous sommes arrivés à Cadarache, nous avons cherché à appliquer ce théorème au plasma qui existe aujourd'hui dans le Tokamak Tore Supra, ou encore à celui qui est prévu dans le projet ITER : des plasmas à confinement magnétique. Ces plasmas ont été conçus dans l'objectif de réaliser une réaction de fusion dégageant au moins autant d'énergie que celle nécessaire pour l'alimenter. Ce seuil est appelé **break-even**. En notant  $\tau$  le temps de confinement de l'énergie dans le plasma, c'est-à-dire le temps caractéristique de fuite de l'énergie sans apport extérieur, Lawson a montré en 1956 que le break-even est atteint lorsque le triple produit  $n_0 T \tau$  dépasse une valeur critique.

Dans le cas d'un réacteur à confinement magnétique, la pression qu'exerce le plasma sur les lignes du champ  $\mathbf{B}$  qui le contiennent varie comme  $n_0 T$ , tandis que la pression maximale que le champ peut confiner varie comme  $B^2$ . Une fois

fixée la température à 100 MK (10 keV en équivalent énergie), température qui rend optimale la réaction de fusion recherchée, et le champ  $B$  étant limité par la technique actuelle à l'ordre du Tesla, la densité de particules se trouve donc fixée à  $n_0 \approx 10^{20} \text{ m}^{-3}$ . L'étude des instabilités dans le plasma a entre autres pour objectif d'accroître  $\tau$  jusqu'à quelques secondes, pour dépasser le critère de Lawson.

Dans le Tokamak (l'enceinte toroïdale) d'ITER, on aura les valeurs suivantes :

$$T \approx 100 \text{ MK}, \quad n_0 \approx 10^{20} \text{ m}^{-3}, \quad B = 5 \text{ T}, \quad R = L_\phi \approx 5 \text{ m}.$$

Alors  $\frac{T_c}{T_p} = 1$ , et  $\frac{T_p}{T_0} = 10^{-4}$ . En termes de longueurs, on a donc  $\rho_c \approx \lambda_D \ll R$ , soit  $\eta_1 \ll 1$  et  $\eta_2 \approx 1$ . On peut appliquer le modèle centre-guide, mais ni le théorème 3.1, ni la gyromoyenne.

Nous avons alors cherché, parmi quelques plasmas, un qui satisfasse aux conditions d'applications du théorème 3.1. Comme le rapport  $\frac{T_p}{T_0} \approx \frac{\lambda_D}{R}$ , dépendant de la taille du système que nous choisissons d'étudier, est arbitraire, nous nous sommes contentés de calculer l'autre rapport,  $\frac{T_c}{T_p} \approx \frac{\rho_c}{\lambda_D} = \sqrt{\frac{n_0 m_e}{\varepsilon_0 B^2}}$  si on l'applique aux électrons. Seuls les ordres de grandeur sont rapportés ci-dessous.

Plasma	$B(\text{Tesla})$	$n_0(\text{m}^{-3})$	$\varepsilon \approx \sqrt{\frac{n_0 m_e}{\varepsilon_0 B^2}}$
Aurore boréale (ionosphère)	$10^{-8}$	$10^{20}$	$10^{8,5}$
Coeur du Soleil	$10^1$	$10^{32}$	$10^{6,5}$
Plasma interstellaire	$10^{-10}$	$10^4$	$10^{2,5}$
Magnétar (sorte d'étoile à neutrons)	$10^{11}$	$10^{45}$	$10^2$

Aucun de ces plasmas ne convient.

Nous avons imaginé un plasma de fusion réalisable qui remplisse les conditions du théorème, par exemple vérifiant  $\varepsilon \approx 10^{-4}$ .  $B$  doit être de l'ordre du Tesla, donc nécessairement  $n_0 \approx 10^{33} \text{ m}^{-3}$ , ce qui est bien plus que le confinement magnétique ne peut supporter. Supposons tout de même que nous utilisons un autre mode de confinement. Si l'on veut une réaction de fusion optimale, il faut prendre  $T \approx 10^8 \text{ K}$ . Alors, nécessairement,  $R \approx 10^{-5,5} \text{ m}$ . La taille du système ne doit donc guère dépasser le micromètre. Dans le projet laser MégaJoule, un plasma de fusion à confinement par explosion, la densité des particules est de l'ordre de  $10^{28} \text{ m}^{-3}$ , et la taille du système de l'ordre de  $10^{-4} \text{ m}$ . Ce plasma se rapproche plus que celui d'ITER des hypothèses du théorème 3.1.

#### 4.4 Quelques précisions

L'outil avec lequel nous étions arrivés au CEA n'était pas adapté, les caractéristiques du plasma n'étaient pas les mêmes. L'approche utilisée dans toute la physique des Tokamaks est la suivante : comme auparavant, on ne considère ni  $\mathbf{E}$  ni  $\mathbf{B}$  uniformes, mais d'échelles de variations différentes selon ( $Oe_z$ ) et

( $\mathbf{x}_1 O \mathbf{x}_2$ ). Les rapports entre les autres paramètres s'alignent sur celui entre les échelles de longueur :

$$\frac{\lambda_D}{L_\phi} \approx \frac{\rho_c}{L_\phi} \approx \frac{e\phi}{k_B T} \approx \frac{L_{\nabla_r B_\perp}}{L_{\nabla_r B_\parallel}} \approx \frac{\omega}{\omega_{ci}} \approx \eta \leq 10^{-3}. \quad (4.9)$$

Ce *scaling* est appelé **ordering gyrocinétique**, où  $\omega$  est la fréquence propre des turbulences de plasma vu comme un fluide et  $\eta$  un petit paramètre sans dimension. C'est à partir de cet *ordering* qu'est construite l'équation de Vlasov gyrocinétique. Au premier ordre en  $\eta$ , la solution en est le modèle centre-guide,

avec la vitesse de dérive électrique  $\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$ .

Au second ordre en  $\eta$ , des dérives supplémentaires apparaissent :

- celle dite de **polarisation électrique**,  $\mathbf{v}_P = \frac{1}{B\omega_c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ , qui est en  $\eta_1^2 \approx \frac{\rho_c^2}{L_\phi^2}$ ;

- celle dite de **gradient**,  $\mathbf{v}_{DG} = \frac{v^2}{2\omega_c} \frac{\mathbf{B} \times \nabla_r B}{B^2}$ ;

- celle dite de **courbure**,  $\mathbf{v}_{DC} = \frac{v_z^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{B} \times \nabla_r B}{B^2}$ .

Cette équation a l'avantage de préserver le caractère hamiltonien du système de Vlasov-Poisson, que le champ magnétique  $\mathbf{B}$  soit uniforme ou non. On pourrait, en l'intégrant sur les vitesses et en utilisant des relations de fermeture ad hoc, obtenir des équations fluides (dites **gyro-fluides**) comme pour les modèles précédents. Mais on perdrait alors de l'information sur un phénomène de résonance, qui a lieu en  $\omega = L_{\nabla_r B_\parallel} v_z$ , et qui n'est présent que dans le modèle cinétique. L'enjeu est encore d'étudier l'équation gyrocinétique elle-même.

## Références

- [1] J.-M. Rax : *Physique des plasmas*, Dunod, Paris, 2005
- [2] P. Bertrand : *Description cinétique de la turbulence dans un plasma de Tokamak*, [http : //www.math.u – bordeaux.fr/ecaq2004/Bertrand.pdf](http://www.math.u-bordeaux.fr/ecaq2004/Bertrand.pdf), Université Henri Poincaré, Nancy-1
- [3] A. Arsenev : *Existence in the large of a weak solution of Vlasov's system of equation*, *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.* **15** (1975), 136-147
- [4] F. Golse, L. Saint-Raymond : *The Vlasov-Poisson system with strong magnetic field*, *J. Math. Pures Appl.* **78** (1999), 791-817
- [5] L. Saint-Raymond : *Control of large velocities in the two-dimensional gyrokinetic approximation*, *J. Math. Pures Appl.* **81** (2002), 379-399
- [6] Y. Sarazin : *Interactions multi-échelles en turbulence des plasmas de fusion*, HDR, Université de Provence (Aix-Marseille I), 2008