FLUCTUATIONS DES CONDENSATS DE BOSE-EINSTEIN

Elie CASBI, Kaitong HU

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier le phénomène de condensation de Bose-Einstein en s'appuyant sur un récent article de Sourav CHATTERJEE et Persi DIACONIS : pour un système de particules indiscernables possédant un spectre discret d'énergie, il existe une température en-deçà de laquelle une proportion macroscopique de particules se regroupe dans l'état fondamental, c'est-à-dire l'état de plus basse énergie. Si ce processus est maintenant bien connu des physiciens, les auteurs adoptent ici un point de vue probabiliste : leur démarche est fondée sur l'étude de la convergence de certaines variables aléatoires décrivant le système et en particulier la manière dont les particules se répartissent parmi les différents niveaux d'énergie possibles.

1 Introduction

On considère un système constitué de n particules indiscernables n'interagissant pas entre elles. Les valeurs que peut prendre l'énergie d'une particule donnée forment un ensemble discret $(E_0, E_1, E_2, \cdots)$ (qui est donc le même pour toutes les particules du système) où les E_j sont rangés par ordre croissant ; on notera n_j le nombre de particules ayant une énergie E_j, l'énergie totale du système étant alors $\sum_{j=0}^{\infty} n_j E_j$. E_0 est l'état fondamental, c'est-à-dire l'état de plus basse énergie ; la première hypothèse essentielle est que E_0 est strictement inférieur à toutes les autres valeurs possibles de l'énergie, alors que deux niveaux d'énergie E_j et E_k pour j et k non nuls peuvent a priori coïncider. Autrement dit, l'état fondamental est unique. La répartition des n particules parmi la collection dénombrable d'états d'énergie est étroitement liée à la température du système : pour des particules bosoniques (de spin entier), les travaux de Bose et Einstein ont montré qu'il existe une température critique, que l'on notera T_c, en deçà de laquelle une proportion macroscopique de particules se regroupent dans l'état fondamental, phénomène connu des physiciens sous le nom de condensation de Bose-Einstein.

Sourav CHATTERJEE et Persi DIACONIS proposent de regarder chaque n_j comme une variable aléatoire à valeurs dans $0, 1, \cdots, n$, et interprètent ce phénomène par la convergence en probabilité de la variable aléatoire $\frac{n_0}{n}$ vers une quantité de l'ordre de 1, et dépendant uniquement de la température. Plusieurs hypothèses sont néanmoins nécessaires pour pouvoir faire cette analogie : tout d'abord on suppose que la probabilité pour que $n - uplet$ de variables aléatoires $(N_0, N_1, \cdots)$ prenne la valeur $(n_0, n_1, \cdots)$ est proportionnelle au facteur de Boltzmann

$$\exp(-\tfrac{1}{k_B T} \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} n_j E_j)$$

où T est la température du système pris à l'équilibre thermodynamique, et k_B est la constante de Boltzmann. On notera $\beta = \frac{1}{k_B T}$. On suppose également disposer d'information sur la répartition des niveaux de grandes énergies :

Hypothèse 1. *Il existe $L > 0$ et $\alpha \geq 1$ telles que* $\frac{\#\{j : E_j \leq \lambda\}}{L\lambda^\alpha} \overset{\lambda \to \infty}{\longrightarrow} 1$.

Cette hypothèse qui peut sembler restrictive est vérifiée dans les principaux systèmes physiques où se produisent des phénomènes de condensation de Bose-Einstein, comme par exemple le piège harmonique à trois dimensions. Enfin, on suppose que la température est reliée au nombre de particules du système par la relation

$$T = \begin{cases} tn^{\frac{1}{\alpha}} & \text{si } \alpha > 1 \\ \frac{tn}{\log n} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

où t est un paramètre strictement positif. On définit alors la température critique du système, notée T_c comme étant la valeur de T lorsque le paramètre t vaut

$$t_c = \begin{cases} \frac{1}{k_B (L\alpha\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}} & \text{si } \alpha > 1 \\ \frac{1}{k_B L} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Le premier résultat fondamental de l'article est le suivant :

Théorème 1. *pour $t < t_c$, la variable aléatoire $\frac{N_0}{n}$ converge en probabilité vers $1 - (\frac{t}{t_c})^\alpha$ lorsque $n \to \infty$.*

On a un résultat analogue en ce qui concerne l'énergie totale du système : cette variable aléatoire est définie comme $E_{tot} = \sum_{j=0}^{\infty} N_j E_j$, et on a

Théorème 2. *$\alpha < 1$, alors $\frac{E_{tot}}{T^{1+\alpha}}$ converge en probabilité vers $k_B^{1+\alpha} L\alpha\Gamma(\alpha + 1)\zeta(\alpha + 1)$ lorsque $n \to \infty$, et si $\alpha = 1$, alors $\frac{E_tot}{T^2} \to \frac{k_B^2 L\pi^2}{6}$ en probabilité lorsque $n \to \infty$.*

Chatterjee et Diaconis s'intéressent ensuite à l'écart à la moyenne du nombre de particules dans l'état fondamental lorsque le nombre total de particules dans le système devient arbitrairement grand. Plus précisément, il s'agit d'établir un résultat du type "Théorème Central Limite" pour N_0 en regardant la convergence en loi de $N_0 - \mathbb{E}(N_0)$ (pondérée par une puissance de n). Ce théorème vise à décrire les fluctuations de taille du condensat de Bose-Einstein et montre des comportements de l'écart à la moyenne de N_0 radicalement différents en fonction des paramètres du système, et notamment de la valeur de α.

Théorème 3. *Supposons que $t < t_c$. ALORS :*
Si $\alpha = 1$, la série W converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}_2$, lorsque $n \to \infty$, $\frac{N_0 - \mathbb{E}(N_0)}{\frac{n}{\log(n)}} \xrightarrow{L} \frac{t}{t_c} W$
Si $1 < \alpha < 2$, la série W converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}_2$, lorsque $n \to \infty$, $\frac{N_0 - \mathbb{E}(N_0)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \xrightarrow{L} \frac{t}{t_c} W$
Si $\alpha = 2$, la série W converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}_2$, lorsque $n \to \infty$, $\frac{N_0 - \mathbb{E}(N_0)}{\sqrt{n \log(n)}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \frac{3t^2}{\pi^2 t_c^2})$
Si $\alpha > 2$, la série W converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}_2$, lorsque $n \to \infty$, $\frac{N_0 - \mathbb{E}(N_0)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, (\frac{t}{t_c})^\alpha \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)})$

Le dernier résultat que nous exposerons ne figure pas dans l'article ; il s'agit d'un théorème analogue au théorème 3 ci-dessus mais en ce qui concerne les fluctuations de l'énergie totale du système. La principale différence entre les résultats de ces deux théorèmes de fluctuations est que la valeur $\alpha = 2$ est critique pour ce qui est des fluctuations de N_0 (théorème 3) mais ne joue aucun rôle pour celles de l'énergie totale du système (théorème 4).

Théorème 4. *Supposons que $t < t_c$:*
Pour tout $\alpha > 1$,

$$\frac{E_{tot} - \mathbb{E}[E_{tot}]}{n^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}}} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0, \alpha L \Gamma(\alpha + 2)\zeta(\alpha + 1)(k_B t)^{\alpha+2}) \text{ en loi.}$$

Pour $\alpha = 1$,

$$\frac{E_{tot} - \mathbb{E}[E_{tot}]}{\frac{n}{log}^{3/2}} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0, \alpha L \Gamma(3)\zeta(2)(k_B t)^3) \text{ en loi.}$$

Dans un premier temps, nous présenterons de manière plus détaillée le résultat fondamental de l'article, qui constitue l'interprétation probabiliste de l'apparition des condensats de Bose-Einstein, à savoir la convergence de la proportion de particules dans l'état fondamental vers une constante de l'ordre de 1. Ensuite, nous donnerons un aperçu général des fondements physiques du problème étudié ; il s'agira alors d'expliciter l'origine des différentes grandeurs et variables introduites ainsi que de chercher à comprendre les rôles des différents paramètres présentés ci-dessus dont dépend l'évolution du système. Enfin, après avoir mentionné le théorème de l'article relatif aux variations de N_0 par rapport à sa valeur moyenne, nous exposerons un théorème analogue ne figurant pas dans l'article, portant sur les fluctuations de l'énergie totale du condensat de Bose-Einstein.

2 Convergences

On rappelle l'hypothèse fondamentale faite par Chatterjee et Diaconis.

Hypothèse 1. *On suppose qu'il existe des constantes $L > 0$ et $\alpha \geq 1$ telles que* $\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\# j : E_j \leq \lambda}{L\lambda^\alpha} = 1$

On va démontrer dans la suite que les constantes L et α sont suffisantes pour determiner à la fois la taille de la condensation et les fluctuations dans la limite lorsque $n \to \infty$. Notons que la taille de condensation est indépendante du spectre d'énergie.

On rappelle également l'expression de la température critique :

$$t_c = \begin{cases} \frac{1}{k_B(L\alpha\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}} & \text{si } \alpha > 1 \\ \frac{1}{k_B L} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Fixons $t > 0$. Soit $(N_0, N_1, \cdots)$ une configuration aléatoire dans un système de n bosons à la température

$$T = \begin{cases} tn^{\frac{1}{\alpha}} & \text{si } \alpha > 1 \\ \frac{tn}{\log n} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \tag{2}$$

Le nombre T_c est défini comme la valeur de T lorsque $t = t_c$.

Théorème 1. *Supposons que $t < t_c$. Alors $\frac{N_0}{n}$ converge vers $1 - (\frac{t}{t_c})^\alpha$ en probabilité lorsque $n \to \infty$*

Avant de démontrer le premier théorème, on montre que l'on peut se ramener au cas où $E_0 = 0$. En effet, si on retranche une valeur à chaque E_n, $\mathbb{P}(\mathbf{n})$ ne change pas. En effet : si on pose $H(\bar{n} = \sum_{j\geq 0} n_j(E_j - c)$, par hypothèse, la probabilité d'observer la configuration $\mathbf{n}$ est

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}(\mathbf{n}) &= \frac{\exp(-\beta H(\mathbf{n}))}{\tilde{Z}_n} \\ &= \frac{\exp(\beta c \sum_{j\geq 0}(n_j))}{\tilde{Z}_n} \exp(-\beta H(\mathbf{n})) \end{aligned}$$

Nécessairement : $\frac{\exp(\beta c \sum_{j\geq 0}(n_j))}{\tilde{Z}_n} = \frac{1}{Z_n}$ par l'unicité de facteur de normalisation. Donc $\mathbb{P}(\mathbf{n}) = \tilde{\mathbb{P}}(\mathbf{n})$.

Démonstration. Fixons β, soient $Z_1, Z_2, \cdots$ des variables aléatoires indépendantes telles que :

$$\mathbb{P}(Z_j = k) = e^{-\beta E_j k}(1 - e^{-\beta E_j}), k = 0, 1, 2, \cdots$$

Autrement dit, des Z_j sont de loi géométrique de paramètre $1-\exp(-\beta E_j)$.

Ensuite on pose $Z_0 = n - \sum_{j=1}^{\infty} Z_j = n - M$. Ici, Z_0 est défini presque partout car si on note $S(\lambda) := \#\{j : E_j \leq \lambda\}$, par hypothèse, il existe C constante positive telle que pour tout $\lambda > 0, S(\lambda) \leq C\lambda^{\alpha}$. Comme $S(E_j) \geq j$ pour tout j et $E_j > 0$, il s'ensuit qu'il existe une constante positive K telle que $E_j \geq K j^{\frac{1}{\alpha}}$ pour tout j. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 0} \mathbb{P}(Z_j > 0) &= \sum_{j\geq 0} exp(-\beta E_j)\\ &\leq \sum_{j\geq 0} exp(-\beta K j^{\frac{1}{\alpha}})\\ &< \infty\end{aligned}$$

(ici $\alpha \geq 1$). Par le théorème de Borel-Cantelli, $M := \sum_{j=1}^{\infty} Z_j$ est défini presque partout. On peut ainsi définir $Z_0 = n - \sum_{j=1}^{\infty} Z_j = n - M$. Notons que Z_0 peut être négatif.

Nous allons montrer d'abord que pour tout $n \geq 1$ et $\beta > 0$, l'ensemble canonique pour n particules à la température inverse β a même loi que $(Z_0, Z_1, Z_2, \cdots)$ conditionnellement à l'événement $M \leq n$.

Pour une suite d'entiers non nuls $n_0, n_1, \cdots$ dont la somme est égale à n,

$$\mathbb{P}(N_0 = n_0, N_1 = n_1, \cdots) = \frac{\exp(-\beta \sum_{j=1}^{\infty} n_j E_j)}{Z_n(\beta)}$$

où $Z_n(\beta)$ est la constante de normalisation. On observe que :

$$\begin{aligned}Z_n(\beta)\prod_{j=1}^{\infty}(1-\exp(-\beta E_j)) &= (\sum_{n_0+n_1+\cdots=n} \exp(-\beta\sum_{j=1}^{\infty} n_j E_j))\prod_{j=1}^{\infty}(1-\exp(-\beta E_j))\\ &= (\sum_{n_0+n_1+\cdots\leq n} \exp(-\beta\sum_{j=1}^{\infty} n_j E_j))\prod_{j=1}^{\infty}(1-\exp(-\beta E_j))\\ &= \mathbb{P}(M \leq n)\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\mathbb{P}(Z_1 = n_1, Z_2 = n_2, \cdots) = \exp(-\beta \sum_{j=1}^{\infty} n_j E_j) \prod_{j=1}^{\infty}(1-\exp(-\beta E_j)).$$

D'où le résultat.

On a besoin maintenant des deux lemmes suivants pour finir la preuve :

Lemme 1. *Supposons que $\alpha > 1$, alors $\beta^{\alpha} M$ converge en probabilité vers $L\alpha\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)$ lorsque $\beta \to 0$.*

Lemme 2. *Supposons que $\alpha = 1$, alors $-\frac{\beta M}{\log(\beta)}$ converge en probabilité vers L lorsque $\beta \to 0$.*

On peut démontrer ces deux lemmes en montrant la convergence dans L_2, il suffit de montrer que $\beta^\alpha \mathbb{E}(M) \to L\alpha\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha)$(respectivement $-\frac{\beta M}{\log(\beta)} \to L$) et $Var(\beta^\alpha M) \to 0$(respectivement $Var(-\frac{\beta M}{\log(\beta)}) \to 0$) lorsque $\beta \to 0$.

Revenons à la preuve du théorème, supposons que $\alpha > 1$. Par le Lemme 1 :

$$\begin{aligned}\frac{Z_0}{n} &= 1 - \frac{M}{n} \\ &= 1 - (k_B t\beta)^\alpha M \\ &\to 1 - (k_B t)^\alpha L\alpha\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha) \\ &= 1 - (\frac{t}{t_c})^\alpha\end{aligned}$$

Comme la loi de N_0 est la même que celle de Z_0 conditionnellement à l'événement $M \leq n$ et comme $\frac{M}{n} \to (\frac{t}{t_c})^\alpha$, on a $\mathbb{P}(M \leq n) \to 1$, ce qui implique $N_0 = \mathbb{E}[Z_0 | M \leq n]$ lorsque n tend vers ∞. Idem pour $\alpha = 1$.

□

Théorème 2. *Soit $E_{tot} := \sum_{j=0}^{\infty} N_j E_j$ l'énergie totale du système à la température T, où $T = tn^{\frac{1}{\alpha}}$ si $\alpha > 1$ et $T = \frac{tn}{\log(n)}$ si $\alpha = 1$. Ici $t < t_c$. On a :*

$$\frac{E_{tot}}{T^{1+\alpha}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \begin{cases} k_B^{1+\alpha} L\alpha\Gamma(1+\alpha)\zeta(1+\alpha) & si\ \alpha > 1 \\ \frac{k_B^2 L\pi^2}{6} & si\ \alpha = 1 \end{cases}$$

Démonstration. Fixons n. Posons $R := \sum_{j=1}^{\infty} E_j Z_j$. Comme dans la preuve du théorème 1, on montre de même que la loi de E_{tot} est la même que celle de R conditionnellement à l'événement $M \leq n$. Comme on l'a montré dans le théorème 1, la probabilité de l'événement $M \leq n$ converge vers 1 lorsque n tend vers l'infini dans le cas où $t < t_c$.

Pour finir la preuve, il suffit de calculer et montrer que $\mathbb{E}[\beta^{1+\alpha} R]$ converge vers $L\alpha\Gamma(1+\alpha)\zeta(1+\alpha)$ et $Var(\beta^{1+\alpha} R)$ tend vers 0 lorsque $\beta \to 0$. Donc $\beta^{1+\alpha} R$ converge vers $L\alpha\Gamma(1+\alpha)\zeta(1+\alpha)$ dans $\mathbb{L}_2$ donc en probabilité. CQFD.

□

3 Liens physiques

3.1 Statistique de Bose-Einstein

Pour mettre en evidence par le calcul l'apparition du phénomène de condensation de Bose-Einstein, les physiciens travaillent dans le cadre de l'ensemble grand-canonique : contrairement au système considéré par les auteurs de l'article, qui relève de l'ensemble canonique, c'est-à-dire que le nombre de particules est fixé, l'approche grand-canonique consiste à autoriser le nombre de particules à varier, chaque variable N_k pouvant donc prendre des valeurs entières arbitrairement élevées. Le paramètre décrivant l'état du système est le potentiel chimique μ, qui n'intervient pas dans le formalisme de l'ensemble canonique.

En grand-canonique, le facteur de Boltzmann défini en introduction se réécrit : $\exp(-\frac{1}{k_B T}\sum_j n_j(E_j-\mu))$. Cela ne revient pas à remplacer E_0 par μ : μ est un paramètre que l'on peut faire varier, alors que E_0 est une donnée fixée intrinsèque du système.

Le fait que le nombre total n de particules ne soit pas fixé permet d'exprimer de manière exacte la loi de chaque variable N_k, représentant le nombre de particules ayant pour énergie E_k :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_k=n_k) &= \sum_{n_0,\cdots,n_{k-1},n_{k+1},\cdots} \mathbb{P}(N_0=n_0,\cdots,N_{k-1}=n_{k-1},N_{k+1}=n_{k+1},\cdots)\\ &= \frac{e^{-\beta n_k(E_k-\mu)}}{Z}\prod_{j\neq k}\sum_{n_j} e^{-\beta n_j(E_j-\mu}\end{aligned}$$

où Z est la fonction de partition grand-canonique, i.e. la constante de renormalisation, soit :

$$Z=\prod_j\sum_{n_j} e^{-\beta n_j(E_j-\mu)}.$$

Finalement

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_k=n_k) &= \frac{e^{-\beta n_k(E_k-\mu)}}{\sum_p e^{-\beta p(E_k-\mu)}}\\ &= e^{-\beta n_k(E_k-\mu)}(1-e^{-\beta(E_k-\mu)})\end{aligned}$$

Ainsi, il apparait que les variables géométriques Z_j introduites par les auteurs de l'article correspondent en fait aux N_k de l'ensemble grand-canonique, mais sans le potentiel chimique μ. Le lien entre N_k de l'ensemble canonique(n fixé) et les Z_j correspondant de l'ensemble grand-canonique est fait via le conditionnement par l'événement $M \leq n$.

Le calcul de la valeur moyenne du nombre de particules dans un état d'énergie donnée donne :

$$\mathbb{E}[N_k]=\frac{e^{-\beta(E_k-\mu}}{1-e^{-\beta(E_k-\mu)}}$$

En physique, il est donc coutume d'introduire la fugacité $z=e^{\beta\mu}$ et de réécrire l'expression ci-dessus sous la forme :

$$\mathbb{E}[N_k] = \frac{1}{\frac{e^{\beta E_k}}{z} - 1}$$

plus connue sous le nom de *statistique de Bose-Einstein.*

On peut à présent exprimer la valeur moyenne du nombre total de particule, puisque, rappelons-le, dans l'ensemble grand-canonique cette quantité n'est pas fixée et joue donc le rôle d'une variable aléatoire au même titre que les N_k :

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}(N_j)$$

Comme on cherche à étudier de manière particulière le comportement de N_0, on réécrit ceci

$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(N_0) + \mathbb{E}(N_e) \tag{3}$$

où

$$N_e := \sum_{j=1}^{\infty} N_j$$

désigne le nombre de particules dans les états excités c'est-à-dire les états d'énergie strictement positive (différents de l'état fondamental).

Dans cette équation, toutes les grandeurs sont des fonctions de z et μ, donc de T et μ. Or, dans l'article de Chatterjee et Diaconis, l'une des toutes premières hypothèses consiste à supposer connue une relation explicite entre la température T et le nombre total de particules n. On hérite donc d'une expression de $\mathbb{E}(N)$ en fonction de n et μ.

3.2 Phénomène de condensation

L'idée fondamentale à l'origine du phénomène de condensation est que $\mathbb{E}[N_0]$ et $\mathbb{E}[N_e]$ présentent des comportements très différents lorsque μ tend par valeurs strictement inférieures vers E_0. En effet $\mathbb{E}[N_e]$ est, à T fixé, une fonction lisse de μ, définie en $\mu = 0$; on peut montrer qu'elle est croissante et elle atteint donc son maximum N_m en $\mu = 0$. $\mathbb{E}[N_e]$ est donc une fonction de T et de μ, et N_m est une fonction de T uniquement, et on peut montrer qu'elle est croissante en T. En revanche, la statistique de Bose-Einstein montre que $\mathbb{E}[N_0]$ explose quand μ se rapproche de E_0.

Les physiciens définissent la température critique T_c comme étant la valeur de T pour laquelle on a $\mathbb{E}[N_e] = n$ lorsque $\mu = 0$,c'est-à-dire la solution de l'équation $N_m(T) = n$ (une telle solution existe toujours). Si $T < T_c$ alors $N_m(T) < n$ donc l'équation (1) impose à $\mathbb{E}[N_0]$ de prendre des valeurs de l'ordre de n. En revanche dans le cas où $T > T_c$, $N_m(T) > n$ et l'équation d'inconnue μ : $\mathbb{E}[N_e(T, \mu)] = n$ admet une solution $\mu < 0$. Or, à T fixé, $\mathbb{E}[N_e(T, \mu)]$ est une fonction croissante de μ, et comme l'équation (3) interdit à $\mathbb{E}[N_e]$ de dépasser n, le potentiel chimique restera donc toujours majoré par une certaine valeur strictement négative. La fugacité z ne peut donc pas tendre vers 0 et $\mathbb{E}[N_0] = \frac{z}{1-z}$ reste borné, de l'ordre de 1, donc négligeable par rapport à n.

Tout ceci est en fait caché dans l'article derrière le conditionnement par l'évènement $M \leq n$. En effet la variable M de l'article est définie par $\sum_{j=0}^{\infty} Z_j$, ce qui correspond exactement au $\mathbb{E}[N_e]$ ci-dessus puisqu'on a vu que les Z_j pouvaient s'interpréter comme la version grand-canonique du nombre de particules dans l'état j au paramètre μ près. De même Chatterjee et Diaconis définissent Z_0 comme $n - M$, qui joue donc le rôle du $\mathbb{E}[N_0]$ des physiciens. Pour $T < T_c$, ou ce qui revient au même avec les paramètres introduits en introduction $t < t_c$, la valeur maximale de M reste strictement inférieure à n, au moins pour n assez grand, ce qui est bien traduit par le fait que $\mathbb{P}(M \leq n) \to 1$ lorsque $n \to \infty$.

Plaçons-nous pour se fixer les idées dans le cas où le nombre total n de particules croît vers l'infini, et où l'on fait varier le paramètre t de telle sorte que la température $T = n^{\frac{1}{\alpha}}$ reste constante strictement inférieure à T_c. En langage grand-canonique, la valeur maximale du nombre de particules dans les états excités est strictement inférieure à n, et comme n tend vers l'infini, l'équation (3) impose à $\mathbb{E}[N_0]$ de croître également à l'infini ; par conséquent la solution μ de cette équation tendra vers 0, redonnant à la limite les résultats donnés par le formalisme canonique (les variables canoniques Z_j de l'article peuvent être vues comme des limites lorsque $\mu \to 0$ des variables $\mathbb{E}[N_j]$ grand-canoniques). La concordance entre ensembles canonique et grand-canonique se voit particulièrement bien dans la situation où $T < T_c$ avec apparition d'un phénomène de condensation ; en effet, dans le formalisme grand-canonique, pour $T < T_c$ l'équation (3) se résout en prenant pour $\mathbb{E}[N_e]$ sa valeur maximale (c'est-à-dire sa valeur à $\mu = 0$) et le résultat que l'on peut trouver dans la littérature physique est

$$N_m = (\frac{T}{T_c})^{\frac{3}{2}} N$$

d'où l'on déduit

$$N_0 = N[1 - (\frac{T}{T_c})^{\frac{3}{2}}]$$

ce qui est précisément le résultat fourni par le théorème 2.1 de l'article, en prenant $\alpha = \frac{3}{2}$ (cas particulier de la convergence en probabilités de $\frac{N_0}{n}$ vers $(1 - (\frac{T}{T_c})^{\alpha})$ donnée par le théorème pout tout $\alpha > 1$)

En revanche, on constate des divergences tout-à-fait surprenantes entre les résultats prédits par les deux ensembles en ce qui concerne les fluctuations du condensat de Bose-Einstein, sur lesquelles nous reviendrons en détail dans la dernière partie de ce travail. En effet, le formalisme grand-canonique des physiciens aboutit à l'expression suivante pour la variance de $\mathbb{E}[N_0]$:

$$\Delta(N_0^2) = N_0(N_0 + 1)$$

Ainsi, pour $T < T_c$, $\mathbb{E}[N_0]$ est de l'ordre de n donc tend vers l'infini, et ses fluctuations sont de l'ordre de n. Toutefois, le cadre de l'ensemble canonique dans lequel s'inscrit la démarche des auteurs de l'article donne des comportements asymptotiques non pathologiques pour les écarts à la moyenne de $\mathbb{E}[N_0]$.

4 Fluctuations

4.1 Nombre de particules dans l'état fondamental

Dans la suite, nous allons étudier les fluctuations de la taille du condensat de Bose-Einstein. Notons $X_1, X_2, \cdots$ des variables aléatoires de loi exponentielle iid d'espérance 1. On définit ensuite :

$$W := \begin{cases} \frac{1}{(L\alpha\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-X_j}{E_j - E_0} & \text{if } \alpha > 1 \\ \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1-X_j}{E_j - E_0} & \text{if } \alpha = 1 \end{cases}$$

Théorème 3. *Supposons que $t < t_c$. ALORS :*

Si $\alpha = 1$, la série W converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}_2$, lorsque $n \to \infty$, $\frac{N_0 - \mathbb{E}(N_0)}{\frac{n}{\log(n)}} \xrightarrow{L} \frac{t}{t_c} W$

Si $1 < \alpha < 2$, la série W converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}_2$, lorsque $n \to \infty$, $\frac{N_0 - \mathbb{E}(N_0)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \xrightarrow{L} \frac{t}{t_c} W$

Si $\alpha = 2$, la série W converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}_2$, lorsque $n \to \infty$, $\frac{N_0 - \mathbb{E}(N_0)}{\sqrt{n \log(n)}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \frac{3t^2}{\pi^2 t_c^2})$

Si $\alpha > 2$, la série W converge presque sûrement et dans $\mathbb{L}_2$, lorsque $n \to \infty$, $\frac{N_0 - \mathbb{E}(N_0)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, (\frac{t}{t_c})^\alpha \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)})$

Démonstration. Supposons d'abord que $1 \leq \alpha < 2$. Fixons $\beta > 0$ et soient $Z_0, Z_1, \cdots$ et M définies comme précédemment.

Pour chaque k, on pose $M_k := \sum_{j=1}^{k} Z_j$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on définit

$$\phi_k(\beta, \xi) := \mathbb{E}[\exp(i\xi\beta(M_k - \mathbb{E}[M_k]))]$$

ainsi que

$$\phi(\beta, \xi) := \mathbb{E}[\exp(i\xi\beta(M - \mathbb{E}[M]))].$$

Comme $M_k \to M$ et $\mathbb{E}[M_k] \to \mathbb{E}[M]$, on a $\lim_{k\to\infty} \phi_k(\beta, \xi) = \phi(\beta, \xi)$

i.e. $\phi(\beta, \xi) = \exp(\sum_{j=1}^{\infty} [\log(1 - e^{-\beta E_j}) - \log(1 - e^{\beta(i\xi - E_j)}) - \frac{i\xi\beta e^{-\beta E_j}}{1 - e^{-\beta E_j}}])$.

Fixons ξ et notons $a_j(\beta)$ la j-eme terme dans la somme. Alors pour tout j

$$\lim_{\beta\to\infty} a_j(\beta) = \log(E_j) - \log(E_j - i\xi) - \frac{i\xi}{E_j}$$

Développant les logarithmes dans l'expression de $a_j(\beta)$ en series entières et on obtient :

$$\begin{aligned} a_j(\beta) &= \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{e^{k(i\beta\xi-\beta E_j)}}{k} - \frac{e^{-k\beta E_j}}{k} - i\xi\beta e^{-k\beta E_j}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{e^{ik\beta\xi} - 1 - ik\beta\xi}{k})e^{-k\beta E_j} \end{aligned}$$

Comme on a $E_j \geq kj^{\frac{1}{\alpha}}$, la série du membre de droite converge absolument. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|e^{ix} - 1 - ix| \leq \frac{x^2}{x}$, ainsi :

$$|a_j(\beta)| \leq \frac{\beta^2\xi^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k\beta E_j} = \frac{\beta^2\xi^2 e^{-\beta E_j}}{2(1-e^{-\beta E_j})^2} = \frac{\beta^2\xi^2}{2(e^{\beta\frac{E_j}{2}} - e^{-\beta\frac{E_j}{2}})^2}$$

Pour tout $x \geq 0$, $e^x - e^{-x} \geq 2x$. D'où pour tout j et $\beta > 0$, $|a_j(\beta)| \leq \frac{\xi^2}{2E_j^2}$. Or, par l'hypothese on a $\alpha < 2$, ainsi $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{E_j^2} \leq \frac{1}{K^2}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\frac{2}{\alpha}}} < \infty$. Donc la série de fonctions $\sum_{j=1}^{\infty} a_j(\beta)$ converge normalement. Donc :

$$\begin{aligned} \lim_{\beta\to 0} \phi(\beta,\xi) &= \exp(\lim_{\beta\to 0}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n} a_j(\beta)) \\ &= \exp(\lim_{n\to\infty}\lim_{\beta\to 0}\sum_{j=1}^{n} a_j(\beta)) \\ &= \exp(\sum_{j=1}^{\infty}[\log(E_j) - \log(E_j - i\xi) - \frac{i\xi}{E_j}]) \end{aligned}$$

Considérons à présent $X_1, X_2, \cdots$ une suite de variables aléatoires iid de loi exponentielle d'espérance 1. Pour chaque k, on définit

$$U_k := \sum_{j=1}^{k} \frac{X_j - 1}{E_j}.$$

Comme $\mathbb{E}[U_{k+1}|U_k] = \mathbb{E}[U_k|U_k] + \mathbb{E}[\frac{X_{j+1}-1}{E_{j+1}}|U_k] = U_k + \mathbb{E}[\frac{X_{j+1}-1}{E_{j+1}}] = U_k$, la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une martingale adaptée à la filtration canonique.

Puisque $\mathbb{E}[U_k^2] = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{E_j^2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{E_j^2}$, c'est-à-dire bornée dans $\mathbb{L}_2$, elle converge presque surement et dans $\mathbb{L}_2$ vers une variable aléatoire $U := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{X_j-1}{E_j}$.

Comme la fonction caractéristique de U est

$$\mathbb{E}[e^{i\xi U}] = \exp(\sum_{j=1}^{\infty}[\log(E_j) - \log(E_j - i\xi) - \frac{i\xi}{E_j}])$$

il s'ensuit que $\beta(M - \mathbb{E}[M]) \xrightarrow{L} U$ lorsque $\beta \to 0$.

Traitons le cas où $1 < \alpha < 2$. Comme $M - \mathbb{E}[M] = \mathbb{E}[Z_0] - Z_0$, on a alors :

$$\begin{aligned}\frac{Z_0 - \mathbb{E}[Z_0]}{n^{\frac{1}{\alpha}}} &\xrightarrow{L} -k_B t U \\ &= k_B t (L\alpha\Gamma(\alpha)\zeta(\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} W \\ &= \frac{t}{t_c} W\end{aligned}$$

Comme la loi de N_0 est la même que celle de Z_0 conditionnellement à $M \leq n$, et par le théorème 1, $\mathbb{P}(M \leq n) \to 1$ lorsque $n \to \infty$ si $t < t_c$, on a bien $\frac{N_0 - \mathbb{E}(N_0)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \xrightarrow{L} \frac{t}{t_c} W$.

De la même manière, lorsque $\alpha = 1$, on a bien $\frac{N_0 - \mathbb{E}(N_0)}{\frac{n}{\log(n)}} \xrightarrow{L} \frac{t}{t_c} W$.

Les deux autre cas se font de même façon, c'est-à-dire calculer la fonction caractéristique de $\frac{N_0 - \mathbb{E}(N_0)}{\sqrt{n \log(n)}}$(respectivement $\frac{N_0 - \mathbb{E}(N_0)}{\sqrt{n}}$) puis appliquer le théorème de Paul-Lévy.

$\square$

4.2 Énergie totale du système

On démontre préalablement le lemme suivant :

Lemme 3. *Soit $\phi : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\sum_{k=0}^{\infty} m_k (k+1)^\alpha < \infty$ où $m_k := max_{k \leq x \leq k+1} |\phi(x)|$. Alors $\lim_{\beta \to 0} \beta^\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \phi(\beta E_j) = L\alpha \int_0^\infty \phi(x) x^{\alpha-1} dx$.*

Démonstration. Notons que, si on note $S(\lambda) := \#\{j : E_j \leq \lambda\}$, $\lambda > 0, S(\lambda) \leq C\lambda^\alpha$. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, on peut choisir un entier K tel que

$C \sum_{k=K}^{\infty} m_k (k+1)^\alpha < \epsilon$ et $L\alpha \int_K^\infty \phi(x) x^{\alpha-1} dx < \epsilon$.

Pour chaque $\beta \in]0, \frac{K}{E_1}[$, on définit la mesure de probabilité

$$\mu_\beta := \tfrac{1}{S(K/\beta)} \textstyle\sum_{j : E_j \leq K/\beta} \delta_{\beta E_j}$$

où δ_x est la masse de Dirac. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \phi(\beta E_j) &= \sum_{j : E_j \leq K/\beta} \phi(\beta E_j) + \sum_{j : E_j > K/\beta} \phi(\beta E_j) \\ &= S(K/\beta) \int_0^\infty \phi(x) d\mu_\beta(x) + \sum_{j : E_j > K/\beta} \phi(\beta E_j)\end{aligned}$$

Notons que par l'hypothèse 2, pour tout $x \in]0, K[$,

$$\lim_{\beta \to 0} \mu_\beta([0,x]) = \lim_{\beta \to 0} \frac{\#(j : \beta E_j \leq x)}{S(K/\beta)}$$
$$= \lim_{\beta \to 0} \frac{S(x/\beta)}{S(K/\beta)}$$
$$= \frac{x^\alpha}{K^\alpha}$$

Ainsi, μ_β converge faiblement vers la mesure de probabilité sur $[0, K]$ de densité $\alpha x^{\alpha-1} K^{-\alpha}$ lorsque $\beta \to 0$. Comme ϕ est continue bornée sur $[0, \infty[$, on a
$\lim_{\beta \to 0} \int_0^\infty \phi(x) d\mu_\beta(x) = \frac{\alpha}{K^\alpha} \int_0^K \phi(x) x^{\alpha-1} dx$.
Or

$$|\beta^\alpha \sum_{j : \beta E_j > K} \phi(\beta E_j)| \leq \beta^\alpha \sum_{k \geq K} m_k \#\{j : k \leq \beta E_j < k+1\}$$
$$\leq \beta^\alpha \sum_{k \geq K} m_k S(\frac{k+1}{\beta}$$
$$\leq C \sum_{k \geq K} m_k (k+1)^\alpha$$
$$\leq \epsilon$$

Donc

$$\limsup_{\beta \to 0} |\beta^\alpha \sum_{j=1}^\infty \phi(\beta E_j) - L\alpha \int_0^\infty \phi(x) x^{\alpha-1} dx|$$
$$\leq L\alpha \int_K^\infty |\phi(x)| x^{\alpha-1} dx + \limsup_{\beta \to 0} |\beta^\alpha \sum_{j : \beta E_j > K} \phi(\beta E_j)| \leq 2\epsilon$$

Comme ceci est vrai pout tout ϵ, on a bien l'égalité que l'on veut.

$\square$

Avec le Lemme 3, on peut donc démontrer le théorème suivant qui estime les fluctuations de E_{tot} autour de $\mathbb{E}[E_{tot}]$:

Théorème 4. *Supposons que $t < t_c$:*
Pour tout $\alpha > 1$,

$$\frac{E_{tot} - \mathbb{E}[E_{tot}]}{n^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}}} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0, \alpha L \Gamma(\alpha+2) \zeta(\alpha+1) (k_B t)^{\alpha+2}) \text{ en loi.}$$

Pour $\alpha = 1$,

$$\frac{E_{tot} - \mathbb{E}[E_{tot}]}{\frac{n}{log}^{3/2}} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0, \alpha L \Gamma(3) \zeta(2) (k_B t)^3) \text{ en loi.}$$

On peut prévoir la valeur $\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}$ dans le théorème.

En effet, on cherche γ tel que $\frac{R-\mathbb{E}[R]}{n^\gamma} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ *Gaussienne*. Une condition nécessaire pour la convergence en $\mathbb{L}_2$ est que $Var(\frac{R}{n^\gamma}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Cste$, c'est-à-dire $\frac{Var(R)}{n^{2\gamma}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Cste$.

$R = \sum_j E_j Z_j$ et les Z_j sont deux à deux indépendantes, donc $Var(R) = \sum_j E_j^2 Var(Z_j)$. Un calcul montre que $Var(Z_j) = \frac{e^{-\beta E_j}}{(1-e^{-\beta E_j})^2}$ donc

$$\begin{aligned} Var(R) &= \sum_j E_j^2 \frac{e^{-\beta E_j}}{(1-e^{-\beta E_j})^2} \\ &= \frac{1}{\beta^2}\sum_j \phi(\beta E_j) \end{aligned}$$

où $\phi : x \mapsto \frac{xe^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$. Par le Lemme 3, $\beta^\alpha \sum_j \phi(\beta E_j) \to Cste$.

D'où $Var(R) \sim \frac{Cste}{\beta^{\alpha+2}}$.

Dans le cas $\alpha > 1$, $\beta = \frac{1}{k_B T} = \frac{1}{k_B t n^{1/\alpha}}$. D'où $\frac{Var(R)}{n^{2\gamma}} \sim Cste \frac{1}{n^{2\gamma}} n^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}$. On veut $2\gamma = \frac{\alpha+2}{2} = 1 + \frac{2}{\alpha}$, soit $\gamma = \frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}$.

Démonstration. Notons toujours $E_{tot} := \sum_{j=1}^\infty E_j Z_j$ et $R_k := \sum_{j=1}^k E_j Z_j$ la somme partielle jusqu'au rang k. On a $\mathbb{E}[R_k] = \sum_{j=1}^k \frac{E_j e^{-\beta E_j}}{1-e^{-\beta E_j}}$. Prenons $\gamma \in]1;\infty[$ arbitraire. Calculons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{i\xi\beta^\gamma(R_k-\mathbb{E}[R_k])}] &= \prod_{j=1}^k e^{i\xi\beta^\gamma \frac{E_j e^{-\beta E_j}}{1-e^{-\beta E_j}}} \mathbb{E}[e^{i\xi\beta^\gamma E_j Z_j}] \\ &= \prod_{j=1}^k e^{i\xi\beta^\gamma \frac{E_j e^{-\beta E_j}}{1-e^{-\beta E_j}}} \frac{1-e^{-\beta E_j}}{1-e^{\beta E_j(i\xi\beta^{\gamma-1}-1)}} \\ &= e^{\sum_{j=1}^k a_j(\beta)} \end{aligned}$$

où $a_j(\beta) := -i\xi\beta^\gamma \frac{E_j e^{-\beta E_j}}{1-e^{-\beta E_j}} + ln(1-e^{-\beta E_j}) - ln(1-e^{\beta E_j(i\xi\beta^{\gamma-1}-1)})$

On développe en série $a_j(\beta)$:

$$\begin{aligned} a_j(\beta) &= \sum_{p\geq 1}(-i\xi\beta^\gamma E_j e^{-p\beta E_j} - \frac{e^{-p\beta E_j}}{p} + \frac{e^{p\beta E_j(i\xi\beta^{\gamma-1}-1)}}{p}) \\ &= \sum_{p\geq 1} \frac{e^{-p\beta E_j}}{p}(-i\xi p\beta^\gamma E_j - 1 + e^{i\xi p E_j \beta^\gamma}) \end{aligned}$$

Comme on a : $|e^{ix}-1-ix-\frac{(ix)^2}{2}|\leq\frac{x^3}{6}$, on a une estimation suivante :

$$\begin{aligned}|\sum_{p\geq 1}\frac{e^{-p\beta E_j}}{p}(-i\xi p\beta^\gamma E_j-1+e^{i\xi pE_j\beta^\gamma}-\frac{(i\xi pE_j\beta^\gamma)^2}{2})| &\leq \sum_{p\geq 1}\frac{e^{-p\beta E_j}}{p}|-i\xi p\beta^\gamma E_j\\ -1+e^{i\xi pE_j\beta^\gamma}-\frac{(i\xi pE_j\beta^\gamma)^2}{2}| &\leq \sum_{p\geq 1}\frac{e^{-p\beta E_j}}{p}\frac{1}{6}(\xi pE_j\beta^\gamma)^3\\ &= \frac{\beta^{3\gamma}\xi^3}{6}\sum_{p\geq 1}p^2E_j^3e^{-p\beta E_j}\end{aligned} \tag{4}$$

Admettons que l'on puisse intervertir les sommes et les limites, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 1}\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p}(-\frac{\xi^2}{2}\beta^{2\gamma}p^2E_j^2e^{-p\beta E_j}) &= \sum_{p\geq 1}\frac{1}{p}\sum_{j\geq 1}(-\frac{\xi^2}{2}\beta^{2\gamma}p^2E_j^2e^{-p\beta E_j})\\ &= -\frac{\xi^2}{2}\beta^{2\gamma-\alpha-2}\sum_{p\geq 1}p\beta^\alpha\sum_{j\geq 1}\phi(\beta E_j)\\ &\overset{\beta\to 0}{\longrightarrow} -\frac{\xi^2}{2}\beta^{2\gamma-\alpha-2}\sum_{p\geq 1}p\alpha L\int_0^\infty x^{\alpha-1}x^2e^{px}dx\\ &= -\frac{\xi^2}{2}\beta^{2\gamma-\alpha-2}\alpha L\Gamma(\alpha+2)\zeta(\alpha+1)\end{aligned} \tag{5}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 1}\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p}(-\frac{\xi^3}{6}\beta^{3\gamma}p^3E_j^3e^{-p\beta E_j}) &= \sum_{p\geq 1}\frac{1}{p}\sum_{j\geq 1}(-\frac{\xi^3}{6}\beta^{3\gamma}p^3E_j^3e^{-p\beta E_j})\\ &= -\frac{\xi^3}{6}\beta^{3\gamma-\alpha-3}\sum_{p\geq 1}p^2\beta^\alpha\sum_{j\geq 1}\phi(\beta E_j)\\ &\overset{\beta\to 0}{\longrightarrow} -\frac{\xi^3}{6}\beta^{3\gamma-\alpha-3}\sum_{p\geq 1}p^2\alpha L\int_0^\infty x^{\alpha-1}x^3e^{px}dx\\ &= -\frac{\xi^3}{6}\beta^{3\gamma-\alpha-3}\alpha L\Gamma(\alpha+3)\zeta(\alpha+2)\end{aligned} \tag{6}$$

Prenons $\gamma=\frac{\alpha}{2}+1$, alors on a $2\gamma-\alpha-2=0$ et $3\gamma-\alpha-3>0$. D'après l'inégalité 4, on a bien :

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 1}\frac{e^{-p\beta E_j}}{p}(-i\xi p\beta^\gamma E_j-1+e^{i\xi pE_j\beta^\gamma}) &= \sum_{p\geq 1}\frac{1}{p}\sum_{j\geq 1}(-\frac{\xi^3}{6}\beta^{3\gamma}p^3E_j^3e^{-p\beta E_j})+\\ \mathrm{O}(\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p}\sum_{j\geq 1}(-\frac{\xi^3}{6}\beta^{3\gamma}p^3E_j^3e^{-p\beta E_j})) &\overset{\beta\to 0}{=} -\frac{\xi^2}{2}\beta^{2\gamma-\alpha-2}\alpha L\Gamma(\alpha+2)\zeta(\alpha+1)+\mathrm{O}(\beta^{\frac{\alpha}{2}})\end{aligned} \tag{7}$$

Donc, on a montré que la fonction caractéristique de $\beta^{\frac{\alpha}{2}+1}(E_{tot} - \mathbb{E}[E_{tot}])$ converge simplement vers la fonction caractéristique d'une loi gaussienne, comme $\beta = \frac{1}{k_B t n^{\frac{1}{\alpha}}}$, par le théorème de Paul-Lévy, $\frac{E_{tot}-\mathbb{E}[E_{tot}]}{n^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}}} \xrightarrow{n\to\infty} \mathcal{N}(0, \alpha L\Gamma(\alpha + 2)\zeta(\alpha+1)(k_B t)^{\alpha+2})$ en loi pour tout $\alpha \in]1; +\infty[$

Pour finir la preuve, il faut montrer que l'on peut intervertir les sommes et les limites. Notons que $\sum_{p\geq 1} |\frac{\xi^2}{2}\beta^{2\gamma} p E_j^2 e^{-p\beta E_j}| = \frac{\xi^2}{2}\beta^{2\gamma} E_j^2 \frac{e^{-\beta E_j}}{(1-e^{-\beta E_j})^2}$ et $(E_j^2 e^{-\beta E_j})_{j\geq 1}$ est une série convergente pour $\beta > 0$, le théorème de Fubini nous permet d'intervertir à $\beta > 0$ fixé la somme sur j et la somme sur p. Idem pour (6).

D'autre part, comme la fonction $f_p : \beta \mapsto p\beta^\alpha \sum_{j\geq 1} \beta^2 E_j^2 e^{-p\beta E_j}$ est une fonction continue et en 0, elle admet comme limite $\alpha L \int_0^\infty x^{\alpha-1} x^2 e^{-px} = \alpha L\Gamma(\alpha + 2)\frac{1}{p^{\alpha+2}}$, ainsi $|\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p}\sum_{j\geq 1}(-\frac{\xi^2}{2}\beta^{\alpha+2} p^2 E_j^2 e^{-p\beta E_j})| \leq C \times \frac{1}{p^{\alpha+1}}$ où C est une constante indépendante de p. Comme $(p^{-\alpha-1})_{p\geq 1}$ est une série convergente lorsque $\alpha > 0$, on a bien que $\sum_{p\geq 1} \frac{\xi^2}{2} f_p$ converge normalement. Donc on peut intervertir la limite et la somme.

□

On remarque que la valeur critique $\alpha = 2$ dans les fluctuations de N_0 n'intervient pas dans les fluctuation de R_k, principalement parce que la variance de R est toujours d'ordre $\beta^{2+\alpha}$ tandis que la variance de M est d'ordre β^2 pour $\alpha \in [1, 2]$ et ce n'est pas le cas pour $\alpha > 2$.

5 Conclusion

Finalement, si le processus de condensation de Bose-Einstein est depuis longtemps connu et compris des physiciens, on trouve peu de travaux mathématiques visant à expliquer ce phénomène de manière parfaitement rigoureuse. Sourav CHATTERJEE et Persi DIACONIS présentent dans ce récent article une interprétation probabiliste du phénomène de condensation. Leur démarche n'est pas pour autant déconnectée des considérations physiques à l'origine du problème étudié : les variables introduites au fur et à mesure des développements correspondent à des reformulations en langage probabiliste des concepts et méthodes employés par les physiciens. Ainsi, le regroupement d'une proportion macroscopique de particules dans l'état fondamental se traduit par des résultats de convergence en probabilité de variables aléatoires comme le nombre de particules dans l'état fondamental ou l'énergie totale du système. Toutefois, les fluctuations de taille du condensat constituent un phénomène surprenant et difficile à expliquer avec le seul formalisme physicien ; les auteurs de l'article établissent un théorème relatif à l'écart du nombre de particules dans l'état fondamental par rapport à sa valeur moyenne. Nous avons ensuite formulé un théorème analogue concernant l'énergie totale du système.

Si les techniques employées dans l'article relèvent du formalisme de l'ensemble canonique (par opposition au formalisme grand-canonique généralement utilisé par les physiciens pour étudier les propriétés des condensats de Bose-Einstein), Chatterjee et Diaconis font aussi brièvement allusion à un troisième ensemble : l'ensemble micro-canonique, dans lequel le nombre de particules du système ainsi que son énergie totale sont fixés. L'étude des fluctuations de taille des condensats de Bose-Einstein aboutit à des résultats en partie contradictoires selon que l'on se place dans l'ensemble micro-canonique, canonique, ou grand-canonique. Ceci contredit un théorème présent dans la littérature physique qui stipule l'équivalence de ces trois ensembles. Ce paradoxe n'a émergé qu'assez récemment, et une nouvelle étude plus approfondie des condensats de Bose-Einstein permit de considérer la possibilité d'introduire un quatrième ensemble, donnant lieu à de nombreux et fructueux développements.

Références

[1] Chatterjee, S. and Diaconis, P. (2013). *Fluctuations of the Bose-Einstein condensate*. arXiv preprint arXiv :1306.3625.

[2] Pitaevskii, L. P., and Stringari, S. (2003). *Bose-einstein condensation* (No. 116). Oxford University Press.

[3] Janson, S. (2012). *Simply generated trees, conditioned Galton ?Watson trees, random allocations and condensation.* Probab. Surv, 9, 103-252.

[4] Diaconis, P. (2005, June). *Analysis of a Bose ?Einstein Markov chain.* In Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics (Vol. 41, No. 3, pp. 409-418). No longer published by Elsevier.

[5] Von Mises, R. (1964). Mathematical theory of probability and statistics. Mathematical Theory of Probability and Statistics, New York : Academic Press, 1964, 1.

[6] Buffet, E., and Pule, J. V. (1983). *Fluctuation properties of the imperfect Bose gas.* Journal of Mathematical Physics, 24(6), 1608-1616.

[7] Einstein, A.(1924). *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases.* Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften.

[8] Fannes, M., and Verbeure, A. (2008). *The condensed phase of the imperfect Bose gas. Journal of Mathematical Physics*, 21(7), 1809-1818.

[9] KRAUTH, Werner. *Statistical mechanics : algorithms and computations.* Oxford University Press, 2006.

[10] PETHICK, Christopher et SMITH, Henrik. *Bose-Einstein condensation in dilute gases.* Cambridge university press, 2002.

[11] VERSHIK, Anatolii Moiseevich. *Statistical mechanics of combinatorial partitions, and their limit shapes.* Functional Analysis and Its Applications, 1996, vol. 30, no 2, p. 90-105.