Ens Paris, DMA **Algèbre 1** **2012/2013**

Feuille d'exercices n° 10

Exercice 1 – Soient U et V deux espaces vectoriels (sur un corps k). On note $U^* = Hom_k(U,k)$ le dual de U. Expliciter une application linéaire naturelle injective $\Phi : U^* \otimes_k V \to Hom_k(U,V)$. Quelles sont les images des tenseurs purs (cest-à-dire les $\lambda \otimes v$ avec $\lambda \in U^*$ et $v \in V$) ? Quelle est l'image de l'application Φ ? Quand est-elle un isomorphisme ?

Exercice 2 – Soit k un corps et E un espace vectoriel de dimension finie sur k. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que le dual $(\bigwedge^n E)^*$ de $\bigwedge^n E$ est canoniquement isomorphe à $\bigwedge^n E^*$.

Exercice 3 – Soient k un corps et E, F deux k-espaces vectoriels. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que l'on a une bijection entre les applications linéaires $\bigwedge^n E \to F$ et les applications n-linéaires alternées $E^n \to F$.

Exercice 4 – Soient k un corps et E un k-espace vectoriel. Soient $u_1, \dots, u_r$ des éléments de E.

1. Montrer que l'on a $u_1 \wedge \dots \wedge u_r \neq 0$ dans $\bigwedge^r E$ si et seulement si la famille $(u_1, \dots, u_r)$ est libre dans E.
2. Montrer que l'on a $u_1 \wedge \dots \wedge u_r \neq 0$ dans $\bigwedge^r E$ si et seulement si il existe une forme alternée f sur E telle que $f(u_1, \dots, u_r) \neq 0$.

Exercice 5 – Soient k un corps et E, F deux k-espaces vectoriels. Soit $n \geq 1$ un entier et soit $u : E \to F$ une aplication linéaire.

1. Définir une application linéaire "naturelle" $\bigwedge^n u : \bigwedge^n E \to \bigwedge^n F$.
2. Supposons que le rang de u est fini égal à un entier r. Montrer que si $n \leq r$, alors le rang de $\bigwedge^n u$ est C_r^n, et si $n > r$ alors l'application $\bigwedge^n u$ est nulle.

Exercice 6 – Soient k un corps et E un k-espace vectoriel.

1. Si E est de dimension finie, montrer que
$$z = \sum_{n \geq 0} z_n \in \bigoplus_n \bigwedge^n E = \bigwedge E \text{ est inversible si et seulement si } z_0 \neq 0.$$
2. Montrer que tout élément $z \in \bigwedge E$ appartient à un $\bigwedge F$ pour un certain sous-espace $F \subset E$ de dimension finie. Conclure.

Exercice 7 – Faire les exercices 5 et 6 de la feuille précédente.

Exercice 8 –Soit V un espace vectoriel hermitien complexe de dimension finie n, de base $(e_1, \dots, e_n)$. On ne suppose pas que cette base est orthonormale. On désigne par $< \cdot, \cdot >$ le produit scalaire de V , supposé linéaire en la deuxième variable. Pour $1 \leq i \leq n$, soit s_i une transformation unitaire telle que $s_i(e_i) = c_i e_i$ avec $c_i \neq 1$ et de sous-espace de vecteurs invariants l'orthogonal de e_i. On appelle W le sous-groupe de $GL(V)$ engendré par les s_i.

1. Soit $x \in V$. Exprimer $s_i(x)$ comme combinaison linéaire de x et de e_i.
2. Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que tout élément de $\bigwedge^k(V)$ invariant par W est nul. (On pourra procéder par récurrence sur n en considérant le sous-espace V' de base $(e_1, \dots, e_{n-1})$, et en décomposant V comme somme directe de V' et de son supplémentaire orthogonal.)
3. On suppose que W est fini. Montrer que pour tout élément A de $End(V)$ on a :
$$\sum w \in W \det(A - w) = \mathrm{card}(W) \cdot \det(A), \quad \text{et} \quad \sum_{w \in W} \det(\mathrm{Id} - Aw) = \mathrm{card}(W).$$
4. En déduire que pour tout A de $End(V)$ il existe $w \in W$ tel que Aw na aucun point fixe non nul.