Ens Paris, DMA **Algèbre 1** **2012/2013**

Feuille d'exercices n° 11

Exercice 1 – Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ ayant chacune au plus deux valeurs propres distinctes, telles que le groupe G engendré par A et B est fini. Montrer que la représentation standard de G dans V est telle que ses sous-représentations irréductibles sont de dimension au plus 2.

Exercice 2 – Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, soit G un groupe et (V, ρ) une représentation de G. On suppose qu'il existe $v \in V$ tel que $\{\rho(g)v \mid v \in V\}$ forme une base de V. Montrer que (V, ρ) est isomorphe à la représentation régulière de G.

Exercice 3 – Soient G un groupe fini, H un sous-groupe distingué dans G, $\pi : G \to G/H$ la projection canonique et ρ une représentation de G/H.

1. Montrer que $\rho \circ \pi$ est une représentation de G.
2. Montrer que ρ est irréductible si et seulement si $\rho \circ \pi$ est irréductible.

Exercice 4 – Soient p un nombre premier et k un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. Soit G un p-groupe. Montrer que G possède une représentation non triviale de dimension 1 sur k.

Exercice 5 – Soit G un groupe fini et χ un caractère de G vérifiant :

$$\forall g \in G, g \neq 1 \Rightarrow \chi(g) = 0.$$

Montrer que χ est un multiple entier du caractère de la représentation régulière de G.

Exercice 6 –

1. Soit A un groupe fini abélien et χ un caractère de A sur $\mathbb{C}$. Montrer que
$$\sum_{a \in A} |\chi(a)|^2 \geq \mathrm{Card}(A)\chi(1_A).$$
2. Soit G un groupe fini et A un sous-groupe abélien de G d'indice $n \geq 1$. Montrer que si χ est un caractère irréductible de G, on a $\chi(1_A) \leq n$. Que peut-on dire si $\chi(1_A) = 1$?

Exercice 7 –Soient G un groupe fini et ϕ, ψ deux caractères de G dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que si ψ est de degré 1, alors $\phi\psi$ est irréductible si et seulement si ϕ est irréductible.
2. Montrer que si ψ est de degré strictement supérieur à 1, alors le caractère $\psi\bar{\psi}$ n'est pas irréductible.

3. Soit ϕ un caractère irréductible de G. On suppose que ϕ est le seul caractère irréductible de son degré. Montrer que s'il existe un caractère ψ de degré 1 et $g \in G$ tel que $\psi(g) \neq 1$, alors $\phi(g) = 0$.

Exercice 8 –

1. Dresser la table des caractères de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour tout entier $n \geq 1$.
2. Dresser la table des caractères de S_3.

Exercice 9 –

1. En considérant la représentation naturelle de S_4 sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 4, construire une (sous-)représentation irréductible de dimension 3, de caractère valant $(3, 1, 0, -1, -1)$ sur les différentes classes de conjugaisons.
2. Dresser la table des caractères de A_4.