Ens Paris, DMA **Algèbre 1** **2012/2013**

Feuille d'exercices des 20-21 décembre 2012

Les représentations considérées dans la suite sont des représentations complexes. Étant donné un groupe G, on note $\hat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de G.

"Rappels" : Soit ϵ une racine primitive n^{ieme} de l'unité, $K = \mathbb{Q}[\epsilon]$ le corps engendré par ϵ sur $\mathbb{Q}$, et Γ l'ensemble des automorphismes de corps, $\mathbb{Q}$-linéaires, de K. Le groupe Γ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ via l'application $i : \sigma \mapsto i(\sigma)$ définie par $\sigma(\epsilon) = \epsilon^{i(\sigma)}$.

Exercice 1 – Soient G un groupe fini, $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation, et $g \in G$. Montrer que $\rho(g)$ est une homothétie si et seulement si $|\chi_\rho(g)| = \deg(\rho)$.

Exercice 2 – Soient G un groupe fini et $g \in G$. Montrer que $g \in Z(G)$ si et seulement si $\forall \rho \in \hat{G}$, $|\chi_\rho(g)| = \deg(\rho)$.

Exercice 3 – Soit G un groupe fini et χ un caractère de G à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Soient $x, y \in G$ tels que $< x >=< y >$. Montrer que $\chi(x) = \chi(y)$.

Exercice 4 – Soit G un groupe fini.

1. On suppose ici que G est cyclique et on note S l'ensemble de ses générateurs. Soit χ un caractère irréductible de G tel que pour tout $s \in S$, $\chi(s) \neq 0$.
   (a) Montrer que $\prod_{s\in S} \chi(\sigma)\overline{\chi(\sigma)} \in \mathbb{Z}$.
   (b) En déduire que
   $$\sum_{s\in S} |\chi(\sigma)|^2 \geqslant \mathrm{Card}(S).$$
2. En utilisant ce qui précède, montrer que si G est un groupe fini et χ un caractère irréductible de G de degré $\geqslant 2$, alors $\exists g \in G$, $\chi(g) = 0$.

Exercice 5 – Soit C une classe de conjuguaison de cardinal c, d'un groupe fini G et $\rho \in \hat{G}$ de degré d. On suppose que d est premier avec c. Montrer que $|\chi_\rho(c)| \in \{0, d\}$.

Exercice 6 – Soit G un groupe fini et C une classe de conjuguaison de cardinal p^m avec p premier et $m \geqslant 1$. Montrer que G n'est pas simple (on pourra introduire la partition $X_1 = \{\chi \in X \ |d_\chi = 0 \ [p] \ \}$, $X_2 = \{\chi \in X \ |d_\chi \neq 0 \ [p] \ \}$ de l'ensemble X de l'ensemble des caractères χ_ρ, $\rho \in \hat{G}$ avec $d_{\chi_\rho} := \deg(\rho)$.).

Exercice 7 – Soient p un nombre premier, $f \geqslant 1$ un entier et $q = p^f$. Soit G le groupe $\{x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbb{F}_q,\ b \in \mathbb{F}_q\}$.

1. Déterminer la table des caractères de G sur $\mathbb{C}$.
2. Déterminer les représentations irréductibles de G sur $\mathbb{C}$.

Exercice 8 – (Issu du sujet d'examen de l'an passé) Soit V une représentation complexe irréductible du groupe fini G et χ_V son caractère. On commence par deux questions préliminaires.

1. Montrer que la représentation $V \otimes V$ se décompose en $V \otimes V = \Lambda^2 V \oplus S^2 V$. Montrer que si (e_i) est une base de V, alors $(e_i e_j - e_j e_i)_{i<j}$ est une base de $\Lambda^2 V$ et $(e_i e_j + e_j e_i)_{i \leq j}$ est une base de $S^2 V$.

2. Montrer que $\mathrm{Hom}(V^*, V)$ est isomorphe à $V \otimes V$. En déduire que la représentation V^* est isomorphe à la représentation V si et seulement si $V \otimes V$ admet un vecteur invariant sous G. Montrer que, dans ce cas, la multiplicité de la représentation triviale dans $V \otimes V$ est égale à 1.

Partie A. Le but de cette partie est de donner une caractérisation des représentations irréductibles V dont le caractère est *réel*, c'est-à-dire $\chi_V = \bar{\chi}_V$.

1. Rappeler pourquoi $\bar{\chi}_V$ est le caractère de V^*. Que signifie le fait que χ_V soit réel ?

2. Montrer que le caractère de $\Lambda^2 V$ est donné par $\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}(\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2))$.

3. Pour $g \in G$, soit $r_n(g) = \mathrm{card}\{h \in G, h^n = g\}$. Montrer que
$$r_n = \sum_{\substack{\chi \text{ caractère} \\ \text{irréductible}}} v_n(\chi)\chi, \qquad \text{où} \qquad v_n(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^n).$$

4. Montrer que si χ_V n'est pas réel, alors $v_2(\chi_V) = 0$.

5. Montrer que si χ_V est réel, alors $v_2(\chi_V) = -1$ si la sous-représentation triviale de $V \otimes V$ est dans $\Lambda^2 V$, et $+1$ si elle est dans $S^2 V$.

Partie B. Le but de cette partie est de caractériser les représentations irréductibles V *réelles*, c'est-à-dire telles qu'il existe une représentation réelle $V_{\mathbb{R}}$, avec $V \simeq V_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$. Dans la suite, on suppose que χ_V est réel.

1. Montrer que $V^* \otimes V^*$ contient une seule fois la représentation triviale. Soit $B \in (V^* \otimes V^*)^G$ un générateur de cette représentation triviale. Montrer que B définit une forme bilinéaire non dégénérée sur V, invariante sous G. Montrer qu'une telle forme est unique à multiplication près par un complexe. Que signifie sur la forme bilinéaire le fait que B soit élément de $S^2 V^*$, ou bien de $\Lambda^2 V^*$?

2. Montrer que si V est une représentation réelle, alors $v_2(\chi) = 1$.

3. Montrer que V admet un produit scalaire hermitien h, invariant sous G, unique à multiplication près par un réel strictement positif.

4. Supposons $v_2(\chi) = 1$. Posons $h(x, y) = B(u(x), y)$. Montrer que u est un endomorphisme semi-linéaire de V (c'est-à-dire $u(\lambda v) = \bar{\lambda} v$ pour tout complexe λ), invariant sous G. Que dire de u^2 ?

5. En déduire que si $v_2(\chi) = 1$, alors la représentation V est réelle.