**Ens Paris, DMA** **Algèbre 1** **2012/2013**

# Feuille d'exercices des 10-11 janvier 2013

Les représentations considérées dans la suite sont des représentations complexes. Étant donné un groupe $G$, on note $\hat{G}$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de $G$.

**Exercice 1** –Soit $G$ un groupe fini de cardinal $N$, soit $(V, \rho)$ une représentation de $G$, de degré $d$ fini, soit $f$ une fonction centrale sur $G$. On introduit l'opérateur $\mathbb{C}$-linéaire

$$\rho(f) : V \to V, \text{ défini par } \rho(f) = \sum_{g \in G} f(g)\rho(g).$$

Montrer que si $\rho$ est irréductible alors $\rho(f)$ est une homothétie de rapport $\frac{N}{d} < \bar{f}, \chi_\rho >$.

**Exercice 2** –Soit $G$ un groupe fini.

1. Que dire de $G$ si la représentation régulière est irréductible ?
2. Montrer que si $G$ admet exactement deux caractères irréductibles distincts alors $G$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**Exercice 3** –Soit $n \geq 2$ un entier et soit $V = \mathbb{C}^n$ la représentation du groupe symétrique $S_n$ obtenue par permutation des vecteurs de la base canonique.

1. Expliciter toutes les représentations de degré 1 de $S_n$.
2. Montrer que $V$ n'est pas irréductible.

**Exercice 4** –On dit qu'une représentation $(V, \rho)$ d'un groupe $G$ est *cylique* s'il existe un vecteur $v$ tel que $V$ est engendrée par l'ensemble $\{\rho(g)v, \ g \in G\}$.

1. Montrer que la représentation régulière est cyclique.
2. Montrer que toute représentation irréductible est cyclique.
3. Soit $(V_i, \rho_i)$, pour $i \in \{1, \ldots, k\}$ des représentations irréductibles deux à deux non-isomorphes. On veut montrer que la somme directe $V$ de ces représentations est encore cyclique.
   (a) On introduit l'opérateur $\rho(f)$ de l'exercice 1. Pour tout $i$ on pose
   $$f_i(g) = \frac{\chi_i(1)}{|G|}\chi_i(g^{-1}).$$
   Montrer que $\rho_i(f_j)$ est l'identité de $V_i$ si $i = j$ et nul sinon.
   (b) Montrer que $V = \oplus_{i=1}^k V_i$ est cyclique.

4. Donner un exemple de représentation non cyclique.

**Exercice 5** – Soit $H$ et $K$ deux groupes finis et soit $G = H \times K$ produit direct de $H$ et $K$. Montrer que tout caractère irréductible de $G$ s'écrit de manière unique sous la forme $\chi = \phi \otimes \psi$ où $\phi$ est un caractère irréductible de $H$ et $\psi$ un caractère irréductible de $K$ et $\phi \otimes \psi$ est défini par la formule $(\phi \otimes \psi)(h, k) := \phi(h)\psi(k)$.

**Exercice 6** – Soit $G$ un groupe fini.

1. Soit $\chi$ un caractère de $G$ et $\phi_2$ la fonction de $G$ dans $G$ définie par $\phi_2(g) = \chi(g^2)$. Montrer que $\phi_2$ est centrale, différence de 2 caractères de $G$.

2. On suppose de plus que $G = H \times A$ avec $H$ de cardinal impair et $A$ abélien. Montrer que si $\chi$ est un caractère irréductible de $G$, alors la fonction $\phi_2$ correspondante est également un caractère irréductible.

**Exercice 7** – Montrer qu'un groupe $G$ d'ordre 1275 est résoluble.

**Exercice 8** –Soit $G$ un groupe fini et $N$ un sous-groupe distingué de $G$. On suppose connue la table des caractères de $G$. Déterminer la table des caractères de $G/N$.

**Exercice 9** –Soit $G$ le produit semi-direct $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes_\rho \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ donné par la multiplication $\rho : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}),\ k \mapsto 2^k$. Déterminer la tables des caractères de $G$.