Ens Paris **Algèbre 1** **2012/2013**

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1 –

1. Prouver que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Prouver que les sous-groupes non denses de $\mathbb{R}$ sont les $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 – Montrer qu'il n'existe pas de morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Q}^*, \times)$.

Exercice 3 – Si K est un corps fini à q éléments, montrer que les groupes $\mathrm{GL}_n(K)$ et $\mathrm{SL}_n(K)$ sont respectivement de cardinal

$$\prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i) \quad \text{et} \quad q^{n-1}\prod_{i=0}^{n-2}(q^n - q^i).$$

Exercice 4 – Soit G un groupe tel que le quotient par son centre est monogène. Prouver que G est abélien.

Exercice 5 – Soit G un groupe de cardinal p premier.

1. Vérifier que G est cyclique.
2. Déterminer l'ensemble des sous-groupes du groupe $\mathbb{F}^2 := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Notamment montrer qu'il y en a exactement $p + 3$.
3. En déduire qu'il existe dans $\mathbb{F}^2$ des groupes qui ne sont pas de la forme $G_1 \times H_1$ avec G_1 un sous-groupe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et H_1 un sous-groupe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 6 – Montrer que si G est un groupe de cardinal inférieur ou égal à 5, alors G est commutatif. Qu'en est-il pour un groupe de cardinal 6 ?

Exercice 7 – Soit G un groupe et soit A une partie de G. Vérifier que les deux constructions du sous-groupe engendré par A données en cours sont équivalentes.

Exercice 8 – Soient G un groupe abélien et $H \subset K \subset G$ deux sous-groupes. Prouver que G/K est isomorphe au quotient du groupe G/H par le groupe K/H.

Exercice 9 – Soit G un groupe fini tel que tout élément $x \in G$ vérifie $x^2 = 1$.

1. Vérifier que G est commutatif.

2. Soit H un sous-groupe de G, distinct de G, et soit x un élément de G qui n'est pas dans H. Expliciter le plus petit sous-groupe contenant x et H.

3. Prouver que le cardinal de G est une puissance de 2, et montrer que pour tout diviseur d du cardinal 2^n de G, il existe un sous-groupe H de G de cardinal d.

Exercice 10 –

1. Un sous-groupe H d'un groupe G de type fini est-il nécessairement de type fini ?

2. Même question en supposant de plus que le cardinal de G/H est fini.

Exercice 11 –

1. On note $\mathbb{H}_8$ le groupe de quaternions défini par

$$\mathbb{H}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}\,, \quad \text{avec} \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1 \;\text{ et }\; ijk = -1.$$

   Vérifier que $\mathbb{H}_8$ n'est pas commutatif mais que tous ses sous-groupes sont distingués.

2. On dit qu'un groupe G est d'exposant e si e est le plus petit entier $n \geq 1$ tel que pour tout $g \in G$, on a $g^n = 1$. Pour quels exposants e un groupe d'exposant e est-il nécessairement commutatif ?

Exercice 12 – Soit G un groupe fini de cardinal $n \geq 1$.

1. Montrer qu'il existe un système de générateurs $\{a_1, \ldots, a_k\}$ de G vérifiant :

$$\forall i \geq 2,\; a_i \notin < a_1, \ldots, a_{i-1} > .$$

2. Prouver l'inégalité $\mathrm{Card}\,(\mathrm{End}(G)) \leq n^{\log_2 n}$.

Exercice 13 – Soient A, B, C, D des groupes et $1 \to A \to B \to C \to D \to 1$ une suite exacte[1]. Montrer qu'il existe, à isomorphisme près, un unique groupe E tel que les deux suites suivantes soient exactes :

$$1 \to A \to B \to E \to 1 \;\text{ et }\; 1 \to E \to C \to D \to 1.$$

[1]une suite $\ldots \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to \ldots$ est dit exacte en B si $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(v)$ et est dite exacte si elle est exacte à tout cran.