Ens Paris, DMA — Algèbre 1 — 2012/2013

Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1 –**(Lemme de Cauchy)** Soit G un groupe fini et p un nombre premier divisant le cardinal de G. En utilisant une action convenable sur l'ensemble

$$X = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdots g_p = 1\}$$

et sans utiliser les théorèmes de Sylow, prouver que G admet un élément d'ordre p.

Exercice 2 – Soit p un nombre premier. Montrer qu'un groupe d'ordre p^2 est abélien.

Exercice 3 –On rappelle que les seuls sous-groupes distingués de S_3 sont $\{1\}$, A_3 et S_3.

1. Montrer que S_3 est isomorphe à $\mathrm{Aut}(S_3)$.
2. Décrire les actions de S_3 sur un ensemble à 4 éléments. (On montrera, ou admettra, que S_4 admet exactement 4 sous-groupes de cardinal 6.)
3. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. On suppose que l'action admet 2 orbites, l'une de cardinal n, l'autre de cardinal m. Définir un morphisme de G vers $S_n \times S_m$.
4. Avec les notations de la question précédente, on suppose de plus que $m = 3$, $n = 2$, $|X| = 5$ et que l'action est fidèle. Quelles sont les possibilités pour le groupe G ?

Exercice 4 –Soient G un groupe fini, p le plus petit facteur premier de $|G|$ et H un sous-groupe de G d'indice p. En considérant une action de H sur G/H, montrer que H est distingué dans G.

Exercice 5 – Soient p et q deux nombres premiers distincts. Montrer qu'un groupe d'ordre pq^2 n'est jamais simple.

Exercice 6 – Montrer qu'il n'existe pas de groupe simple de cardinal 56.

Exercice 7 – On admet pour le moment (cela sera montré en cours) que A_n est simple si et seulement si $n \geq 5$.

1. Soit G un groupe simple, non isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, agissant sur un ensemble X de cardinal $n \geq 1$. Montrer que l'action est triviale ou que G est isomorphe à un sous-groupe de A_n.

2. On suppose désormais que G est simple de cardinal 60. Montrer que si pour toute paire P_1, P_2 de 2-Sylow on a $P_1 \cap P_2 = \{1\}$, alors G est isomorphe à A_5.

3. Sinon, montrer en utilisant le centralisateur $C(g) = \{h \in G \mid gh = hg\}$ d'un élément bien choisi, que G est tout de même isomorphe à A_5.

4. Quel est l'unique cas des deux précédents qui peut en fait se produire ?

Exercice 8 –(**Formule de Burnside**) Soit G un groupe fini opérant sur un ensemble X. Le fixateur d'un élément $g \in G$ est par définition l'ensemble $\mathrm{Fix}(g) := \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$. Montrer que le nombre d'orbites pour l'action de G sur X est donné par la formule

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

On pourra calculer de plusieurs façons le cardinal de l'ensemble

$$C = \{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}.$$

Exercice 9 – On fabrique des colliers constitués de n perles de couleurs. La couleur de chaque perle est choisie parmi une palette de c couleurs (chaque couleur pouvant être choisie plusieurs fois).

1. Déterminer le nombre m de colliers que l'on peut fabriquer de cette façon ; étant entendu que l'on identifie des colliers qui se correspondent par une rotation, mais pas ceux qui se correspondent après un retournement (ie, on considère des colliers orientés).

2. Même question mais cette fois en identifiant également les colliers similaires après retournement et/ou rotations.

Exercice 10 – Soient p et q deux nombres premiers distincts. Déterminer à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre pq (on admettra que les différents produits semi-directs non triviaux sont tous isomorphes ; ceci sera prouvé dans la prochaine feuille).