Ens Paris, DMA **Algèbre 1** **2012/2013**

Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1 – Soit $n \geq 1$, constuire dans $\mathbb{R}$ un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^n$.

Exercice 2 – Soit $G = \mathbb{Z}^n$, où $n \geq 1$ est un entier. Montrer que tout système libre maximal est de cardinal n. Donner un exemple où un tel système n'est pas une base.

Exercice 3 –Soit G un groupe abélien de type fini.

1. Montrer que tout quotient de G est de type fini.
2. En utilisant que tout sous-groupe d'un groupe abélien libre de rang fini est libre de rang fini, montrer que tout sous-groupe de G est de type fini.

Exercice 4 – Soit G un groupe fini. Montrer qu'il existe dans G un élément d'ordre l'*exposant de* G (ie, d'ordre le ppcm des ordres des éléments de G).

Exercice 5 – Décomposer le groupe $G = (\mathbb{Z}/187\mathbb{Z})^\times$ sous la forme donnée par le théorème de structure des groupes abéliens de type fini.

Exercice 6 – Soit $e_1 = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ un vecteur tel que le pgcd de ses coordonnées vaut 1. Montrer que l'on peut compléter e_1 en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{Z}^n$.

Exercice 7 – Soit G un groupe abélien de type fini, et soit $f : G \to G$ un morphisme surjectif. Montrer que G est un isomorphisme. Ceci est-il nécessairement vrai si l'on remplace surjectif par injectif ?

Exercice 8 –Déterminer le groupe dérivé de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$.

Exercice 9 –Soit $n \geq 1$. On note $\mathrm{Int}(S_n)$ le sous-groupe des automorphismes intérieurs de $\mathrm{Aut}(S_n)$.

1. Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(S_n)$ tel que ϕ transforme toute transposition en une transposition. Montrer que ϕ est intérieur.
2. Soit $\sigma \in S_n$. Déterminer le cardinal du commutant $Z(\sigma) := \{s \in S_n \mid s\sigma s^{-1} = \sigma \}$. de σ.
3. En déduire que si $n \neq 6$ alors $\mathrm{Int}(S_n) = \mathrm{Aut}(S_n)$.

4. Soit $n \geq 5$ tel que $\mathrm{Int}(S_n) = \mathrm{Aut}(S_n)$. Montrer que tous les sous-groupes d'indice n de S_n sont conjugués.

5. En utilisant les 5-Sylow de S_5, montrer qu'il existe un sous-groupe H d'indice 6 de S_6 opérant transitivement sur $\{1, \ldots, 6\}$.

6. En déduire que $\mathrm{Aut}(S_6) \neq \mathrm{Int}(S_6)$.

Exercice 10 – Soient G un groupe et H un sous-groupe de G.

1. Montrer que S_3 et D_4 sont résolubles.

2. Montrer que si G est résoluble, alors H l'est aussi.

3. On suppose désormais dans la suite que H est distingué dans G. Montrer que si G est résoluble, alors G/H est résoluble.

4. Montrer que si H et G/H sont résolubles, alors G est résoluble.

5. Si G est résoluble et simple, montrer que G est cyclique de cardinal un nombre premier.

6. Montrer que S_n n'est pas résoluble si $n \geq 5$

7. Soit p un nombre premier. Montrer que tout p-groupe est résoluble.